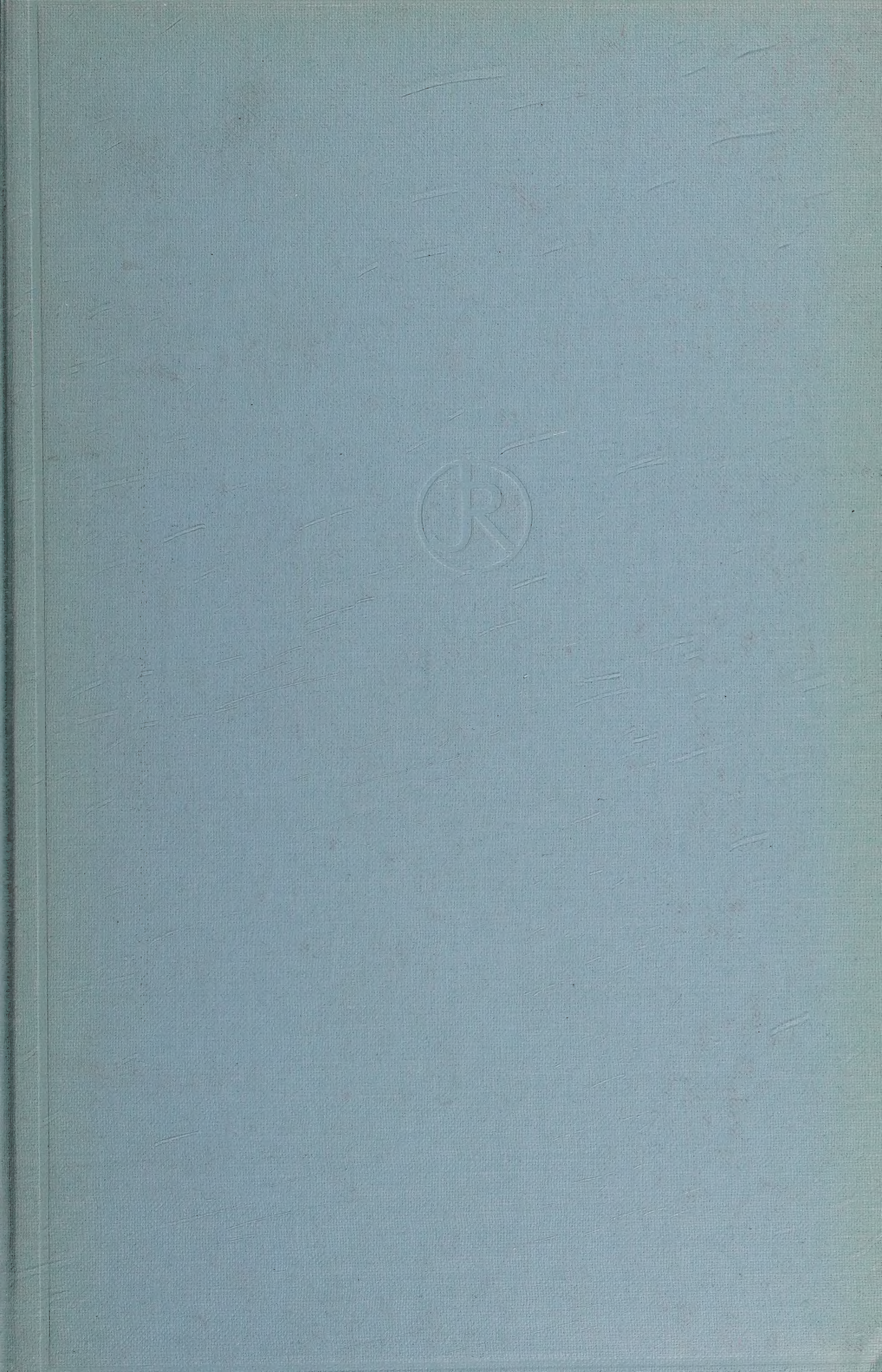




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 18

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1954

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 3—50

С. Л. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В работе рассматривается система уравнений в частных производных, не являющаяся системой Ковалевской, для которой ставится задача Коши и смешанная задача в произвольной гладкой области; доказывается существование решения в гильбертовом пространстве H и непрерывная зависимость его от начальных данных. Задача Коши в неограниченном пространстве решается в явном виде.

§ 1. Постановка задачи

В некоторых вопросах математической физики и механики встречается система уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \quad v_y - \frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= - v_x - \frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + F_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &+ \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = g, \end{aligned} \tag{1}$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты некоторого вектора, а p — скалярная функция, заданные в области Ω трехмерного пространства, ограниченной поверхностью S. Точки области Ω определяются значениями координат x, y, z.

По характеру физической задачи на границе области могут быть заданы некоторые условия, например:

$$p|_S = 0 \qquad (2а)$$

или

$$[v_x \cos nx + v_y \cos ny + v_z \cos nz]_S = 0. \qquad (2б)$$

(2а) и (2б) вместе — (2)

Для того чтобы сделать решение этой задачи определенным, следует задать еще начальные значения вектора $\vec{v}$ при помощи условия:

$$\left. \begin{aligned} v_x|_{t=0} &= v_x^{(0)}(x, y, z), \\ v_y|_{t=0} &= v_y^{(0)}(x, y, z), \\ v_z|_{t=0} &= v_z^{(0)}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

В различных вопросах условия на границе могут быть более сложными.

Кроме этой основной задачи, мы будем рассматривать задачу об отыскании решения системы (1) при начальных условиях (3) в неограниченном пространстве. При этом граничные условия (2) отпадают и должны быть заменены некоторым условием на бесконечности. Систему (1) и условия (2) и (3) иногда удобно коротко записывать в векторных обозначениях. Обозначая через **i**, **j**, **k** орты, параллельные координатным осям, представим систему (1) в виде:

$$\vec{N}(\vec{v}, p) \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v} \times \mathbf{k}] + \operatorname{grad} p = \vec{F}, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = g. \tag{1*}$$

Краевое условие (2б) примет при этом форму

$$v_n|_S = 0, \tag{2*}$$

а начальное условие (3) запишется в виде равенства

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}^{(0)}(x, y, z). \tag{3*}$$

Мы рассмотрим как случай задания $\vec{v}$ в ограниченной области Ω, так и случай, когда $\vec{v}$ задано во всем пространстве. Однако в первом случае мы ограничимся лишь простейшим качественным исследованием решений системы (1) при условиях (2а) или (2б), не рассматривая, например, таких вопросов, как поведение этих решений при больших значениях t, что потребовало бы изучения тонких спектральных свойств соответствующих операторов. Основная наша задача состоит в исследовании решения системы (1) при начальных условиях (3) в неограниченном пространстве при соответствующих естественных условиях на бесконечности. Мы дадим решение этой задачи в явном виде, что позволит сделать ряд качественных заключений о поведении решений нашей системы, а также указать явное решение задачи в одном частном случае для ограниченной среды.

§ 2. Основные уравнения в функциональном пространстве

Будем рассматривать гильбертово пространство H комплексных векторов $\vec{v}$, заданных в области Ω, компоненты которых интегрируемы с квадратом по Ω.

Скалярное произведение в H определим формулой

$$(\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}) = \iiint\limits_{\Omega} (v_x^{(1)} \overline{v}_x^{(2)} + v_y^{(1)} \overline{v}_y^{(2)} + v_z^{(1)} \overline{v}_z^{(2)})\, d\Omega. \tag{4}$$

В дальнейшем мы разберем два случая: случай, когда Ω совпадает со всем пространством, и случай ограниченной области Ω, гомеоморфной шару. Условие на топологический характер области не является существенным и мы вводим его лишь для упрощения изложения.

В пространстве H лежит линейное многообразие $\widetilde{G}_1$ векторов вида

$$\vec{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi, \tag{5}$$

где φ — функция, имеющая непрерывные производные любых порядков внутри области.

Векторы вида (5), очевидно, в свою очередь, имеют непрерывные производные любого порядка и удовлетворяют уравнению:

$$\operatorname{rot} \vec{v}_1 = 0. \tag{6}$$

Векторы, удовлетворяющие (6), обычно называются потенциальными. Известно, что для всякого неограниченно дифференцируемого вектора условие (6) необходимо и достаточно для представимости его в виде (5)

Другое линейное многообразие $\widetilde{J}_1 \subset H$ состоит из векторов вида

$$\vec{v}_2 = \operatorname{rot} \vec{\Psi}, \tag{7}$$

где $\vec{\Psi}$ — вектор, имеющий все непрерывные производные любого порядка. Векторы вида (7) удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{div} v_2 = 0. \tag{8}$$

Векторы, удовлетворяющие (8), обычно называются соленоидальными. Хорошо известно, что для всякого неограниченно дифференцируемого вектора условие (8) необходимо и достаточно для возможности представления его в виде (7).

Пусть $\widetilde{H}_0$ есть линейное многообразие гладких векторов $\vec{v}$, каждый из которых обращается в нуль вне некоторой, соответствующей ему конечной области $C_{\vec{v}}$, лежащей вместе со своей границей внутри Ω, и которые имеют неограниченное количество производных. Такие векторы мы будем называть срезанными.

Через $\widetilde{J}_0$ обозначим многообразие гладких соленоидальных срезанных векторов $\widetilde{J}_0 \subset \widetilde{H}_0$, а через $\widetilde{G}_0$ — многообразие гладких потенциальных срезанных векторов $\widetilde{G}_0 \subset \widetilde{H}_0$.

ЛЕММА I. *В случае, когда Ω есть все пространство, элемент $\vec{v}$ из H, ортогональный ко всем элементам из $\widetilde{G}_0$ и $\widetilde{J}_0$, может быть лишь тождественным нулем.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что из ортогональности $\vec{v}$ ко всем элементам $\widetilde{G}_0$ и $\widetilde{J}_0$ следует, что вектор $\vec{v}$ ортогонален к оператору Лапласа от любого вектора $\vec{w}$ из $\widetilde{H}_0$, т. е. к оператору Лапласа от любого гладкого вектора, равного нулю вне некоторой конечной внутренней подобласти $C_{\vec{w}}$. Действительно,

$$\Delta \vec{w} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w}. \tag{9}$$

Но

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{w} \in \tilde{G}_0, \\ \vec{w}_2 &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{w} \in \tilde{J}_0, \end{aligned} \qquad (10)$$

следовательно:

$$(\vec{v}, \Delta\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}_1) - (\vec{v}, \vec{w}_2) = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, каждая компонента $\vec{v}$ ортогональна ко всем функциям вида $\Delta\psi$, где ψ — гладкая функция, равная нулю вне некоторой области C_ψ. Иными словами,

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_i \Delta\psi \, d\Omega = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (12)$$

Отсюда обычным образом [см. (1)] следует, что v_i является гармонической функцией и, значит, допускает представление:

$$v_i = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n^{(i)}(\vartheta, \varphi), \qquad (13)$$

где $Y_n^{(i)}(\vartheta, \varphi)$ — какие-то сферические функции Лапласа.

Функция v_i должна быть, кроме того, интегрируемой с квадратом во всем пространстве:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} |v_i|^2 \, d\Omega < +\infty. \qquad (14)$$

Обозначим

$$|b_n^{(i)}|^2 = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |Y_n^{(i)}(\vartheta, \varphi)|^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Тогда

$$\int\limits_0^A \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} |v_i|^2 \, d\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n^{(i)}|^2 \frac{A^{2n+1}}{2n+1}. \qquad (15)$$

Если среди чисел $|b_n^{(i)}|^2$ найдется хоть одно, не равное нулю, то сумма в правой части (15) будет неограниченно возрастать при возрастании A. Так как это противоречит (14), то, значит, все $|b_n^{(i)}|^2$ равны нулю. Отсюда следует, что v_1, v_2, v_3 каждая порознь равна нулю, что и требовалось доказать.

ЛЕММА II. *Многообразие $\tilde{G}_0$ ортогонально к $\tilde{J}_1$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v}_1 \in \tilde{G}_0$, $\vec{v}_2 \in \tilde{J}_1$. Тогда, в силу (7),

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}_2}) \, d\Omega = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\operatorname{rot} \vec{\psi}}) \, d\Omega =$$

$$= -\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{div} [\vec{v}_1 \times \overline{\vec{\psi}}] \, d\Omega + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} (\vec{\psi}, \operatorname{rot} \vec{v}_1) \, d\Omega. \qquad (16)$$

Первый из интегралов правой части (16) сводится к интегралу по конечной области Ω_{v_1}, а второй равен нулю в силу (6). Отсюда

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = -\iiint\limits_{\Omega_{v_1}} \operatorname{div}\, [\vec{v}_1 \times \overline{\vec{\Psi}}]\, d\Omega = \iint\limits_{S_{v_1}} [\vec{v}_1 \times \overline{\vec{\Psi}}] \cdot \vec{n}\, dS,$$

где S_{v_1} — поверхность, ограничивающая объем Ω_{v_1}. Этот последний интеграл равен нулю, так как на S_{v_1} вектор $\vec{v}_1$ обращается в нуль. Значит,

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = 0 \tag{17}$$

и лемма доказана.

ЛЕММА III. *Многообразие $\tilde{G}_1$ ортогонально к $\tilde{J}_0$.*

Доказательство. Пусть $\vec{v}_1 \in \tilde{G}_1$, $\vec{v}_2 \in \tilde{J}_0$. Тогда

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{grad} \varphi, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega =$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{div} (\varphi\, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega - \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, \operatorname{div} \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega. \tag{18}$$

Второй интеграл в правой части (18) равен нулю в силу (8), а первый интеграл приводится к интегралу по конечной области Ω_{v_2}. Имеем:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_{v_2}} \operatorname{div} (\varphi\, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = -\iint\limits_{S_{v_2}} \varphi\, \overline{v}_{2n}\, dS. \tag{19}$$

Но v_{2n} на S_{v_2} обращается в нуль и, значит,

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}_1, \overline{\vec{v}}_2)\, d\Omega = 0.$$

Лемма доказана. Из лемм II и III вытекает

Следствие. *Многообразия $\tilde{J}_0$ и $\tilde{G}_0$ ортогональны между собой.*

Обозначим через G_0 замыкание $\tilde{G}_0$, через J_0 — замыкание $\tilde{J}_0$, через G_1 — замыкание $\tilde{G}_1$, а через J_1 — замыкание $\tilde{J}_1$. Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. *Для случая, когда Ω есть все пространство, можно представить гильбертово пространство H в виде:*

$$H = J \oplus G,$$

где $J = J_0 = J_1$, *а* $G = G_0 = G_1$.

Доказательство. В самом деле, J_0 и G_0 ортогональны, как замыкания двух ортогональных многообразий. Кроме того, в H не содержится ни одного элемента, который был бы ортогонален к G_0 и J_0

одновременно. Следовательно, $H = J_0 \oplus G_0$. Но $J_1 \supseteq J_0$ и, кроме того, J_1 ортогонально к G_0, значит, J_1 совпадает с J_0. Точно так же $G_1 \supseteq G_0$ и, кроме того, G_1 ортогонально к J_0. Следовательно, G_1 совпадает с G_0. Теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению конечных областей.

ЛЕММА IV. *Всякий вектор $\vec{v}$ из H, ортогональный к обоим многообразиям $\tilde{J}_0$ и $\tilde{G}_0$, есть гармонический вектор. Иными словами, как вихрь, так и расходимость этого вектора равны нулю.*

Из рассуждений, аналогичных доказательству леммы I, следует, что все компоненты вектора $\vec{v}$, т. е. функции v_x, v_y и v_z, будут гармоническими функциями переменных x, y, z и имеют непрерывные производные любого порядка.

Далее, пусть $\vec{v}_1 = \operatorname{grad} \varphi_1 \in \tilde{G}_0$, причем сама функция φ_1 удовлетворяет условию

$$\varphi_1 \equiv 0 \text{ вне } V_1 \subset \Omega. \tag{20}$$

Тогда, по условию леммы, получим:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (\vec{v}, \overline{\vec{v}_1})\, d\Omega = 0 = \iiint_{V_1} (\vec{v}, \overline{\operatorname{grad} \varphi_1})\, d\Omega = \\ = \iiint_{V_1} \operatorname{div} (\overline{\varphi}_1 \vec{v})\, d\Omega - \iiint_{V_1} \overline{\varphi}_1 \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega = \\ = - \iint_{S_1} \overline{\varphi}_1 v_n\, dS - \iiint_{V_1} \overline{\varphi}_1 \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega.\end{aligned} \tag{21}$$

Первое слагаемое справа в формуле (21) равно нулю, так как $\varphi_1 = 0$ на поверхности S_1, и, следовательно, при любом φ_1, удовлетворяющем (20), имеем:

$$\iiint_{\Omega} \overline{\varphi}_1 \operatorname{div} \vec{v}\, d\Omega = 0.$$

Это возможно только в том случае, если

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{22}$$

Пусть $\vec{v}_2 \in \tilde{J}_0$, причем $\vec{v}_2 = \operatorname{rot} \vec{\Psi}_2$, где

$$\vec{\Psi}_2 \equiv 0 \text{ вне } V_2 \subset \Omega. \tag{23}$$

Мы будем иметь:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} (\vec{v}, \overline{\vec{v}_2})\, d\Omega = 0 = \iiint_{V_2} (\vec{v}, \overline{\operatorname{rot} \vec{\Psi}_2})\, d\Omega = \\ = \iiint_{V_2} \operatorname{div} [\overline{\vec{\Psi}} \times \vec{v}]\, d\Omega + \iiint_{V_2} (\overline{\vec{\Psi}}_2, \operatorname{rot} \vec{v})\, d\Omega = \\ = - \iint_{S_2} ([\overline{\vec{\Psi}}_2 \times \vec{v}] \cdot \vec{n})\, dS + \iiint_{V_2} (\overline{\vec{\Psi}}_2, \operatorname{rot} \vec{v})\, d\Omega.\end{aligned} \tag{24}$$

Первое слагаемое справа в формуле (24) равно нулю, так как $\vec{\Psi}_2 \equiv 0$ на S_2. Следовательно, при любом $\vec{\Psi}_2$, удовлетворяющем (23), имеем:

$$\iiint_{\Omega} (\overline{\vec{\Psi}}_2, \operatorname{rot} \vec{v})\, d\Omega = 0.$$

Это возможно только в том случае, если

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0. \tag{25}$$

Следовательно, любой вектор $\vec{v}$, ортогональный к $\tilde{J}_1$ и $\tilde{G}_0$ одновременно, является гармоническим вектором.

Лемма доказана. Из этой леммы вытекают два важных следствия:

ЛЕММА V. *Вектор* $\tilde{v}$, *ортогональный к* $\tilde{G}_0$ *и* $\tilde{J}_1$ *одновременно, есть тождественный нуль.*

Действительно, будучи ортогональным к $\tilde{G}_0$ и $\tilde{J}_0$, вектор $\vec{v}$, является гармоническим и, следовательно, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Отсюда следует, что он допускает представление $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{\Psi}$ и, значит, $\vec{v} \in \tilde{J}_1$. Из ортогональности $\vec{v}$ к $\tilde{J}_1$ следует, что $\vec{v} \equiv 0$.

ЛЕММА VI. Вектор $\vec{v}$, *ортогональный к* $\tilde{G}_1$ *и* $\tilde{J}_0$ *одновременно, есть тождественный нуль.*

Действительно, будучи ортогональным к $\tilde{G}_1$ и $\tilde{J}_0$, вектор $\vec{v}$ является гармоническим и поэтому допускает представление $\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi$. Таким образом, $\vec{v} \in \tilde{G}_1$. Из ортогональности $\vec{v}$ к $\tilde{G}_1$ следует, что $\vec{v} \equiv 0$.

Докажем теперь основную теорему.

ТЕОРЕМА. *Пространство H допускает представление:*

$$H = G_0 \oplus I \oplus J_0,$$

где $I = G_1 \cdot J_1$ *есть пересечение пространств* G_1 *и* J_1, *т. е. множество векторов, общих этим двум пространствам.*

Действительно, из лемм V и VI следует, что

$$H = G_0 \oplus I_1 \text{ и } H = G_1 \oplus J_0,$$

Если вектор $\vec{v}$ ортогонален к G_0, J_0 и I, то он тождественно равен нулю. В самом деле, этот вектор, в силу ортогональности к G_0, должен принадлежать J_1, а в силу ортогональности к J_0, должен принадлежать G_1. Следовательно, он должен быть элементом I, и, в силу ортогональности к I, будет тождественным нулем, что и требовалось доказать. Отметим, что I состоит из гармонических векторов, как это вытекает из леммы IV.

Возвращаясь к нашей системе уравнений, прежде всего приведем ее к несколько более удобному виду. Построим вектор $\vec{v}^*$, удовлетворяющий условию $\operatorname{div} \vec{v}^* = g$, для задачи (2а) совершенно произвольный, а для задачи (2б) — подчиненный еще добавочному условию:

$$v_n|_S = 0.$$

Это можно сделать, например, положив:

$$\vec{v}^* = \operatorname{grad} v, \quad \Delta v = g, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Заменив неизвестные по формуле $\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}_1$, мы получим для $\vec{v}_1$ ту же систему уравнений, но с условием $\operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$.

Таким образом, можно ограничиться случаем $g = 0$.

Будем изучать систему (1) в гильбертовом пространстве H. В качестве неизвестного возьмем элемент гильбертова пространства $\vec{v}$. Уравнение

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1'}$$

говорит о том, что $\vec{v}$ — вектор соленоидальный.

Вторая из наших задач заключается в нахождении таких решений $\vec{v}$, для которых

$$v_n|_S = 0. \tag{2б}$$

Для гладких функций $\vec{v}$ при гладкой границе S отсюда следует, что

$$\iiint_\Omega (\vec{v}, \operatorname{grad} \varphi) = 0, \tag{26}$$

где φ — произвольная функция, имеющая неограниченное число производных.

Мы будем рассматривать обобщенные решения задачи, заменив условие (26) требованием, что $\vec{v}$ — произвольный элемент из J_0. Если $\vec{v}$ — достаточно гладкий вектор — имеет предельные значения $v_n = 0$ на поверхности S и сама эта поверхность достаточно гладкая, то из принадлежности $\vec{v}$ к J_0 следует и условие (2б) и уравнение (1'). В самом деле, правая часть (26) должна быть равна нулю при любом φ, а это возможно лишь в том случае, если

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad v_n|_S = 0.$$

Для вычисления $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ из уравнения (1') мы должны от вектора $[\vec{v} \times \mathbf{k}] + \vec{F}$ отнять вектор $\operatorname{grad} p$ таким образом, чтобы результат оказался лежащим в J_0.

Вектор $\operatorname{grad} p$ есть некоторый элемент G_1. Будем определять $\operatorname{grad} p$ в обобщенном смысле как произвольный элемент $\vec{v}_1$ из G_1.

Из формулы (1*) следует, что вектор $\vec{v}_1$, который удовлетворяет нашим условиям, определяется единственным образом формулой:

$$\vec{v}_1 = P_0^* \{[\vec{v} \times \mathbf{k}] + \vec{F}\}, \tag{27}$$

где P_0^* — операция проектирования из H в G_1. При этом

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = P_0 \{[\vec{v} \times \mathbf{k}] + \vec{F}\}, \tag{28}$$

где P_0 — операция проектирования из H в J_0.

Таким образом уравнения (1*) вместе с (2б) могут быть записаны в виде одного векторного уравнения (28).

Рассмотрим теперь первую задачу об интегрировании уравнений (1*) при условии (2а).

Обобщая постановку этой задачи, мы можем считать $\vec{v}$ любым элементом из J_1, поскольку никаких краевых условий на этот вектор не наложено.

Для вычисления $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\Big|$ мы должны вычесть из $[\vec{v}\times\mathbf{k}]+\vec{F}$ такой потенциальный вектор $\operatorname{grad} p$, для которого p обращается в нуль на границе и притом после вычитания остается соленоидальный вектор.

Нетрудно видеть, что при достаточно гладком p и гладкой границе S вектор $\operatorname{grad} p$ окажется ортогональным к любому элементу $\vec{v}_2$ из $\tilde{J}_1$. В самом деле,

$$\iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}_2, \operatorname{grad} p)\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}(p\,\vec{v}_2)\, d\Omega -$$

$$- \iiint\limits_{\Omega} (p \operatorname{div} \vec{v}_2)\, d\Omega = \iint\limits_{S} p v_{2_n}\, dS - \iiint\limits_{\Omega} (p \operatorname{div} \vec{v}_2)\, d\Omega. \tag{29}$$

Оба слагаемых правой части равны нулю и, следовательно,

$$\iiint (\vec{v}_2, \operatorname{grad} p)\, d\Omega = 0,$$

если $\vec{v}_2 \subset \tilde{J}_1$. Поэтому естественно, расширяя задачу, заменить $\operatorname{grad} p$ на вектор $\vec{v}_1$ — совершенно произвольный вектор из G_0. В такой постановке вычисление $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ становится возможным для любого $\vec{v} \in H$ и любого $\vec{F} \in H$ и приводит к единственному результату. Как это следует из (1*), достаточно взять

$$\vec{v}_1 = P_1^*\{[\vec{v}\times\mathbf{k}] + \vec{F}\},$$

где P_1^* — операция проектирования из H в G_0; при этом мы получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = P_1\{[\vec{v}\times\mathbf{k}] + \vec{F}\}, \tag{30}$$

где P_1 — операция проектирования из H в J_1.

Таким образом, уравнение (1*) вместе с условием (2а) записывается в виде одного уравнения (30).

Заметим, что если введенное нами выражение

$$P_1^*\{[\vec{v}\times\mathbf{k}] + \vec{F}\} = \operatorname{grad} p$$

действительно является градиентом гладкой функции, то эта функция может быть взята равной нулю на границе. Напишем условие ортогональности $\operatorname{grad} p$ к любому элементу из J_1. Преобразуя это выражение

по формуле (29), мы можем взять за v_{2n} любую функцию со средним значением, равным нулю. При этом правая часть (29) может быть тождественно равной нулю лишь в том случае, если $p = \text{const}$.

Известно ([1]), что если $\operatorname{grad} p \in G_1$, то функция p всегда существует.

Наконец, рассмотрим последний случай когда пространство Ω неограниченно. При этом для получения $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ из $[\vec{v} \times \mathbf{k}] + \vec{F}$ нужно отнять $\operatorname{grad} p \in G$.

Обобщая результат подобно прежним случаям, мы можем записать нашу задачу в виде:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = P\{[\vec{v} \times \mathbf{k}] + \vec{F}\}, \tag{31}$$

где P — операция проектирования из H в J.

§ 3. Решение задачи в виде степенного ряда

Та форма, в которой мы представили решение в гильбертовом пространстве, позволяет легко построить решение при помощи степенного ряда. В настоящем параграфе мы рассмотрим только уравнение (31), так как уравнения (28) и (30) могут быть изучены точно таким же образом. Сначала исследуем однородное уравнение. Обозначим оператор $P[\vec{v} \times \mathbf{k}]$ через $A\vec{v}$. Очевидно,

$$\| A\vec{v} \| \leqslant \| \vec{v} \times \mathbf{k} \| \leqslant \| \vec{v} \|.$$

Следовательно, норма оператора A не превосходит единицы. При этом уравнение

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v} \tag{32}$$

имеет решение

$$\vec{v} = e^{At}\vec{v}_0 \equiv \vec{v}_0 + \frac{t}{1} A\vec{v}_0 + \frac{t^2}{2!} A^2\vec{v}_0 + \cdots. \tag{33}$$

В самом деле, ряд (33) сходится равномерно по t, так как норма его n-го члена удовлетворяет неравенству:

$$\| A^n \vec{v}_0 \| \leqslant \| \vec{v}_0 \|;$$

$$\left\| \frac{t^n}{n!} A^n \vec{v}_0 \right\| \leqslant \frac{t^n}{n!} \| \vec{v}_0 \|.$$

Очевидно,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v}_0 + \frac{t}{1} A^2\vec{v}_0 + \frac{t^2}{2!} A^3\vec{v}_0 + \cdots,$$

причем ряд из производных сходится равномерно, следовательно.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = A\vec{v}.$$

Кроме того,

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0. \tag{34}$$

Таким образом, задача решена. Установим корректность ее постановки. Для этого нужно показать непрерывную зависимость решения от начальных данных. Пусть

$$\left\| \vec{v}_0 - \vec{v}_0^1 \right\| < \varepsilon.$$

Составим векторы

$$\vec{v} = e^{tA} \vec{v}_0 \quad \text{и} \quad \vec{v}^1 = e^{tA} \vec{v}_0^1 .$$

Мы будем иметь:

$$\| \vec{v} - \vec{v}^1 \| = \| e^{tA} (\vec{v}_0 - \vec{v}_0^1) \| < e^t \varepsilon. \tag{35}$$

Следовательно, решение в пространстве H непрерывно зависит от $\vec{v}_0$, заданного также в пространстве H, и, значит, наша задача поставлена корректно.

Задача о нахождении решения неоднородного уравнения решается аналогично. Записав это уравнение в виде

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = A\vec{v} + P\vec{F},$$

мы можем получить решение этой задачи по общей формуле для решения обыкновенного линейного уравнения с постоянным коэффициентом, а именно:

$$\vec{v} = e^{At} \vec{v}_0 + \int_0^t e^{A(t-t_1)} P\vec{F}(t_1)\, dt_1. \tag{36}$$

Действительно, интеграл в правой части (36), очевидно, имеет смысл, ибо норма подинтегральной функции не превосходит

$$\| F(t_1) \| e^{|t-t_1|} .$$

Продифференцировав обе части равенства (36) по t, получим:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = Ae^{At} \vec{v}_0 + A \int_0^t e^{A(t-t_1)} P\vec{F}(t_1)\, dt_1 + P\vec{F}(t),$$

откуда следует, что эта формула дает решение задачи. Очевидно также, что построенное решение удовлетворяет начальным условиям. Корректность постановки этой задачи не нуждается в проверке.

§ 4. Потенциальная функция для решения

Умножая второе из уравнений (1) на $\pm i$ и складывая с первым, перепишем систему (1) в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(v_x + iv_y) + i(v_x + iv_y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)p + (F_x + iF_y),\\
&\frac{\partial}{\partial t}(v_x - iv_y) - i(v_x - iv_y) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)p + (F_x - iF_y);\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z,\\
&\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(v_x + iv_y) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(v_x - iv_y)\right] + \frac{\partial v_z}{\partial z} = g.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Формулы (37) позволяют найти решение системы (1) в простом виде. Обозначив для краткости

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \bar\zeta},\\
&v_x + iv_y = w, \quad v_x - iv_y = \bar w,\\
&F_x + iF_y = U, \quad F_x - iF_y = \bar U,
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)w = -\frac{\partial p}{\partial \bar\zeta} + U,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\bar w = -\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \bar U,\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + F_z,\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar w}{\partial \bar\zeta}\right) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = g.
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Решение системы (39) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&w = w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{II}} + w^{\mathrm{III}},\\
&\bar w = \bar w^{\mathrm{I}} + \bar w^{\mathrm{II}} + \bar w^{\mathrm{III}},\\
&v_z = v_z^{\mathrm{I}} + v_z^{\mathrm{II}} + v_z^{\mathrm{III}},\\
&p = p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}},
\end{aligned}$$

где w^{I}, $\bar w^{\mathrm{I}}$, v_z^{I} есть частное решение системы:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)w^{\mathrm{I}} = U,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\bar w^{\mathrm{I}} = U,\\
&\frac{\partial v_z^{\mathrm{I}}}{\partial t} = F_z,
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

w^{II}, $\overline{w}^{II}$, v_z^{II}, p^{II} есть частное решение системы

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right)w^{II} &= -\frac{\partial p^{II}}{\partial\overline{\zeta}},\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right)\overline{w}^{II} &= -\frac{\partial p^{II}}{\partial\zeta},\\
\frac{\partial v_z^{II}}{\partial t} &= -\frac{\partial p^{II}}{\partial z},\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{II}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\overline{w}^{II}}{\partial\overline{\zeta}}\right)+\frac{\partial v_z^{II}}{\partial z} &= g-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{I}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\overline{w}^{I}}{\partial\overline{\zeta}}\right)-\frac{\partial v_z^{I}}{\partial z},
\end{aligned}\right\}\tag{41}$$

и, наконец, w^{III}, $\overline{w}^{III}$, v_z^{III}, p^{III} есть решение соответствующей однородной системы

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right)w^{III} &= -\frac{\partial p^{III}}{\partial\zeta},\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right)\overline{w}^{III} &= -\frac{\partial p^{III}}{\partial\zeta},\\
\frac{\partial v_z^{III}}{\partial t} &= -\frac{\partial p^{III}}{\partial z},\\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{III}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{III}}{\partial\overline{\zeta}}\right)+\frac{\partial v_z^{III}}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}\right\}\tag{42}$$

Очевидно, что решение системы (40) легко построить, так как эта система представляет собою систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Первые три уравнения (41) связывают каждое неизвестное w^{II}, $\overline{w}^{II}$, v_z^{II} с неизвестным p^{II}, причем все операторы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right),\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right),\quad \frac{\partial}{\partial\zeta},\quad \frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}},\quad \frac{\partial}{\partial t},\quad \frac{\partial}{\partial z},\tag{43}$$

входящие в эти уравнения, коммутативны друг с другом. Поэтому можно искать частное решение уравнений (41) в виде:

$$p^{II}=M_p\Phi^{II},\quad w^{II}=M_w\Phi^{II},\quad \overline{w}^{II}=\overline{M}_w\Phi^{II},\quad v_z^{II}=M_v\Phi^{II},$$

где Φ^{II} — некоторый потенциал. Оператор M_p представляет собою наименьшее общее кратное (произведение) операторов, стоящих в левых частях первых трех уравнений (41), а каждый из операторов M_w, $\overline{M}_w$, M_v есть произведение оператора, стоящего в правой части соответствующего уравнения, на дополнение оператора, стоящего в левой его части, до оператора M_p. Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}
p^{II} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right)\Phi^{II},\\
w^{II} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right)\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{II},\\
\overline{w}^{II} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial t}\Phi^{II},\\
v_z^{II} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}+i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\right)\frac{\partial}{\partial z}\Phi^{II}.
\end{aligned}\right\}\tag{44}$$

Формулы (44), будучи раскрыты, приводят к следующим выражениям для v_x, v_y, v_z и p:

$$\left.\begin{aligned} v_x^{II} &= \frac{\partial^3\Phi^{II}}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi^{II}}{\partial y\,\partial t}, \\ v_y^{II} &= \frac{\partial^3\Phi^{II}}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi^{II}}{\partial x\,\partial t}, \\ v_z^{II} &= \frac{\partial^3\Phi^{II}}{\partial z\,\partial t^2} + \frac{\partial\Phi^{II}}{\partial z}, \\ p^{II} &= -\frac{\partial^3\Phi^{II}}{\partial t^3} - \frac{\partial\Phi^{II}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Подставляя выражения (44) в последнее из уравнений (41), получим уравнение для потенциала Φ^{II}:

$$L\Phi^{II} = \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\zeta\,\partial\bar\zeta}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\right\}\Phi^{II} \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi^{II} = g - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}w^{I} - \frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\bar w^{I}\right\} - \frac{\partial v_z^{I}}{\partial z}. \tag{46}$$

Впоследствии мы укажем, как можно найти частное решение уравнения (46).

Для функций w^{III}, $\bar w^{III}$, v_z^{III} и p^{III}, являющихся общим решением уравнения (42), естественно попытаться дать представление в том же виде, как и для уравнений (41), а именно:

$$\begin{aligned} p^{III} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\Phi^{III}, \\ w^{III} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\Phi^{III}, \\ \bar w^{III} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi^{III}, \\ v_z^{III} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\frac{\partial}{\partial z}\Phi^{III}, \end{aligned}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p^{III} &= -\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi^{III}, \\ v_x^{III} &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}\right)\Phi^{III}, \\ v_y^{III} &= \left(\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}\right)\Phi^{III}, \\ v_z^{III} &= \left(\frac{\partial^3}{\partial z\,\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi^{III}, \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

где функция Φ^{III} есть какое-то решение однородного уравнения:

$$L\Phi^{III} \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi^{III} = 0. \tag{48}$$

Мы покажем, что такое представление всегда возможно.

Установим предварительно, что как вектор $\vec{v}$, так и p удовлетворяют уравнениям

$$Lp = 0, \tag{49}$$

$$L\bar{v} = 0. \tag{50}$$

Вместо уравнения (50) достаточно рассмотреть уравнения

$$Lw = 0, \tag{51}$$

$$Lv_z = 0. \tag{52}$$

Для доказательства (51) и (52) применим к уравнению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^{\mathrm{III}}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \overline{w}^{\mathrm{III}}}{\partial \bar{\zeta}}\right) + \frac{\partial v_z^{\mathrm{III}}}{\partial z} = 0$$

какой-либо оператор M_p, M_w, $\overline{M}_w$ или M_z, например,

$$M_w = \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right).$$

Мы получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)w^{\mathrm{III}} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}^2}\overline{w}^{\mathrm{III}} +$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)v_z^{\mathrm{III}} = 0$$

или, пользуясь уравнениями

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\overline{w}^{\mathrm{III}} = -\frac{\partial p^{\mathrm{III}}}{\partial \zeta}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)w^{\mathrm{III}} = -\frac{\partial p^{\mathrm{III}}}{\partial \bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_z^{\mathrm{III}} = -\frac{\partial p^{\mathrm{III}}}{\partial z},$$

будем иметь:

$$\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \zeta\,\partial \bar{\zeta}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\right] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\right)\right\} w^{\mathrm{III}} = 0,$$

т. е.

$$Lw^{\mathrm{III}} = 0.$$

Так же доказываются и остальные уравнения (51), (52) и (49).

Будем рассматривать систему уравнений (47) как систему уравнений для одной неизвестной функции Φ^{III}, считая, что функции v_x, v_y, v_z и p заданы и удовлетворяют системе (42).

Покажем, что уравнения (48) и (47) совместны и определяют функцию Φ с точностью до гармонической функции $\chi(x, y)$ от двух переменных (значок III мы для краткости опускаем).

Действительно, общее решение первого из уравнений (47) будет:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = C_2(x, y, z)\cos t + C_3(x, y, z)\sin t - \\ - \int_0^t \sin(t - t_1)\, p(x, y, z, t_1)\, dt_1. \tag{53}$$

Вычислим величину $L\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. Мы будем иметь:

$$L\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} - \Delta C_2\right)\cos t + \left(\frac{\partial^2 C_3}{\partial z^2} - \Delta C_3\right)\sin t - \\ - \int_0^t \sin(t - t_1)\frac{\partial^2 p(x, y, z, t_1)}{\partial z^2}\, dt_1 - \Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \sin\tau\, p(x, y, z, t-\tau)\, d\tau = \\ = -\left(\frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}\right)\cos t - \left(\frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_3}{\partial y^2}\right)\sin t - \\ - \int_0^t \sin(t - t_1)\frac{\partial^2 p(x, y, z, t_1)}{\partial z^2}\, dt_1 - \int_0^t \sin\tau\,\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x, y, z, t-\tau)\, d\tau - \\ - \sin t\frac{\partial}{\partial t}\Delta p\Big|_{t=0} - \cos t\,\Delta p\Big|_{t=0} = \\ = -\sin t\left[\frac{\partial}{\partial t}\Delta p\Big|_{t=0} + \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_3}{\partial y^2}\right] - \cos t\left[\Delta p\Big|_{t=0} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2}\right].$$

Соответствующим выбором C_2 и C_3 можно добиться того, чтобы $L\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ равнялось нулю.

Решение уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_3}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial t}\Delta p\Big|_{t=0}, \\ \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} &= -\Delta p\Big|_{t=0} \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

очевидно, существует.

Выбрав C_2 и C_3, получим значение $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ с точностью до двух произвольных функций $\chi_1(x, y, z)$ и $\chi_2(x, y, z)$, гармонических по переменным x и y. Имеем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \Omega + \chi_1(x, y, z)\cos t - \chi_2(x, y, z)\sin t,$$

где к Ω отнесены все слагаемые, входящие в правую часть (53), кроме тех, которые содержат χ_1 и χ_2.

Для Φ получим равенство

$$\Phi = C_1(x, y, z) + \chi_1(x, y, z)\sin t + \chi_2(x, y, z)\cos t + \int_0^t \Omega\, dt_1 = \\ = C_1(x, y, z) + \chi_1(x, y, z)\sin t + \chi_2(x, y, z)\cos t + \int_0^t \Omega(x, y, z, t-\tau)\, d\tau.$$

Вычисляя $L\Phi$, будем иметь

$$L\Phi = \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \int_0^t L\Omega(x, y, z, t-\tau)\, d\tau + \left.\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \left.\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial t}\right|_{t=0}.$$

Выбрав C_1 из уравнения

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} = -\left.\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial t}\right|_{t=0},$$

которое, очевидно, разрешимо, получим для Φ окончательное выражение:

$$\Phi = \Phi_0 + D_0(x, y) + zD_1(x, y) + \chi_1(x, y, z)\sin t + \chi_2(x, y, z)\cos t,$$

где D_0 и D_1 — произвольные функции, а $\chi_1(x, y, z)$ и $\chi_2(x, y, z)$ — произвольные гармонические функции переменных x и y. При этом Φ будет решением уравнения $L\Phi = 0$.

Покажем, что соответствующим выбором этих функций мы можем удовлетворить и всем остальным уравнениям системы (47).

В самом деле, составим разности

$$\left.\begin{aligned} \psi_z^{(0)} &= \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial z\,\partial t^2} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} - v_z, \\ \psi_x^{(0)} &= \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y\,\partial t} - v_x, \\ \psi_y^{(0)} &= \frac{\partial^3\Phi_0}{\partial y\,\partial t^2} - \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial t} - v_y. \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Имеем:

$$\frac{\partial\psi_z^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial t^3} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial t}\right) - \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0.$$

Следовательно, $\psi_z^{(0)}(x, y, z)$ не зависит от t. С другой стороны, $L\psi_z = 0$, в силу (50). Следовательно,

$$\frac{\partial^2\psi_z^{(0)}}{\partial z^2} = 0 \text{ и } \psi_z^{(0)} = A_0(x, y) + zA_1(x, y). \quad (56)$$

Составим выражения

$$\frac{\partial\psi_x^{(0)}}{\partial t} - \psi_y^{(0)} \text{ и } \frac{\partial\psi_y^{(0)}}{\partial t} + \psi_x^{(0)}.$$

В силу уравнений (1), (47) и (55), получим:

$$\frac{\partial\psi_x^{(0)}}{\partial t} - \psi_y^{(0)} = \frac{\partial^4\Phi_0}{\partial x\,\partial t^3} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\,\partial t} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\psi_y^{(0)}}{\partial t} + \psi_x^{(0)} = \frac{\partial^4\Phi_0}{\partial y\,\partial t^3} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y\,\partial t} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \psi_x^{(0)}}{\partial t^2} + \psi_x^{(0)} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_y^{(0)}}{\partial t^2} + \psi_y^{(0)} = 0 \tag{57}$$

и, значит,

$$\left.\begin{aligned} \psi_x^{(0)} &= B_1(x, y, z)\cos t + B_2(x, y, z)\sin t, \\ \psi_y^{(0)} &= -B_1(x, y, z)\sin t + B_2(x, y, z)\cos t. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

С другой стороны, в силу (48) и однородной системы (1),

$$\frac{\partial \psi_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \psi_z^{(0)}}{\partial z} = 0, \tag{59}$$

а также

$$L\psi_x^{(0)} = 0, \tag{60}$$

$$L\psi_y^{(0)} = 0. \tag{61}$$

Из (60) и (61) следует, что

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y} = 0. \tag{62}$$

Уравнение (59) вместе с (56) и (58) дает:

$$A_1(x, y) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y}\right)\cos t + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\sin t = 0. \tag{63}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\left.\begin{aligned} A_1(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Мы видим, таким образом, что

$$\psi_z^{(0)} = A_0(x, y), \tag{65}$$

$$B_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad B_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{66}$$

где $u(x, y, z)$ есть гармоническая функция переменных x и y. Составим выражения для ψ_x, ψ_y, и ψ_z:

$$\left.\begin{aligned} \psi_x &= \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x\, \partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial t} - v_x = \\ &= \psi_x^{(0)} + \sin t\left(-\frac{\partial \chi_1}{\partial x} - \frac{\partial \chi_2}{\partial y}\right) + \cos t\left(\frac{\partial \chi_1}{\partial y} - \frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right), \\ \psi_y &= \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y\, \partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial t} - v_y = \\ &= \psi_y^{(0)} + \sin t\left(-\frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \chi_2}{\partial x}\right) + \cos t\left(-\frac{\partial \chi_2}{\partial y} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x}\right), \\ \psi_z &= \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z\, \partial t^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} - v_z = \psi_z^{(0)} + D_1(x, y). \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Выбирая функции D_1, χ_1, χ_2 так, чтобы удовлетворить уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &A_0(x, y) + D_1(x, y) = 0, \\ &\frac{\partial \chi_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} = B_2, \\ &\frac{\partial \chi_2}{\partial x} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y} = B_1, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

например, полагая $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = u$, получим $\psi_x = \psi_y = \psi_z = 0$. Следовательно, формулы (47) доказаны.

§ 5. Некоторые интегральные формулы типа формулы Грина

Рассмотрим две системы функций: v_x, v_y, v_z, p и w_x, w_y, w_z, q. Составим выражение:

$$Z \equiv \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y + \frac{\partial p}{\partial x}\right) w_x + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x + \frac{\partial p}{\partial y}\right) w_y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) w_z + \\ + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{d v_z}{d z}\right) q + \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} - w_y + \frac{\partial q}{\partial x}\right) v_x + \left(\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x + \frac{\partial q}{\partial y}\right) v_y + \\ + \left(\frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z}\right) v_z + \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) p.$$

Нетрудно видеть, что величина Z тождественно представляется в виде:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t}(v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z) + \frac{\partial}{\partial x}(p w_x + q v_x) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}(p w_y + q v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(p w_z + q v_z). \tag{69}$$

Интегрируя это равенство по какому-либо четырехмерному цилиндру (Ω_3, $0 \leqslant t \leqslant t_0$) с образующими, параллельными оси t, и пользуясь формулой Остроградского, получим:

$$\iiiint\limits_{\Omega_4} \left\{ \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y + \frac{\partial p}{\partial x}\right) w_x + \right. \\ + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x + \frac{\partial p}{\partial y}\right) w_y + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) w_z + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) q + \\ + \left(\frac{\partial w_x}{\partial t} - w_y + \frac{\partial q}{\partial x}\right) v_x + \left(\frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x + \frac{\partial q}{\partial y}\right) v_y + \left(\frac{\partial w_z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial z}\right) v_z + \\ \left. + \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) p \right\} d\Omega\, dt = \iiint\limits_{\Omega_3} (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \Big|_0^{t_0} d\Omega - \\ - \int\limits_0^{t_0} \iint\limits_{S_3} \{(p w_x + q v_x) \cos nx + (p w_y + q v_y) \cos ny + (p w_z + q v_z) \cos nz\} dS_3\, dt, \tag{70}$$

где через n обозначена внутренняя к поверхности S_3, ограничивающей объем Ω_3, нормаль в трехмерном пространстве.

Рассмотрим случай, когда система функций W_x, W_y, W_z, q удовлетворяет однородной системе (1). В этом случае мы получим:

$$\int_0^{t_0}\iiint_\Omega \left\{ w_x\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} - v_y + \frac{\partial p}{\partial x}\right) + w_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x + \frac{\partial p}{\partial y}\right) + w_z\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) + \right.$$
$$\left. + q\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) d\Omega\, dt = \iiint_\Omega (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\Big|_0^{t_0} d\Omega - \right.$$
$$- \int_0^{t_0}\iint_S (p w_n + q v_n)\, dS\, dt; \tag{71}$$

через v_n и w_n обозначены нормальные составляющие векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{w}$.

Мы будем далее пользоваться формулой Грина в виде (71).

Если v_x, v_y, v_z и p удовлетворяют, в свою очередь, однородной системе 1), то формула (71) переходит в формулу

$$\iiint_\Omega (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z)\Big|_0^{t_0} d\Omega = \int_0^{t_0} \left\{ \iint_S (p w_n + q v_n)\, dS \right\} dt. \tag{72}$$

Формулы (71) и (72) получены нами для ограниченной области Ω. Докажем, что если область Ω заключает бесконечно удаленную точку, но функции v_x, v_y, v_z, $\operatorname{grad} p$ и w_x, w_y, w_z и $\operatorname{grad} q$ интегрируемы с квадратом по этой области, то эти формулы сохраняют силу. Очевидно, их достаточно установить для внешности достаточно большого шара, ибо любая область может быть представлена как сумма конечной области и такой внешности. Очевидно, что формулу для сумм областей можно получить, складывая формулы для каждого слагаемого.

З а м е ч а н и е. Всякий вектор $\vec{v}$, имеющий непрерывные производные и соленоидальный, заданный вне некоторого шара Ω, может быть непрерывно продолжен на все пространство с сохранением соленоидальности и непрерывности производных.

В самом деле, всякий соленоидальный вектор $\vec{v}$ такого вида представим вне шара Ω формулой

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Продолжая $\vec{A}$ на все пространство с непрерывными производными до 2-го порядка, получим наше утверждение.

Пусть теперь вектор $\operatorname{grad} p$ интегрируем с квадратом вне области Ω. Продолжая функцию p непрерывно на все пространство, будем иметь по доказанному (см. § 2):

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} (\vec{v}, \operatorname{grad} p)\, d\Omega = 0.$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_{\infty-\Omega} (\vec{v}, \operatorname{grad} p)\, d\Omega = -\iiint\limits_{\Omega} (\vec{v} \operatorname{grad} p)\, d\Omega.$$

Но

$$\iiint\limits_{\Omega} (\vec{v} \operatorname{grad} p)\, d\Omega = -\iint\limits_{S} v_{n*} p\, dS, \tag{72*}$$

где n^* — внутренняя нормаль к Ω. Заменяя $v_{n^*} = -v_n$, где n — нормаль к области $\infty - \Omega$, получим:

$$\iiint\limits_{\infty-\Omega} (\vec{v}, \operatorname{grad} p)\, d\Omega = -\iint\limits_{S} v_n p\, dS.$$

Из этой формулы сразу вытекает справедливость (71) и (72) для внешности шара Ω, а значит, и для любой области, если вспомнить вывод этой формулы и воспользоваться соотношением (72*).

§ 6. Некоторые частные решения основного уравнения (48)

В настоящем параграфе мы укажем некоторые частные решения основного уравнения (48), при помощи которых мы сможем впоследствии построить общее решение задачи в явной форме.

Положим

$$\Phi = \rho^m r^{-m-s} \Psi\left(\frac{\rho\tau}{r}\right), \tag{73}$$

где

$$\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$
$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$
$$\tau = t - t_0.$$

Вычислим оператор $L\Phi$. Для простоты положим сначала

$$x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0.$$

Пользуясь цилиндрическими координатами, получим:

$$\Phi = \rho^m r^{-m-s} \Psi\left(\frac{\rho t}{r}\right) = \rho^m r^{-m-s} \Psi(\xi),$$

где $\xi = \frac{\rho t}{r}$,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \rho^m r^{-m-s-4} \{[(m+s)(m+s+1) z^2 - (m+s)\rho^2] \Psi(\xi) + [(2m+2s+2) z^2 - \rho^2]\, \xi \Psi'(\xi) + z^2 \xi^2 \Psi''(\xi)\},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho^m r^{-m-s-6} \{[(m+s+2)(m+s+4)\rho^2 z^2 - (m+s+2) r^2 \rho^2] \Psi''(\xi) + [(2m+2s+7)\rho^2 z^2 - \rho^2 r^2]\, \xi \Psi'''(\xi) + z^2 \rho^2 \xi^2 \Psi^{(IV)}(\xi)\},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \rho^m r^{-m-s-6} \{[(m+2)^2 r^2 (\rho^2 + z^2) - 2(m+3)(m+s+2)\rho^2 r^2 + (m+s+2)(m+s+4)\rho^4] \Psi''(\xi) + [(2m+5) z^2 r^2 - (2m+2s+7)\rho^2 z^2] \times \xi \Psi'''(\xi) + z^4 \xi^2 \Psi^{IV}(\xi)\}.$$

Таким образом,

$$L\Phi \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \rho^m r^{-m-s-4}\{[(m+s)(m+s+1)\Psi(\xi) +$$
$$+ (2m+2s+2)\xi\Psi'(\xi) + (\xi^2 + (m+2)^2)\Psi''(\xi) + (2m+5)\xi\Psi'''(\xi) +$$
$$+ \xi^2\Psi^{IV}(\xi)]\, z^2 - [(m+s)\Psi(\xi) + \xi\Psi'(\xi) +$$
$$+ (m+s+2-s^2)\Psi''(\xi) + \xi\Psi'''(\xi)]\,\rho^2\}.$$

Как мы видим, $L\Phi$ может обратиться в нуль лишь в том случае, если одновременно имеют место два равенства:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_1 \equiv \xi\Psi''' + [m-(s+1)(s-2)]\,\Psi'' + \xi\Psi' + (m+s)\Psi = 0,\\ &\Lambda_2 \equiv \xi^2\Psi^{IV} + (2m+5)\,\xi\Psi''' + [\xi^2 + (m+2)^2]\,\Psi'' +\\ &\qquad + (2m+2s+2)\,\xi\Psi' + (m+s)(m+s+1)\Psi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Непосредственное вычисление показывает, что

$$\Lambda_2 - \xi\frac{d\Lambda_1}{d\xi} - (m+s+1)\,\Lambda_1 = (s-1)^2\,[\xi\Psi''' + (m+s+2)\,\Psi''].$$

Нетрудно видеть, что второе из уравнений (74) есть следствие первого при $s=1$.

Таким образом мы получим при $s=1$ для неизвестной функции обыкновенное уравнение:

$$\Lambda_1 \equiv \xi\Psi''' + (m+2)\,\Psi'' + \xi\Psi' + (m+1)\,\Psi = 0. \tag{75}$$

Решения уравнения (75) дают нам некоторый класс решений уравнения $L\Phi = 0$.

Уравнение (75) может быть решено в конечном виде для любого m при помощи функций Ломмеля или бесселевых функций. Для нас будут представлять особый интерес некоторые частные решения этого уравнения.

При $m=0$ имеем

$$\Lambda_1 \equiv \xi\Psi''' + 2\Psi'' + \xi\Psi' + \Psi = 0.$$

Это уравнение представляется в виде

$$\Lambda_1 \equiv \xi\left[\Psi''' + \frac{1}{\xi}\Psi'' + \left(1-\frac{1}{\xi^2}\right)\Psi'\right] + \left(\Psi'' + \frac{1}{\xi}\Psi' + \Psi\right) = \xi\frac{dN}{d\xi} + N,$$

где $N = \Psi'' + \frac{1}{\xi}\Psi' + \Psi$. Следовательно, решениями этого уравнения будут решения уравнения Бесселя:

$$\Psi'' + \frac{1}{\xi}\Psi' + \Psi = 0$$

или решения уравнения:

$$\Psi'' + \frac{1}{\xi}\Psi' + \Psi = \frac{1}{\xi},$$

представляющие собой функцию Ломмеля $S_{-1,0}(\xi)$.

Таким образом, мы видим, что решением (48) будет, например, функция

$$\Phi_0 = \frac{1}{r} J_0\left(\frac{\rho t}{r}\right). \tag{76}$$

При $m = -1$ решение получится в виде

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho} \int_0^{\xi} J_0(\xi_1)\, d\xi_1. \tag{77}$$

Действительно, в этом случае уравнение (75) принимает вид

$$\xi\Psi''' + \Psi'' + \xi\Psi' = 0, \tag{78}$$

а для последнего уравнения $\Psi'(\xi) = J_0(\xi)$ служит очевидным решением.

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение

$$\int_0^{\xi} J_0(\xi_1)\, d\xi_1 = \Xi(\xi). \tag{79}$$

Функция $\Xi(\xi)$, как известно, выражается через функции Ломмеля, но для нас это сейчас не представляет интереса.

Рассмотрим случай $m = -2$. В этом случае мы получим решение задачи вида:

$$\Phi = \frac{r}{\rho^2} \xi \left[\Xi(\xi) + J_0'(\xi)\right], \tag{80}$$

в справедливости которого можно легко убедиться непосредственной подстановкой.

§ 7. Другой класс частных решений

Положим

$$\Phi = x\rho^m r^{-m-s}\Psi(\xi). \tag{81}$$

Вычислим оператор $L\Phi$:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = x\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\rho^m r^{-m-s}\Psi(\xi)\right],$$

$$\Delta\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = x\Delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\rho^m r^{-m-s}\Psi(\xi)\right] + 2\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{m+2} r^{-m-s-2}\Psi''(\xi)\right],$$

$$L\Phi = xL\left(\rho^m r^{-m-s}\Psi(\xi)\right) + x\{[(2m+4)\rho^m r^{-m-s-2} -$$
$$-(2m+2s+4)\rho^{m+2} r^{-m-s-4}]\Psi''(\xi) + 2z^2 t\rho^m r^{-m-s-5}\Psi'''(\xi)\} =$$
$$= x\rho^m r^{-m-s-4}\Big\{z^2\Big[\Big(\xi\frac{d\Lambda_1}{d\xi} + (m+s+1)\Lambda_1\Big) +$$
$$+(s-1)^2[\xi\Psi''' + (m+s+2)\Psi''] + (2m+4)\Psi'' + 2\xi\Psi'''\Big] -$$
$$-\rho^2[\Lambda_1 - 2s\Psi'']\} = x^2\rho^m r^{-m-s-4}\Big\{z^2\Big[\xi\frac{d}{d\xi}(\Lambda_1 + 2s\Psi'') +$$
$$+(m+s+1)(\Lambda_1 + 2s\Psi'') + ((s-1)^2 + 2 - 2s)\xi\Psi''' +$$
$$+((s-1)^2(m+s+2) - 2s(m+s+1) + (2m+4))\Psi''\Big] - \rho^2[\Lambda_1 + 2s\Psi'']\} =$$

$$= x^2\rho^m r^{-m-s-4}\Big\{z^2\Big[\xi\frac{d}{d\xi}(\Lambda_1+2s\Psi'')+(m+s+1)(\Lambda_1+2s\Psi'')+$$
$$+(s-1)(s-3)\,\xi\Psi'''+((m+2)[(s-1)^2-2s+2]+s(s-1)^2-2s(s-1))\,\Psi''\Big]-$$
$$-\rho^2[\Lambda_1+2s\Psi'']\Big\}=$$
$$= x^2\rho^m r^{-m-s-4}\Big\{z^2\Big[\xi\frac{d}{d\xi}(\Lambda_1+2s\Psi'')+(m+s+1)(\Lambda_1+2s\Psi'')+$$
$$+(s-1)(s-3)[\xi\Psi'''+(m+s+2)\Psi'']\Big]-\rho^2[\Lambda_1+2s\Psi'']\Big\}.$$

Мы видим, что при $s=1$ и при $s=3$ два уравнения для Ψ являются следствиями одно другого и, значит, при

$$\Lambda_1+2s\Psi=0$$

функция (81) будет удовлетворять уравнению $L\Phi=0$.

Второе решение можно было бы получить, решая совместно уравнения

$$\Lambda_1+2s\Psi''=0,$$
$$\xi\Psi'''+(m+s+2)\,\Psi''=0 \qquad (82)$$

при любом s.

Уравнения для Ψ будут иметь вид:

$$\xi\Psi'''+(m+3s+2-s^2)\,\Psi''+\xi\Psi'+(m+s)\,\Psi=0. \qquad (83)$$

Не исследуя подробно уравнений (82), рассмотрим уравнение (83) при $s=1$ и при $s=3$.

При $s=1$ (83) даст:

$$\xi\Psi'''+(m+4)\,\Psi''+\xi\Psi'+(m+1)\,\Psi=0. \qquad (84)$$

При $s=3$ из (83) получим:

$$\xi\Psi'''+(m+2)\,\Psi''+\xi\Psi'+(m+3)\,\Psi=0. \qquad (85)$$

Интегрирование этих уравнений опять сводится к функциям Ломмеля и Бесселя.

Укажем одно важное решение (85) при $m=-2$:

$$\xi\Psi'''+\xi\Psi'+\Psi=0. \qquad (86)$$

Решением этого уравнения будет функция

$$\Psi=\xi J_0'(\xi),$$

что легко проверить непосредственным дифференцированием.

Заменяя x на y, получим еще решения уравнения (48).

Таким образом,

$$\Phi=\frac{x}{\rho^2 r}\,\frac{\rho t}{r}\,J_0'\left(\frac{\rho t}{r}\right)=\frac{xt}{\rho r^2}\,J_0'\left(\frac{\rho t}{r}\right), \qquad (87)$$

$$\Phi=\frac{yt}{\rho r^2}\,J_0'\left(\frac{\rho t}{r}\right). \qquad (88)$$

При помощи построенных нами частных решений (48) мы можем приступить к построению общего решения нашей задачи.

Дифференцируя по z решение (80), получим еще одно важное решение:

$$\Phi = \frac{z}{r\rho^2}\,[\xi\Xi(\xi) + \xi J_0'(\xi)] + \frac{r}{\rho^2}\frac{d}{d\xi}\,[\xi\Xi(\xi) + \xi J_0'(\xi)]\,\frac{d\,\frac{\rho t}{r}}{dz} = \frac{zt}{\rho r^2} J_0'\left(\frac{\rho t}{r}\right). \tag{89}$$

При $m = -3$, $s = 3$ получим уравнение

$$\xi\Psi''' - \Psi'' + \xi\Psi' = 0, \tag{90}$$

решением которого, между прочим, будет функция

$$\Psi = \xi J_0(\xi) - \Xi(\xi).$$

Действительно, при этом:

$$\Psi' = \xi J_0'(\xi), \quad \Psi'' = -\xi J_0(\xi), \quad \Psi''' = -\xi J_0'(\xi) - J_0(\xi),$$

откуда и следует наше утверждение.

Пользуясь полученными решениями, мы можем построить систему функций

$$\Phi_{\text{I}}, \quad \Phi_{\text{II}}, \quad \Phi_{\text{III}}, \quad Q, \tag{91}$$

где

$$\Phi_{\text{I}} = \Phi^{11} - \Phi^{12},$$

$$\Phi_{\text{II}} = \Phi^{21} - \Phi^{22},$$

$$\Phi^{11} = \frac{x - x_0}{\rho^2 r}\,\frac{\rho(t - t_0)}{r}\,J_0'\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right),$$

$$\Phi^{12} = \frac{y - y_0}{\rho^3}\,\frac{\rho(t - t_0)}{r}\,J_0\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right) - \frac{y - y_0}{\rho^3}\,\Xi\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right),$$

$$\Phi^{21} = \frac{y - y_0}{\rho^2 r}\,\frac{\rho(t - t_0)}{r}\,J_0'\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right),$$

$$\Phi^{22} = \frac{x - x_0}{\rho^3}\,\frac{\rho(t - t_0)}{r}\,J_0\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right) - \frac{x - x_0}{\rho^3}\,\Xi\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right),$$

$$\Phi_{\text{III}} = \frac{z - z_0}{\rho^2 r}\,\frac{\rho(t - t_0)}{r}\,J_0'\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right),$$

$$Q = -\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\frac{t - t_0}{r}\right).$$

Очевидно, что каждая из этих функций удовлетворяет уравнениям

$$L\Phi = 0 \text{ и } L_0\Phi = 0, \tag{92}$$

где через L_0 обозначен оператор, получаемый из оператора L заменой переменных x, y, z, t на переменные x_0, y_0, z_0, t_0.

Непосредственное дифференцирование показывает, что функции (91) удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial t_0}-\Phi_{\mathrm{II}}&=-\frac{\partial Q}{\partial x_0},\\ \frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial t_0}+\Phi_{\mathrm{I}}&=-\frac{\partial Q}{\partial y_0},\\ \frac{\partial\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial t_0}&=-\frac{\partial Q}{\partial z_0},\end{aligned}\right\}\tag{93}$$

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial x_0}+\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial y_0}+\frac{\partial\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial z_0}=0.\tag{94}$$

§ 8. Три частных решения уравнения (1*)

Пользуясь потенциалами Φ_{I}, Φ_{II}, Φ_{III}, Q, можно построить три частных решения однородной системы (1*) при помощим формул (47). Мы получим:

$$\left.\begin{aligned}w_x^{\mathrm{I}}&=w_x^{111}+w_x^{112}-w_x^{121}-w_x^{122},\\ w_y^{\mathrm{I}}&=w_y^{111}+w_y^{112}-w_y^{121}-w_y^{122},\\ w_z^{\mathrm{I}}&=w_z^{111}+w_z^{113}-w_z^{121}-w_z^{123},\\ q^{\mathrm{I}}&=q^{111}+q^{113}-q^{121}-q^{123},\end{aligned}\right\}\tag{95}$$

где положено:

$$\begin{aligned}&w_x^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial x\partial t^2}, && w_x^{112}=\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial y\partial t}, && w_x^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial x\partial t^2}, && w_x^{122}=\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial y\partial t},\\ &w_y^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial y\partial t^2}, && w_y^{112}=-\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial x\partial t}, && w_y^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial y\partial t^2}, && w_y^{122}=-\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial x\partial t},\\ &w_z^{111}=\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial z\partial t^2}, && w_z^{113}=\frac{\partial\Phi^{11}}{\partial z}, && w_z^{121}=\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial z\partial t^2}, && w_z^{123}=\frac{\partial\Phi^{12}}{\partial z},\\ &q^{111}=-\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial t^3}, && q^{113}=-\frac{\partial\Phi^{11}}{\partial t}, && q^{121}=-\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial t^3}, && q^{123}=-\frac{\partial\Phi^{12}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left.\begin{aligned}w_x^{\mathrm{II}}&=w_x^{211}+w_x^{212}+w_x^{221}+w_x^{222},\\ w_y^{\mathrm{II}}&=w_y^{211}+w_y^{212}+w_y^{221}+w_y^{222},\\ w_z^{\mathrm{II}}&=w_z^{211}+w_z^{213}+w_z^{221}+w_z^{223},\\ q^{\mathrm{II}}&=q^{211}+q^{213}+q^{221}+q^{223},\end{aligned}\right\}\tag{96}$$

где положено:

$$\begin{aligned}&w_x^{211}=\frac{\partial^3\Phi^{21}}{\partial x\partial t^2}, && w_x^{212}=\frac{\partial^2\Phi^{21}}{\partial y\partial t}, && w_x^{221}=\frac{\partial^3\Phi^{22}}{\partial x\partial t^2}, && w_x^{222}=\frac{\partial^2\Phi^{22}}{\partial y\partial t},\\ &w_y^{211}=\frac{\partial^3\Phi^{21}}{\partial y\partial t^2}, && w_y^{212}=-\frac{\partial^2\Phi^{21}}{\partial x\partial t}, && w_y^{221}=\frac{\partial^3\Phi^{22}}{\partial y\partial t^2}, && w_y^{222}=-\frac{\partial^2\Phi^{22}}{\partial x\partial t},\\ &w_z^{211}=\frac{\partial^3\Phi^{21}}{\partial z\partial t^2}, && w_z^{213}=\frac{\partial\Phi^{21}}{\partial z}, && w_z^{221}=\frac{\partial^3\Phi^{22}}{\partial z\partial t^2}, && w_z^{223}=\frac{\partial\Phi^{22}}{\partial z},\\ &q^{211}=-\frac{\partial^3\Phi^{21}}{\partial t^3}, && q^{213}=-\frac{\partial\Phi^{21}}{\partial t}, && q^{221}=-\frac{\partial^3\Phi^{22}}{\partial t^3}, && q^{223}=-\frac{\partial\Phi^{22}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Наконец,

$$\left.\begin{aligned} w_x^{\mathrm{III}} &= w_x^{31} + w_x^{32}, \\ w_y^{\mathrm{III}} &= w_y^{31} + w_y^{32}, \\ w_z^{\mathrm{III}} &= w_z^{31} + w_z^{33}, \\ q^{\mathrm{III}} &= q^{31} + q^{33}, \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

где

$$\begin{aligned} w_x^{31} &= \frac{\partial^3\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial x\partial t^2}, & w_x^{32} &= \frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial y\partial t}, \\ w_y^{31} &= \frac{\partial^3\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial y\partial t^2}, & w_y^{32} &= -\frac{\partial^2\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial x\partial t}, \\ w_z^{31} &= \frac{\partial^3\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial z\partial t^2}, & w_z^{33} &= \frac{\partial\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial z}, \\ q^{31} &= -\frac{\partial^3\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial t^3}, & q^{33} &= -\frac{\partial\Phi_{\mathrm{III}}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Решения (95), (96) и (97) и представляют собою те решения, которые мы используем далее.

§ 9. Вычисления некоторых вспомогательных определенных интегралов

Для дальнейшего нам нужно будет знать величину некоторых определенных интегралов. Вычисление их известно, но мы для полноты изложения напомним его здесь.

Рассмотрим

$$\chi_s(t) = \int_0^t \frac{\xi^{2s-1} J_0(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}, \tag{98}$$

$$\omega_s(t) = \int_0^t \frac{\xi^{2s} J_0'(\xi)\, d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}. \tag{99}$$

Покажем, как одни из этих интегралов выражаются через другие. Прежде всего заменим переменные, считая $\xi = t\zeta$:

$$\chi_s(t) = t^{2s-1}\int_0^1 \frac{\zeta^{2s-1} J_0(\zeta t)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \tag{100}$$

$$\omega_s(t) = t^{2s}\int_0^1 \frac{\xi^{2s} J_0'(\zeta t)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{101}$$

Дифференцируя первое из уравнений по t, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\chi_s(t)}{t^{2s-1}}\right) = \frac{\omega_s(t)}{t^{2s}}. \tag{102}$$

Кроме того,

$$\frac{\omega_s(t)}{t^{2s-1}} = \int_0^1 \frac{\zeta^{2s-1}\,[\zeta t J_0'(\zeta t)]\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \tag{103}$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{d}{d\xi}[\xi J_0'(\xi)] = \xi J_0''(\xi) + J_0'(\xi) = -\xi J_0(\xi)$$

и дифференцируя обе части (103) по t, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_s(t)}{t^{2s-1}}\right) = -\int_0^1 \frac{\zeta^{2s-1}\,\zeta\cdot\zeta t J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} =$$

$$= -t\int_0^1 \frac{\zeta^{2s+1} J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{1}{t^{2s}}\int_0^1 \frac{(\zeta t)^{2s+1} J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{\chi_{s+1}(t)}{t^{2s}},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_s}{t^{2s-1}}\right) = -\frac{\chi_{s+1}}{t^{2s}}. \tag{104}$$

Таким образом, вычисление всех χ_s и ω_s сводится к вычислению какого-либо одного из них. Вычислим интеграл

$$\chi_1(t) = \int_0^t \frac{\xi J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}. \tag{105}$$

С этой целью заметим, что $\chi_1(t)$ можно представить в виде интеграла в плоскости комплексного переменного ξ:

$$\chi_1(t) = \frac{1}{2}\int_C \frac{\xi J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}},$$

где контур C есть разомкнутый контур, начало и конец которого лежат в точке $\xi = 0$ на двух листах римановой поверхности функции $\sqrt{t^2-\xi^2}$, обходящий точку $\xi = t$.

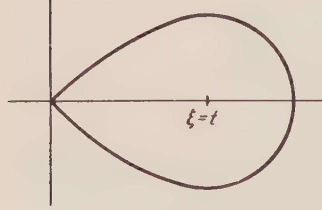


Рис. 1

Вычислим

$$\frac{d^2\chi_1}{dt^2} = \frac{1}{2}\int_C \xi J_0(\xi)\,\frac{\partial^2 \dfrac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}}{\partial t^2}\,d\xi.$$

Функция $\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}}{\partial \xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}}{\partial \xi}$$

или

$$\xi\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\ .$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial^2\chi_1(t)}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\int\limits_C J_0(\xi)\frac{d}{d\xi}\xi\frac{d}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}J_0(\xi)\,\xi\,\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\right)\Big|_C-\frac{1}{2}\int\limits_C\xi\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\right)J'_0(\xi)\,d\xi=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_C\xi J'_0(\xi)\,d\,\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}=-\frac{1}{2}\,\xi J'_0(\xi)\,\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\Big|_C+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_C\frac{1}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\,d\xi J'_0(\xi)=-\frac{1}{2}\int\limits_C\frac{\xi J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}}=-\chi_1(t).$$

Следовательно,

$$\frac{d^2\chi_1(t)}{dt^2}+\chi_1(t)=0.$$

Таким образом,

$$\chi_1(t)=a\cos t+b\sin t. \tag{106}$$

При $t=0$ $\chi_1(t)$ обращается в нуль. Следовательно,

$$\chi_1(t)=b\sin t.$$

Для определения постоянной b заметим, что

$$\frac{\chi_1(t)}{t}=\int\limits_0^1\frac{\zeta J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ .$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\chi_1(t)}{t}=\int\limits_0^1\frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=-\sqrt{1-\zeta^2}\Big|_0^1=1. \tag{107}$$

Таким образом,

$$\chi_1(t)=\sin t. \tag{108}$$

Пользуясь (102) и (104), выпишем ряд равенств:

$$\chi_1(t) = \int_0^t \frac{\xi J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \sin t,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{\xi^2 J_0'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \omega_1(t) = t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = -\sin t + t\cos t,\\
&\int_0^t \frac{\xi^3 J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \chi_2(t) = -t^2\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega_1(t)}{t}\right) = -t^2\frac{d}{dt}\left[-\frac{\sin t}{t}+\cos t\right] =\\
&\qquad = t^2\left[\sin t\left(1-\frac{1}{t^2}\right)+\frac{\cos t}{t}\right] = \sin t\,(t^2-1) + t\cos t,\\
&\int_0^t \frac{\xi^4 J_0'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \omega_2(t) = t^4\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{X}_2(t)}{t^3}\right) = (3-2t^2)\sin t + (t^3-3t)\cos t,\\
&\int_0^t \frac{\xi^5 J_0(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \chi_3(t) = (t^4-5t^2+9)\sin t + (2t^3-9t)\cos t.
\end{aligned}\right\} \quad (109)$$

Далее,

$$\int_0^t \frac{J_0'(\xi)\,d\xi}{\sqrt{t^2-\xi^2}} = \omega_0(t) = \frac{\cos t - 1}{t}.$$

Очевидно,

$$\frac{d(t\omega_0)}{dt} = -\chi_1 = -\sin t, \qquad t\omega_0 = \cos t - 1.$$

Удобно выписать еще ряд интегралов, вытекающих из написанных:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{J_0'(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\cos t-1}{t}, \quad \int_0^1 \frac{\zeta J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\sin t}{t},\\
&\int_0^1 \frac{\zeta^2 J_0'(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = -\frac{\sin t}{t^2} + \frac{\cos t}{t},\\
&\int_0^1 \frac{\zeta^3 J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)\sin t + \frac{1}{t^2}\cos t,\\
&\int_0^1 \frac{\zeta^4 J_0'(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \left(-\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^4}\right)\sin t + \left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^3}\right)\cos t,\\
&\int_0^1 \frac{\zeta^5 J_0(\zeta t)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \left(\frac{1}{t}-\frac{5}{t^3}+\frac{9}{t^5}\right)\sin t + \left(\frac{2}{t^2}-\frac{9}{t^4}\right)\cos t.
\end{aligned}\right\} \quad (110)$$

Этими формулами мы будем пользоваться в дальнейшем.

§ 10. Вычисление v_x

Переходим к решению нашей задачи. Будем рассматривать систему уравнений (1^*), где $\vec{F}$ — произвольный вектор внешних сил, который мы предположим интегрируемым с квадратом по всему пространству. Разобьем

вектор $\vec{F}$ на сумму двух слагаемых: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, где $\vec{F}_1$ — потенциальный вектор, а $\vec{F}_2$ — соленоидальный, причем каждый из них интегрируем с квадратом. Пусть $\vec{F}_1 = \operatorname{grad}\Psi$. Положим $p' = p - \Psi$. Тогда система (1^*) перепишется в виде:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \times \mathbf{k}) - \operatorname{grad} p' - \vec{F}_2,$$

откуда видно, что, не уменьшая общности, мы можем считать F в формуле (1^*) соленоидальным вектором.

Вырежем из нашего пространства цилиндр:

$$|z - z_0| \leqslant h, \quad \rho \leqslant \eta, \tag{111}$$

и применим формулу (71) к объему $\Omega_{h,\eta}$, полученному таким образом. Пусть $\vec{v}$ и p будут неизвестные нам функции, удовлетворяющие (1^*), а $\vec{w}$ и q пусть будут $\vec{w}^{\mathrm{I}}$ и q^{I}. Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{I}})\Big|_{t=t_0} d\Omega - \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{I}})\Big|_{t=0} d\Omega -$$

$$- \int\limits_0^{t_0} \Big[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (pw_n^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_n)\, dS\Big|\, dt = \int\limits_0^{t_0} \Big[\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} [(\vec{w}^{\mathrm{I}} \vec{F}) + q^{\mathrm{I}} g]\, d\Omega\Big|\, dt. \tag{112}$$

Перейдем к пределу при $\eta \to 0$ и вычислим

$$\lim_{\eta \to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{I}})\Big|_{t=t_0} d\Omega$$

и

$$\lim_{\eta \to 0} \int\limits_0^{t_0} \Big[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (pw_n^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_n)\, dS\Big]\, dt.$$

Заметим, прежде всего, что при $t = t_0$ компоненты вектора $\vec{w}^{\mathrm{I}}$ принимают значения

$$w_x^{\mathrm{I}} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad w_y^{\mathrm{I}} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}, \quad w_z^{\mathrm{I}} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}. \tag{113}$$

Действительно, при $t = t_0$ имеем:

$$\frac{\partial^2 \Phi^{11}}{\partial t^2} = -\frac{x - x_0}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 \Phi^{12}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{11}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^{12}}{\partial t} = 0,$$

откуда, пользуясь (95) и (96), получим наше утверждение. По формуле (113) получим:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w})\Big|_{t=t_0} d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \Bigg(\vec{v}, \operatorname{grad} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\Bigg)\, d\Omega -$$

$$- \iint\limits_{S_{h,\eta}} v_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, dS. \tag{114}$$

где n — направление внутренней по отношению к $\Omega_{h,\eta}$ нормали к поверхности $S_{h,\eta}$. Последний интеграл переписывается так:

$$\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS = -\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_0^{2\pi}\left(v_x \frac{x-x_0}{\rho} + v_y \frac{y-y_0}{\rho}\right)\frac{x-x_0}{r^3}\eta\Big|_{\rho=\eta} dz\,d\varphi +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{z=z_0+h}\frac{x-x_0}{r^3}\rho\,d\rho\,d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{z=z_0-h}\frac{x-x_0}{r^3}\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Два последних слагаемых в этой формуле, очевидно, имеют пределом нуль, так как каждое из них не превосходит

$$\max|v_z|\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta}\frac{x-x_0}{r^3}\rho\,d\rho\,d\varphi = \max|v_z|\,\omega',$$

где ω' — телесный угол, под которым видно дно весьма узкого цилиндра из точки x_0, y_0, z_0 (ω' — сколь угодно мало вместе с обоими интегралами).

Таким образом,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS =$$

$$= -\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_0^{2\pi}\left(v_x\frac{(x-x_0)^2}{r^3} + v_y\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3}\right)dz\,d\varphi.$$

Можно убедиться в том, что

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_0^{2\pi} v_y\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3}dz\,d\varphi = 0.$$

Действительно,

$$\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_0^{2\pi} v_y\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0}\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3}dz\,d\varphi = 0,$$

в силу нечетности функции

$$\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3}.$$

В то же время

$$\lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_0^{2\pi}\left(v_y - v_y\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0}\right)\frac{(y-y_0)(x-x_0)}{r^3}dz\,d\varphi = 0,$$

так как подинтегральная функция

$$\frac{\eta^2\sin\varphi\cos\varphi}{[\eta^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

стремится к нулю всюду, кроме окрестности значения $z = z_0$, а интеграл по этой окрестности не превосходит

$$\max\left| v_y - v_y \right|_{x_0,\, y_0,\, z_0} \left| 2\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{\eta^2 + (z - z_0)^2}} = 2\pi \max \right| v_y - v_y^{(0)} |,$$

и, следовательно, тоже сколь угодно мал.

Таким же точно образом убеждаемся в том, что

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-h}^{+h} \int\limits_{0}^{2\pi} v_x \frac{(x - x_0)^2}{r^3} dz\, d\varphi = v_x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0) \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-h}^{+h} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{(x - x_0)^2}{r^3} dz\, d\varphi =$$

$$= v_x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0)\, \eta^2 \int\limits_{-h}^{+h} \frac{dz}{\left(\sqrt{(z - z_0)^2 + \eta^2}\right)^2} \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= v_x(x_0, y_0, z_0, t_0)\, 2\pi \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{0}^{\frac{h}{\eta}} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{\zeta^2 + 1}\right)^3} = 2\pi v_x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0) \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{1 + \zeta^2}\right)^3},$$

где положено: $z - z_0 = \eta\zeta$. Имеем:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\zeta}{\left(\sqrt{1 + \zeta^2}\right)^3} = \int\limits_{0}^{\infty} d\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}}\right) = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \Bigg|_0^{\infty} = 1.$$

Таким образом, окончательно:

$$\lim_{\eta\to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\,\eta}} (\vec{v},\ \vec{w}) \Bigg|_{t=t_0} d\Omega = 2\pi v_x(x_0,\ y_0,\ z_0,\ t_0). \tag{115}$$

Заметим, что в нашем процессе предельного перехода далеко не безразлично то, что мы вырезали именно цилиндр и переходим к пределу, устремляя к нулю его радиус. При других формах малой поверхности или при другом способе предельного перехода результат мог бы оказаться совершенно иным.

§ 11. Продолжение вычисления v_x и v_y

Подсчитаем предел

$$\lim_{\eta\to 0} \int\limits_{0}^{t_0} \left[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (p w_n^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{I}} v_n)\, dS \right] dt.$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} \iint\limits_{S_{h,\eta}} p w_n^{ijk}\, dS = K^{ijk}, \qquad \iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_x \cos nx\, dS = L_x^{ijk}, \\ \iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_y \cos ny\, dS = L_y^{ijk}, \qquad \iint\limits_{S_{h,\eta}} q^{ijk} v_z \cos nz\, dS = L_z^{ijk}. \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Тогда, если обозначить

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\eta\to0} K^{ijk} &= k^{ijk}, \quad \lim_{\eta\to0} L_y^{ijk} = l_y^{ijk}, \\ \lim_{\eta\to0} L_x^{ijk} &= l_x^{ijk}, \quad \lim_{\eta\to0} L_z^{ijk} = l_z^{ijk}, \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

мы получим из (95):

$$\lim_{\eta\to0}\int_0^{t_0}\Big[\iint_{S_{h,\eta}}(pw_n^1 + q^1 v_n)\,dS\Big]dt =$$

$$= \int_0^{t_0}[(l_x^{111} + l_x^{113} - l_x^{121} - l_x^{123}) + (l_y^{111} + l_y^{113} - l_y^{121} - l_y^{123}) +$$

$$+ (l_z^{111} + l_z^{113} - l_z^{121} - l_z^{123})]\,dt + \int_0^{t_0}(k^{111} + k^{112} - k^{121} - k^{123})\,dt. \tag{118}$$

Нам нужно теперь вычислить величины k^{ijk}, l_x^{ijk}, l_y^{ijk}, l_z^{ijk}. Начнем с величин l^{ijk}. Заметим прежде всего, что

$$\lim_{\eta\to0} L_x^{ijk} = \lim_{\eta\to0}\iint_{S_{h,\eta}} v_x\big|_{x_0,y_0,z_0} q^{ijk}\cos nx\,dS$$

и также

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\eta\to0} L_y^{ijk} &= \lim_{\eta\to0}\iint_{S_{h,\eta}} v_y\big|_{x_0,y_0,z_0} q^{ijk}\cos ny\,dS, \\ \lim_{\eta\to0} L_z^{ijk} &= \lim_{\eta\to0}\iint_{S_{h,\eta}} v_z\big|_{x_0,y_0,z_0} q^{ijk}\cos nz\,dS. \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

В самом деле, например:

$$\lim_{\eta\to0}\iint_{S_{h,\eta}}\left(v_x - v_x\big|_{x_0,y_0,z_0}\right) q^{ijk}\rho\,dz\,d\varphi = 0,$$

ибо везде, кроме окрестности точки $z = z_0$, подинтегральная функция $q^{ijk}\rho$ стремится к нулю, а в окрестности этой точки интеграл сколь угодно мал, в силу малости величины $v_x - v_x\big|_{x_0,y_0,z_0}$.

Заметив это и принимая во внимание, что величины q^{111} и q^{113} содержат множителем $x - x_0$, а величины q^{121} и q^{123} содержат множителем $y - y_0$, причем оставшиеся множители не зависят от угла φ в цилиндрических координатах, мы видим, что среди интегралов l^{ijk} отличными от нуля будут только интегралы l_x^{111}, l_x^{113}, l_y^{121}, l_y^{123} и что

$$l_x^{121} = l_z^{121} = l_x^{123} = l_z^{123} = l_y^{111} = l_y^{113} = l_z^{111} = l_z^{113} = 0. \tag{120}$$

Очевидно, мы имеем:

$$l_y^{123} = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{\eta\to0}\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi^{12}}{\partial t}\eta\cos ny\,dz\,d\varphi = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\,a_1(\tau),$$

$$l_y^{121} = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{\eta\to0}\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial t^3}\eta\cos ny\,dz\,d\varphi = -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\,a_2(\tau),$$

$$l_x^{113} = -v_x(x_0, y_0, z_0, t) \lim_{\eta\to 0} \int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{11}}{\partial t} \eta \cos nx dz d\varphi = -v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, a_3(\tau),$$

$$l_x^{111} = -v_x(x_0, y_0, z_0, t) \lim_{\eta\to 0} \int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 \Phi^{11}}{\partial t^3} \eta \cos nx dz d\varphi = -v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, a_4(\tau).$$

где $\tau = t - t_0$. Непосредственно очевидно, что $a_2(\tau) = \ddot{a}_1(\tau)$ и, кроме того, $a_4(\tau) = \ddot{a}_3(\tau)$.

Дифференцируя переменное $a_1(\tau)$ по τ один раз и заменяя переменные x и y, отчего величина этого интеграла не изменится, получим:

$$\left.\begin{aligned} a_3(\tau) &= a_1'(\tau), \\ a_2(\tau) &= \ddot{a}_1(\tau), \\ a_4(\tau) &= a_2'(\tau) = a_1'''(\tau). \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

Таким образом, необходимо вычислить только

$$a_1(\tau) = \lim_{\eta\to 0} \int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi^{12}}{\partial t} \eta \cos ny dz d\varphi$$

$$= \lim_{\eta\to 0} \int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi} \frac{(y-y_0)^2}{\rho^2 r} \frac{\rho\,(t-t_0)}{r} J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) dz d\varphi. \tag{122}$$

Заменяя в этом последнем интеграле переменные интегрирования и полагая $\frac{\rho}{r} = \zeta$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta^2 = \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2}, \quad \frac{z^2}{\rho^2} = \frac{1}{\zeta^2} - 1, \quad \frac{dz}{\rho} = \frac{d\zeta}{\zeta^2 \sqrt{1-\zeta^2}}, \\ &a_1(\tau) = 2\pi\tau \int_0^1 \frac{J_0'(\zeta\tau)}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

и, на основании (110),

$$a_1(\tau) = 2\pi(\cos\tau - 1). \tag{124}$$

Мы будем иметь отсюда:

$$\left.\begin{aligned} l_y^{123} &= -v_y(x_0, y_0, z_0, t)\, 2\pi(\cos\tau - 1), \\ l_y^{121} &= \quad v_y(x_0, y_0, z_0, t)\, 2\pi \cos\tau, \\ l_x^{113} &= \quad v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, 2\pi \sin\tau, \\ l_x^{111} &= -v_x(x_0, y_0, z_0, t)\, 2\pi \sin\tau, \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

$$l_x^{111} + l_x^{113} - l_y^{121} - l_y^{123} = -2\pi v_y(x_0, y_0, z_0, t). \tag{126}$$

Вычислим теперь интегралы k^{ijk}. С этой целью перепишем их в несколько преобразованном виде. Положим

$$K^{ijk} = \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[p_{x_0, y_0, z_0, t} + (x-x_0)\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} + (y-y_0)\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} + \right.$$
$$\left. + (z-z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} \right] w_n^{ijk}\, dS + \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[(p-p_0) - \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_0 (x-x_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_0 (y-y_0) - \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_0 (z-z_0) \right] w_n^{ijk}\, dS. \tag{127}$$

Докажем, что второе слагаемое этой формулы при $\eta \to 0$ будет иметь пределом нуль.

В самом деле, в окрестности точки x_0, y_0, z_0 подинтегральная функция не превосходит $r\delta(\eta)$, где $\delta(\eta)$ стремится к нулю при $\eta \to 0$. С другой стороны, $(w_n^{ijk}\rho)$ стремится к нулю всюду вне этой окрестности, не превосходя нигде величины $\frac{A}{r}$.

Следовательно, этот интеграл по окрестности x_0, y_0, z_0 не превосходит

$$2\pi \int \delta(\eta)\frac{dz}{r} = 4\pi\delta(\eta),$$

а по остальной части также сколь угодно мал. Таким образом, остается подсчитать первое из слагаемых (127).

Нетрудно убедиться в том, что

$$\iint\limits_{S_{h,\eta}} p_{x_0, y_0, z_0, t}\, w_n^{ijk} dS = p_{x_0, y_0, z_0, t} \iint\limits_{S_{h,\eta}} w_n^{ijk} dS = 0. \tag{128}$$

Это следует из того, что все w_n^{ijk} представляют собой нечетные функции от одной из переменных $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, имея суммарную нечетную степень по всем этим переменным вместе.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} K_x^{ijk} &= \iint\limits_{S_{h,\eta}} (x-x_0)\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_0 w_n^{ijk}\, dS, \\ K_y^{ijk} &= \iint\limits_{S_{h,\eta}} (y-y_0)\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_0 w_n^{ijk}\, dS, \\ K_z^{ijk} &= \iint\limits_{S_{h,\eta}} (z-z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_0 w_n^{ijk}\, dS. \end{aligned} \right\} \tag{129}$$

Пусть попрежнему

$$\lim_{\eta\to 0} K_x^{ijk} = k_x^{ijk}, \quad \lim_{\eta\to 0} K_y^{ijk} = k_y^{ijk}, \quad \lim_{\eta\to 0} K_z^{ijk} = k_z^{ijk}.$$

Мы будем иметь:

$$k_x^{ijk} = \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} \cdot b_x^{ijk}, \quad k_y^{ijk} = \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} \cdot b_y^{ijk}, \quad k_z^{ijk} = \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t} \cdot b_z^{ijk},$$

где

$$b_x^{ijk} = \lim_{\eta\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} (x - x_0)\, w_n^{ijk}\, dS,$$

$$b_y^{ijk} = \lim_{\eta\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} (y - y_0)\, w_n^{ijk} dS, \quad b_z^{ijk} = \lim_{\eta\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} (z - z_0)\, w_n^{ijk}\, dS.$$

На площадках $z = \pm h$ поверхности цилиндра $S_{h,\eta}$ интегралы от w_z^{ijk} в пределе обращаются в нуль.

Мы должны, следовательно, подсчитать интегралы

$$\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi} (x - x_0)\left[\frac{x - x_0}{\rho}\, w_x^{ijk} + \frac{y - y_0}{\rho}\, w_y^{ijk}\right]\rho\, dz\, d\varphi.$$

Имеем:

$$b_x^{111} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(x - x_0)^2\,\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial x\,\partial t^2} + (y - y_0)(x - x_0)\,\frac{\partial^3\Phi^{11}}{\partial y\,\partial t^2}\right] dz\, d\varphi,$$

$$b_x^{112} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(x - x_0)^2\,\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial y\,\partial t} - (y - y_0)(x - x_0)\,\frac{\partial^2\Phi^{11}}{\partial x\,\partial t}\right] dz\, d\varphi,$$

$$b_x^{121} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(x - x_0)^2\,\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial x\,\partial t^2} + (y - y_0)(x - x_0)\,\frac{\partial^3\Phi^{12}}{\partial y\,\partial t^2}\right] dz\, d\varphi,$$

$$b_x^{122} = \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{-h}^{+h}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[(x - x_0)^2\,\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial y\,\partial t} - (y - y_0)(x - x_0)\,\frac{\partial^2\Phi^{12}}{\partial x\,\partial t}\right] dz\, d\varphi,$$

откуда

$$b_x^{111} = \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{3(x - x_0)^2\rho^2}{r^5} - \frac{(x - x_0)^2}{r^3}\right] J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) dz\, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x - x_0)^2 (z - z_0)^2}{r^5}\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)^2 J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) dz\, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{r^5}\left[4\rho^2 (x - x_0)^2 - 2r^2 (x - x_0)^2\right]\frac{\rho\tau}{r}\, J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) dz\, d\varphi.$$

Применяя прежнее преобразование, получим:

$$b_x^{111} = 2\pi\left[\int\limits_{0}^{1}\frac{-\zeta + 3\zeta^3}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\, J_0(\zeta\tau)\, d\zeta + \tau^2\int\limits_{0}^{1}\frac{\zeta^3 - \zeta^5}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\, J_0(\zeta\tau)\, d\zeta + \right.$$

$$\left. + \tau\int\limits_{0}^{1}\frac{-2\zeta^2 + 4\zeta^4}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\, J_0'(\zeta\tau)\, d\zeta\right]$$

и, на основании (110),

$$b_x^{111} = 2\pi\cos\tau. \qquad (130)$$

Далее, $b_x^{112}=0$, так как под знаком интеграла стоит нечетная функция от $y-y_0$. Точно так же $b_x^{121}=0$. Подсчитаем b_x^{122}:

$$b_x^{122}=\lim_{\eta\to 0}\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{+h}\frac{(x-x_0)^2}{r\rho^2}\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)dz\,d\varphi=$$

$$=\tau\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x_0)^2}{\rho r^2}J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)dz\,d\varphi=2\pi\tau\int_0^1\frac{J_0'(\zeta\tau)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=2\pi(\cos\tau-1). \qquad (131)$$

Нетрудно видеть, что b_x^{113} и b_x^{123} обращаются в нуль в силу того, что под интегралом у них будет стоять чистый нуль. Таким образом,

$$k_x^{111}+k_x^{112}-k_x^{121}-k_x^{122}=2\pi\frac{\partial p}{\partial x}\bigg|_{x_0,\,y_0,\,z_0,\,t} \qquad (132)$$

Все интегралы k_z^{ijk} также равны нулю. Это следует из того, что при вычислении соответствующего b_z^{ijk} под интегралом окажется нечетная функция от $(z-z_0)$.

В интегралах b_y^{111} и b_y^{122} под интегралом оказывается нечетная функция от $y-y_0$ и поэтому эти интегралы также обращаются в нуль.

Остается подсчитать интегралы b_y^{112} и b_y^{121}. Для b_y^{112} получим

$$b_y^{112}=\lim_{\eta\to 0}\int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi}[(x-x_0)(y-y_0)w_x^{112}+(y-y_0)^2w_y^{112}]\,dz\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{3(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{\rho r^4}-\frac{[3(x-x_0)^2-r^2](y-y_0)^2}{\rho r^4}\right]\frac{\rho\tau}{r}J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)dz\,d\varphi=$$

$$=-2\pi\tau\int_0^1\frac{\zeta J_0(\zeta\tau)}{\sqrt{1-\zeta^2}}=2\pi\sin\tau. \qquad (133)$$

Далее,

$$b_y^{121}=\lim_{\eta\to 0}\int_{-h}^{+h}\int_0^{2\pi}[(x-x_0)(y-y_0)w_x^{121}+(y-y_0)\,w_y^{121}]\,dz\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{3(x-x_0)^2(y-y_0)^2}{\rho r^4}+\frac{[3(y-y_0)^2-r^2](y-y_0)^2}{\rho r^4}\right]\frac{\rho\tau}{r}J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{(z-z_0)^2(y-y_0)^2}{\rho r^4}\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)^2J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)\right\}dz\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left[\frac{3\rho(y-y_0)^2}{r^4}-\frac{(y-y_0)^2}{\rho r^2}\right]\frac{\rho\tau}{r}J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{(z-z_0)^2(y-y_0)^2}{\rho r^4}\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)^2J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)\right\}dz\,d\varphi=$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}\tau\left(\frac{3\rho^4}{r^5}-\frac{\rho^2}{r^3}\right)J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)dz\,d\varphi-2\pi\int_0^{\infty}\tau^2\left(\frac{\rho^3}{r^4}-\frac{\rho^5}{r^6}\right)J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)dz\,d\varphi=$$

$$=2\pi\left\{\tau\int_0^1\frac{3\zeta^3-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}J_0(\zeta\tau)\,d\zeta+\tau^2\int_0^1\frac{\zeta^4-\zeta^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}J_0'(\zeta\tau)\,d\zeta\right\},$$

или, на основании (110),

$$b_y^{121} = -2\pi \sin \tau, \tag{134}$$

т. е.

$$k_y^{112} - k_y^{121} = 0. \tag{135}$$

Соединяя все сказанное, будем иметь:

$$k^{111} + k^{112} - k^{121} - k^{123} = 2\pi \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0, z_0, t}$$

Возвращаясь к формуле (112) и обозначая

$$\lim_{\eta \to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} F\,d\Omega = \text{Гл. зн. ц.} \iiint\limits_{\Omega} F\,d\Omega,$$

получим:

$$2\pi v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) - 2\pi \int\limits_0^{t_0} \left[-v_y + \frac{\partial p}{\partial x}\right]_{x_0, y_0, z_0, t} dt =$$

$$= \text{Гл. зн. ц.} \iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{I}})\big|_{t=0} d\Omega + \int\limits_0^{t_0} \text{Гл. зн. ц.} \iiint\limits_{\Omega} \left[(\vec{w}^{\mathrm{I}} \vec{F}) + q^{\mathrm{I}} g\right] d\Omega\, dt. \tag{136}$$

Воспользуемся первым из уравнений системы. Мы видим, что

$$v_y - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial t} - F_x.$$

Поставляя это выражение в (136), получим после несложных преобразований:

$$v_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_x(x_0, y_0, z_0, 0) + \text{Гл. зн. ц.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{I}})\Big|_{t=0} d\Omega +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} \left\{ \frac{1}{2} F_x \Big|_{x_0, y_0, z_0, t} + \frac{1}{4\pi} \text{Гл. зн. ц.} \iiint\limits_{\Omega} \left[(\vec{w}^{\mathrm{I}} \vec{F}) + q^{\mathrm{I}} g\right] d\Omega \right\} dt. \tag{137}$$

Для того чтобы вычислить значение $v_y(x_0, y_0, z_0, t_0)$, мы должны применить те же рассуждения к решению $\vec{w}^{\mathrm{II}}$. Легко заметить, что тот же результат можно получить из (137), заменив y на $-y$ и v_y — на $-v_y$. Меняя при этом ролями переменные x и y, мы получим нужный результат. Таким образом, окончательно имеем:

$$v_y(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{2} v_y(x_0, y_0, z_0, 0) + \text{Гл. зн. ц.} \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}, \vec{w}^{\mathrm{II}})\, d\Omega$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} \left\{ \frac{1}{2} F_y + \frac{1}{4\pi} \text{Гл. зн. ц.} \iiint\limits_{\Omega} [(\vec{w}^{\mathrm{II}}, \vec{F}) + q^{\mathrm{II}} g]\, d\Omega \right\} dt. \tag{138}$$

§ 12. Вычисление v_z

Переходим к вычислению v_z. С этой целью применим опять формулу (71) к неизвестному решению и функции $\vec{w}^{III}$ в той же области $\Omega_{h,\eta}$. Мы получим:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{III})\Big|_{t=t_0} d\Omega - \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{III})\Big|_{t=0} d\Omega - \int\limits_0^{t_0} \Big[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (pw_n^{III} + q^{III}v_n)\, dS\Big] dt =$$
$$= \int\limits_0^{t_0} \Big\{\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} [(\vec{w}^{III}\vec{F}) + q^{III}g]\, d\Omega\Big\} dt. \tag{139}$$

Перейдем в этой формуле к пределу при $h \to 0$ и вычислим

$$\lim_{h\to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{III})\Big|_{t=t_0} d\Omega \tag{140}$$

и

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_0^{t_0} \Big[\iint\limits_{S_{h,\eta}} (pw_n^{III} + q^{III}v_n)\, dS\Big] dt. \tag{141}$$

Заметим, что при $t = t_0$ компоненты вектора $\vec{w}^{III}$ принимают значения:

$$w_x^{III} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial z}, \quad w_y^{III} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z}, \quad w_z^{III} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \tag{142}$$

По формуле (142), получим:

$$\iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} (\vec{v}, \vec{w}^{III})\Big|_{t=t_0} d\Omega = \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} \left(\vec{v}, \operatorname{grad} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\Omega = -\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dS,$$

где n — направление внутренней по отношению к $\Omega_{h,\eta}$ нормали к поверхности $S_{h,\eta}$. Последний интеграл переписывается так:

$$\iint\limits_{S_{h,\eta}} v_n \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, dS = -\int\limits_{-h}^{h}\int\limits_0^{2\pi} \left(v_x \frac{x - x_0}{r} + v_y \frac{y - y_0}{r}\right) \frac{z - z_0}{r^3}\, \eta\, dz\, d\varphi -$$
$$- \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{z=z_0+h} \frac{h}{r^3} \rho\, d\rho\, d\varphi - \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{z=z_0-h} \frac{h}{r^3} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Первое слагаемое в этой формуле имеет своим пределом нуль, так как при $h \to 0$ подинтегральная функция ограничена, а область интегрирования уничтожается. Второе и третье слагаемые представляются в виде:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{x_0,\, y_0,\, z_0,\, t} \frac{h}{r^3} \rho\, d\rho\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\eta} v_z\Big|_{x_0,\, y_0,\, z_0,\, t} \frac{h}{r^3} \rho\, d\rho\, d\varphi +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta}\left(v_z\Big|_{\substack{x_0,\,y_0,\\ z_0+h\\ t}} - v_z\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0,\,t}\right)\frac{h}{r^3}\rho\,d\rho\,d\varphi +$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta}\left(v_z\Big|_{\substack{x_0,\,y_0,\\ z_0-h\\ t}} - v_z\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0,\,t}\right)\frac{h}{r^3}\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Подинтегральная функция в двух последних интегралах сколь угодно мала в силу непрерывности функции v_z. Два первых интеграла представляют собой произведение

$$2v_z(x_0, y_0, z_0, t_0)\,\omega,$$

где ω — телесный угол, под которым видны верхнее и нижнее основания цилиндра из начала координат. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{h\to 0}\iint_{S_{h,\eta}} v_n\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dS = -4\pi v_z(x_0, y_0, z_0, t_0). \tag{143}$$

Мы видим, что предел оказался в этом случае в два раза больше, чем в случае, когда мы переходим к пределу по η.

Вычислим предел интеграла (141), воспользовавшись при этом прежними обозначениями. Как и раньше, имеем:

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{t_0}\left[\iint_{S_{h,\eta}}(pw_n^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{III}}v_n)\,dS\right]dt = \int_0^{t_0}(l_z^{31} + l_z^{33} + k^{31} + k^{33})\,dt, \tag{144}$$

где опять

$$l_z^{3j} = \lim_{h\to 0}\iint_{S_{h,\eta}} q^{3j}v_z\cos nz\,dS,$$

$$k_z^{3j} = \lim_{h\to 0}\iint_{S_{h,\eta}} pw_n^{3j}\cos nz\,dS.$$

По вполне понятным соображениям интегралы l_x^{ij} и l_y^{ij} имеют пределом нуль: на верхней и нижней плоскости оснований v_x и v_y не участвуют, а интегралы по боковым поверхностям стремятся к нулю. Таким образом, нам нужно подсчитать l^{31}, l^{32}, k^{31} и k^{33}.

Для l^{33} имеем:

$$l^{33} = \lim_{h\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\eta}\left[v_z\Big|_{z_0+h} + v_z\Big|_{z_0-h}\right]\frac{\partial\Phi^{\mathrm{III}}}{\partial t}\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= -4\pi\lim_{h\to 0}\int_0^{\eta}v_z\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0,\,t}\left[\frac{|z-z_0|}{\rho r^2}\,\frac{\rho(t-t_0)}{r}J_0\left(\frac{\rho(t-t_0)}{r}\right)\right]\rho\,d\rho =$$

$$= -4\pi v_z\Big|_{x_0,\,y_0,\,z_0,\,t}h\tau\int_0^{\infty}\frac{\rho}{r^3}J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)d\rho.$$

Совершим в этом последнем интеграле замену переменных, полагая $\frac{\rho}{r} = \zeta$:

$$\zeta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}, \quad \rho^2 = \frac{h^2\zeta^2}{1 - \zeta^2}, \quad \rho = \frac{h\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad r = \frac{h}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

$$\rho\, d\rho = \frac{h^2\zeta\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}},$$

При этом

$$l^{33} = -4\pi v_z(x_0, y_0, z_0, t)\,\tau \int_0^1 \frac{\zeta J_0'(\zeta\tau)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} =$$

$$= -4\pi v_z(x_0, y_0, z_0, t) \sin\tau. \tag{145}$$

Очевидно, что

$$l^{31} = \lim_{h\to 0} \int_0^{2\pi}\int_0^{\eta} \left[v_z \Big|_{z_0+h} - v_z \Big|_{z_0-h} \right] \frac{\partial^3 \Phi^{III}}{\partial t^3}\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= -\frac{d^2 l^{33}}{d\tau^2} = 4\pi v_z(x_0, y_0, z_0, t) \sin\tau \tag{146}$$

и, следовательно,

$$l^{31} + l^{33} = 0. \tag{147}$$

Для того чтобы полностью закончить наше исследование, нам остается подсчитать k^{31} и k^{33}.

Положим опять

$$k^{33} = \lim_{h\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[p\Big|_{x_0, y_0, z_0} + (x - x_0)\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x_0, y_0, z_0} + (y - y_0)\frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{x_0, y_0, z_0} + \right.$$

$$\left. + (z - z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0, y_0, z_0} \right] w_n dS + \iint\limits_{S_{h,\eta}} \left[p - p\Big|_{x_0, y_0, z_0} - \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_0 (x - x_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_0 (y - y_0) - \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_0 (z - z_0) \right] w_n\, dS.$$

Второй интеграл имеет своим пределом нуль, так как подинтегральная функция содержит множитель, в окрестности точки x_0, y_0, z_0 не превосходящий $r\delta(h)$, где $\delta(h) \to 0$, а множитель w_n при $z - z_0 = h$ и $z - z_0 = -h$ имеет одинаковые по величине, но разные по знаку значения.

Из всего первого интеграла только один член имеет предел, который может оказаться отличным от нуля, а именно:

$$\iint\limits_{S_{h,\eta}} (z - z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\, w_n\, dS.$$

Остальные члены обращаются в нуль, ибо w_n имеет при $z = \pm h$ значения, различные по знаку, а интегралы по боковым поверхностям — нули из-за нечетности этой функции, умноженной на $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$.

Подсчитаем

$$k_z^{33} = \lim_{h\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} (z - z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\, w_n^{33}\, dS$$

и

$$k_z^{31} = \lim_{h\to 0} \iint\limits_{S_{h,\eta}} (z - z_0)\frac{\partial p}{\partial z}\, w_n^{31}\, dS.$$

После простых преобразований получим:

$$k_z^{33} = 4\pi \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0,\, y_0,\, z_0} c(\tau),$$

где

$$c(\tau) = \int\limits_0^\infty \left[-\frac{z}{r^3}\,\frac{\rho\tau}{r}\, J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right) + \frac{z^3}{\rho^2 r^3}\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)^2 J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)\right]\rho\, d\rho =$$

$$= \tau \int\limits_0^\infty \frac{h\,(1-\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}{h^3}\,\zeta J_0'(\zeta\tau)\,\frac{h^2\zeta\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^2} +$$

$$+ \tau^2 \int\limits_0^\infty \frac{h^3(1-\zeta^2)^{\frac{5}{2}}}{h^5}\,\frac{\zeta J_0(\zeta\tau)\, d\zeta}{(1-\zeta^2)^2} =$$

$$= \tau\int\limits_0^\infty \frac{\zeta^2 J_0'(\zeta\tau)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \tau^2 \int\limits_0^\infty \frac{(\zeta-\zeta^3)\, J_0(\zeta\tau)\, d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

В силу (140), находим:

$$k_z^{33} = 0.$$

Далее,

$$k_z^{31} = 4\pi \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{x_0,\, y_0,\, z_0,\, t} \cdot \frac{d^2 c(\tau)}{d\tau^2} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_0^t \left[\, \iint\limits_{S_{h,\eta}} (p w_n^{111} + q^{111} v_n)\, dS \,\right] dt = 0. \tag{148}$$

Возвращаясь к формуле (139), введем еще одно обозначение. Положим

$$\lim_{h\to 0} \iiint\limits_{\Omega_{h,\eta}} F d\Omega = \text{Гл. зн. д.} \iiint\limits_{\Omega} F\, d\Omega. \tag{149}$$

Переходя к пределу в (139), получим:

$$4\pi v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) - \text{Гл. зн. д.} \iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}, \vec{w}^{111})\Big|_{t=0} d\Omega =$$

$$= \int\limits_0^t \left\{ \text{Гл. зн. д.} \iiint\limits_{\Omega} [(\vec{w}^{111}\vec{F}) + q^{111} g]\, d\Omega \right\} dt$$

или окончательно

$$v_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \text{Гл. зн. д.} \iiint\limits_{\Omega} (\vec{v}, \vec{w}^{\text{III}}) \Big|_{t=0} d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^t \left\{ \text{Гл. зн. д.} \iiint\limits_{\Omega} [(\vec{w}^{\text{III}}, \vec{F}) + q^{\text{III}} g]\, d\Omega \right\} dt. \quad (150)$$

Тем самым наша задача решена полностью.

§ 13. Задача Коши для уравнения четвертого порядка

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Phi \quad (151)$$

представляет самостоятельный интерес. Рассмотрим задачу Коши для этого уравнения в неограниченной среде, т. е. задачу об отыскании решения этого уравнения, удовлетворяющего условиям:

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1. \quad (152)$$

Эта задача имеет ряд интересных особенностей, и мы укажем, как она может быть решена в явном виде. С этой целью построим прежде всего формулу, аналогичную формуле Грина. Мы получим:

$$w\left(\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial t}\left[w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial w}{\partial t}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \frac{\partial^3 w}{\partial x\, \partial t^2}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - u \frac{\partial^3 w}{\partial y\, \partial t^2}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w\right) - u \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + w\right)\right]. \quad (153)$$

Интегрируя эту формулу по объему Ω, ограниченному поверхностью S, будем иметь:

$$\int\limits_0^{t_0} \left\{ \iiint\limits_{\Omega} [wLu - uLw]\, d\Omega \right\} dt = \iiint\limits_{\Omega} \left[w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial w}{\partial t}\right] d\Omega \Big|_{t=t_0} -$$

$$- \iiint\limits_{\Omega} \left[w \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial w}{\partial t}\right] d\Omega \Big|_{t=0} +$$

$$+ \int\limits_0^{t_0} \left\{ \iint\limits_{S} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial n} + \left(u \frac{\partial w}{\partial z} - w \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cos nz\right] dS. \quad (154)$$

Формула (154) выведена нами в предположении, что область Ω ограничена. Эта формула сохраняет, однако, свою силу и в том случае, когда область Ω содержит бесконечно далекую точку, если, например, функции u, w, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ убывают на бесконечности как $\frac{1}{R}$, их производные первого порядка по координатам — как $\frac{1}{R^2}$, а производные второго порядка по координатам — как $\frac{1}{R^3}$.

Доказательство этой формулы вытекает из элементарного предельного перехода.

Пусть u — интересующее нас решение уравнения (151). Положим

$$w = \frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) \tag{155}$$

и применим формулу (154) к объему $\Omega_{h,\eta}$, полученному исключением из всего пространства цилиндра $S_{h,\eta}$, радиуса η и высоты $2h$, описанного вокруг точки x_0, y_0, z_0. Переходя затем к пределу при стремлении $S_{h,\eta}$ к точке x_0, y_0, z_0, т. е., например, при $\eta \to 0$, получим:

$$\int_0^{t_0} \left\{ \iiint_\Omega \frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) \Phi \, d\Omega \right\} dt =$$

$$= \iiint_\Omega \left\{ \frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right]\right\}\Bigg|_{t=t_0} d\Omega -$$

$$- \iiint_\Omega \left\{ \frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right]\right\}\Bigg|_{t=0} d\Omega +$$

$$+ \lim_{\eta \to 0} \int_0^{t_0} \Bigg[\iint_{S_{h,\eta}} \Bigg\{ u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right] - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right] \frac{\partial u}{\partial n} +$$

$$+ \left[u \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right] - \frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial z}\right] \cos nz \Bigg\} dS \Bigg] dt. \tag{156}$$

В данном случае предел, как легко видеть, не зависит от способа сжимания поверхности $S_{h,\eta}$, так как все интегралы существуют не только в смысле главного значения.

Вычисляем порознь каждое слагаемое правой части нашего равенства. При $t = t_0$, очевидно,

$$\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right] = \frac{1}{r} J_0(0) = \frac{1}{r}.$$

Таким образом, первое слагаемое правой части (156) будет иметь вид

$$- \iiint_\Omega \frac{\Delta u}{r} d\Omega = 4\pi u(x_0, y_0, z_0, t_0).$$

Второе слагаемое перепишется в виде

$$\iiint_\Omega \left[-\Delta u_1 \frac{1}{\rho} \Xi \left(\frac{\rho t_0}{r}\right) - \Delta u_0 \frac{1}{r} J_0 \left(\frac{\rho t_0}{r}\right)\right] d\Omega.$$

Покажем, что предел последнего интеграла равен нулю. Прежде всего очевидно, что в пределе обращаются в нуль члены, содержащие $\cos nz$, так как $\cos nz$ отличен от нуля лишь на малых торцах нашего цилиндра. Нетрудно видеть, что предел

$$\lim_{\eta \to 0} \iint_{S_{h,\eta}} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{\rho} \Xi \left(\rho \frac{t-t_0}{r}\right)\right] dS = 0. \tag{157}$$

Это следует из того, что величина $\frac{\partial u}{\partial n}$ ограничена, а величина

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\,\frac{t-t_0}{r}\right)\right]$$

имеет порядок $\frac{1}{r}$. Вычислим предел последнего остающегося слагаемого. Простыми рассуждениями убеждаемся в том, что

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^{t_0}\left\{\iint_{S_{h,\eta}} u\,\frac{\partial}{\partial n}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\,\frac{t-t_0}{r}\right)\right]dS\right\}dt =$$

$$=\int_0^{t_0} u\,(x_0, y_0, z_0, t)\lim_{\eta\to 0}\iint_{S_{h,\eta}}\frac{\partial^3}{\partial\rho\,\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\,\frac{t-t_0}{r}\right)\right]dS.$$

Кроме того,

$$\lim_{\eta\to 0}\iint_{S_{h,\eta}}\frac{\partial^3}{\partial\rho\,\partial t^2}\left[\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\,\frac{t-t_0}{r}\right)\right]dS = \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{h,\eta}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{1}{r}\,J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)\right\}dS =$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{4\pi\int_0^{\infty}\left[-\frac{\rho}{r^3}\,J_0\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)-\frac{\rho^2\tau}{r^4}\,J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)+\frac{\tau}{r^2}\,J_0'\left(\frac{\rho\tau}{r}\right)\right]dz\right\}=$$

$$=4\pi\,\frac{\partial}{\partial t}\left\{-\int_0^1\frac{\zeta J_0(\zeta\tau)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}+\tau\int_0^1\frac{(1-\zeta^2)\,J_0'(\zeta\tau)\,d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right\}=4\pi\,\frac{\partial 1}{\partial t}=0,$$

что и требовалось доказать.

После этих замечаний мы можем перейти к пределу в формуле (156). Перенося известные члены в одну часть и деля на 4π, мы получим окончательный результат:

$$u\,(x_0, y_0, z_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{r}\,J_0\left(\rho\,\frac{t_0}{r}\right)\Delta u_0+\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\frac{\rho t_0}{r}\right)\Delta u_1\right\}d\Omega\;+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0}\left\{\iiint_{\Omega}\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\,\frac{t_0-t}{r}\right)\Phi\,d\Omega\right\}dt. \tag{158}$$

Формула (158) дает ответ на поставленную задачу. Нам остается проверить, что мы действительно получили решение задачи.

§ 14. Проверка полученного решения

Для проверки полученного решения заметим прежде всего, что достаточно проверить существование решения при однородных условиях. Действительно, функция $v = u - u_0 - tu_1$, очевидно, будет удовлетворять новому неоднородному уравнению и однородным граничным условиям.

При некоторых естественных ограничениях на Φ функция u, определяемая формулой (158), будет иметь непрерывные производные по координатам и времени до нужного порядка.

Докажем, что функция u будет удовлетворять уравнению (151). Пусть $\psi(x, y, z, t)$ — произвольная неограниченно дифференцируемая функция, равная нулю всюду вне объема V_ψ. Для этой функции справедливо тождество

$$\psi(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_T^{t_0}\left\{\iiint_\Omega \frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\frac{t_0-t}{r}\right)L\psi\, d\Omega\right\}dt, \tag{159}$$

если только область V_ψ имеет координату t в любой точке, меньшую, чем T.

Это тождество может быть получено из формулы (158), если положить там $t_1 = T - t$.

Умножая обе части (159) на $\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)$ и интегрируя по всему пространству x_0, y_0, z_0, t_0, получим:

$$\iiiint \psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,d\Omega_0\,dt_0 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\underset{T>t>t_0}{\iiiiiiiint}\frac{1}{\rho}\,\Xi\left(\rho\frac{t_0-t}{r}\right)L\psi(x, y, z, t)\,\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,d\Omega\,d\Omega_0\,dt\,dt_0.$$

Превратим этот интеграл в повторный, совершая интегрирование по x_0, y_0, z_0, t_0 внутри, а внешнее интегрирование выполняя по x, y, z, t. Мы получим

$$\iiiint \psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,\Phi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,d\Omega_0\,dt_0 = \iiiint L\psi(x, y, z, t)\,u(x, y, z, t)\,d\Omega\,dt$$

или после интегрирования по частям:

$$\iiiint \psi(x_0, y_0, z_0, t_0)\,[Lu - \Phi]\,d\Omega_0 dt_0 = 0. \tag{160}$$

Это интегральное соотношение имеет место тождественно при любых ψ, откуда следует:

$$Lu = \Phi,$$

что и требовалось доказать.

§ 15. Некоторые качественные следствия полученных формул

Как мы видим, решение всех наших задач тесно связано с функцией

$$V = \frac{1}{r}J_0\left(t\frac{\rho}{r}\right) = \frac{1}{r}J_0(t\sin\vartheta). \tag{161}$$

Из этой функции и некоторых других, принадлежащих к тому же типу, мы построили общее решение всех этих задач.

Проследим, как изменяется функция V с течением времени. Рассмотрим сферу постоянного радиуса. На этой сфере функция V будет в каждый момент времени зависеть только от полярного угла ϑ. Аргумент бесселевой функции J_0 будет на сфере меняться от 0 до t. С увеличением времени все больше и больше волн, создаваемых максимумами и минимумами бесселевой функции, будет укладываться на промежутке

от полюса до экватора сферы. Волны будут как бы возникать на экваторе и затем передвигаться по направлению к полюсу, накапливаясь при этом на сфере, но не исчезая. Таким образом, из крупных длинных волн будут образовываться все более и более короткие.

Такое образование коротких волн из длинных, как нам кажется, представляет интерес.

Поступило
14.VII.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа к математической физике, Ленинград, Из-во Лен. Гос. университета, 1950.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 51—86

А. В. ШТРАУС

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе рассматриваются свойства, характеризующие обобщенные резольвенты симметрических операторов. Устанавливается формула обобщенных резольвент, удобная для фактического построения спектральных функций симметрических операторов с плотной областью определения.

Настоящая работа содержит некоторые новые результаты, относящиеся к теории спектральных функций и обобщенных резольвент замкнутого симметрического оператора с неплотной (в общем случае) областью определения в данном унитарном пространстве H. Наряду с этим в работу входят с отдельными более или менее значительными изменениями теоремы об обобщенных резольвентах плотно заданного симметрического оператора, кратко изложенные в работах ([18]), ([19]). Однако упомянутые теоремы получены здесь более простым путем, чем раньше.

Важную роль в работе играет теорема 3 о характеристических свойствах обобщенных резольвент замкнутого симметрического оператора, область определения которого не предполагается плотной в H. Поскольку в теореме 3 более существенным является вопрос о достаточности указанных там условий, мы старались не включать в эти условия излишних требований, в связи с чем понадобилось несколько вспомогательных предложений. Самое доказательство достаточности условий теоремы 3 основано на таких же соображениях, как, например, вывод интегрального представления самосопряженного оператора и его резольвенты, данный в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана [см. ([1]), стр. 240—253].

Теоремы 4—6 отличаются от соответствующих предложений, установленных в ([18]), ([19]), тем, что отдельные условия в них упрощены, ослаблены или отброшены.

Теорема 7 об общей формуле резольвент замкнутого симметрического оператора с плотной областью определения была установлена в ([18]), однако там для вывода формулы пришлось использовать не только основные теоремы М. А. Наймарка о спектральных функциях и самосопряженных расширениях, изложенные в его работе ([9]), но и ряд других, довольно сложных предложений из работ автора ([15]) — ([17]). Отметим, что для плотно заданного симметрического оператора в том частном случае, когда оба дефектных числа оператора равны единице, формула обобщенных резольвент была впервые установлена М. А. Наймарком в ([10]) и другим путем — М. Г. Крейном в ([4]).

В работе ([5]) М. Г. Крейн решил этот вопрос и для оператора с равными конечными дефектными числами. Для случая любых конечных дефектных чисел формула обобщенных резольвент была построена в ([14]). Формула обобщенных резольвент плотно заданного симметрического оператора с любыми дефектными числами была получена в ([17]). В ([18]) этой формуле был придан более простой вид.

В заключение заметим, что в настоящей статье мы придерживаемся в основном терминологии и обозначений, принятых в книге Н. И. Ахиезера и И. М. Глазмана ([1]).

§ 1. Основные определения. Обобщение теоремы М. А. Наймарка о спектральных функциях симметрического оператора

1. Пусть A — замкнутый симметрический оператор в унитарном пространстве H. Область определения D_A оператора A не предполагается плотной в H.

Определение 1. Обобщенное разложение единицы $E_t\,(-\infty < t < +\infty)$ в H* называется спектральной функцией оператора A, если для любого $f \in D_A$

$$Af = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t f \tag{1.1}$$

и

$$\| Af \|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, d(E_t f, f). \tag{1.2}$$

Отметим, что сильная сходимость интеграла в правой части формулы (1.1) вытекает уже из сходимости интеграла в равенстве (1.2).

Нетрудно видеть, что всякий замкнутый симметрический оператор A в H имеет спектральную функцию. Действительно, как показал М. А. Красносельский [см. ([2]), а также ([3]), теорема 7], такой оператор допускает самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ в некотором объемлющем пространстве $\widetilde{H} \supset H$.

Пусть $\widetilde{E}_t$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$. Рассмотрим семейство операторов E_t в H, определенных формулой

$$E_t h = P\widetilde{E}_t h \quad (h \in H), \tag{1.3}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H. Семейство E_t и является спектральной функцией оператора A.

---

* Напомним, что обобщенным разложением единицы называется однопараметрическое семейство операторов $E_t\,(-\infty < t < +\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям [см. ([1]), стр. 359]:

1) при $t_2 > t_1$ разность $E_{t_2} - E_{t_1}$ есть ограниченный положительный оператор;

2) $E_{t-0} = E_t$;

3) $E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = E$.

Указанный прием построения спектральных функций оператора A является общим. Это вытекает из известной теоремы М. А. Наймарка об обобщенном разложении единицы [см., например, (1), стр. 359—366]. Таким образом, справедливо следующее предложение, представляющее простое обобщение теоремы М. А. Наймарка о спектральных функциях симметрического оператора с плотной областью определения [см. (9), теорема 5 или (1), стр. 371—372]:

ТЕОРЕМА 1. *Семейство операторов $E_t(-\infty < t < +\infty)$ в H является спектральной функцией замкнутого симметрического оператора A в H (с плотной или неплотной областью определения — безразлично) тогда и только тогда, когда оно допускает представление* (1.3), *где $\widetilde{E}_t$ — спектральная функция какого-либо самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A в объемлющем пространстве $\widetilde{H} \supset H$, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H.*

2. Определение 2. Обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора A называется семейство операторов R_λ, определенных при любом невещественном λ формулой

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_t}{t-\lambda}, \tag{1.4}$$

где E_t — какая-либо спектральная функция оператора A.

Каково бы ни было невещественное число λ, интеграл в (1.4) существует не только в смысле сильной, но и равномерной сходимости операторов, и R_λ является ограниченным оператором, определенным всюду в H *.

Таким образом, каждой спектральной функции E_t симметрического оператора A соответствует некоторая обобщенная резольвента R_λ. Зная обобщенную резольвенту, можно при помощи известной формулы обращения [см., например, (12), стр. 92—95] восстановить соответствующую спектральную функцию. Этим обусловлена важная роль обобщенных резольвент в теории спектральных функций.

Из формулы (1.4) и теоремы 1 вытекает следующее предложение, обобщающее формулу М. А. Наймарка:

ТЕОРЕМА 2. *Семейство операторов $R_\lambda (\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, действующих в H, является обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора A в H тогда и только тогда, когда оно допускает представление*

$$R_\lambda h = P(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} h \quad (h \in H), \tag{1.5}$$

*где $\widetilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение в $\widetilde{H} \supset H$ оператора A, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H **.*

---

* Этот факт сразу следует из аналогичного предложения для ортогонального разложения единицы и упомянутой выше теоремы М. А. Наймарка об обобщенном разложении единицы, но может быть доказан также непосредственно.

** Для симметрического оператора с плотной областью определения формула (1.5) дана М. А. Наймарком в работе (10); она непосредственно следует из результатов его работы (9).

Пользуясь символикой, принятой в ([1]), будем на протяжении всей работы обозначать область значений оператора $A - \lambda E$ при любом λ через $\Delta_A(\lambda)$.

Отметим простое следствие теоремы 2.

Следствие. *Если R_λ есть обобщенная резольвента оператора A, то при любом невещественном λ и любом $h \in \Delta_A(\lambda)$*

$$R_\lambda h = (A - \lambda E)^{-1} h, \tag{1.6}$$

т. е. R_λ является расширением оператора $(A - \lambda E)^{-1}$.

Формула (1.5) мало удобна для фактического построения обобщенных резольвент, ибо требует предварительного построения самосопряженных расширений оператора A с выходом из пространства H. Кроме того, различным самосопряженным расширениям может соответствовать одна и та же обобщенная резольвента.

§ 2. Некоторые свойства обобщенных резольвент

1. Пусть попрежнему A — замкнутый симметрический оператор в унитарном пространстве H и R_λ — его обобщенная резольвента. Обозначая через $\widetilde{R}_\lambda$ резольвенту действующего в $\widetilde{H} \supset H$ самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A,

$$\widetilde{R}_\lambda = (\widetilde{A} - \lambda E)^{-1},$$

мы можем формуле (1.5) придать вид:

$$R_\lambda h = P \widetilde{R}_\lambda h \quad (h \in H), \tag{2.1}$$

где, как и раньше, P обозначает оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H.

Отметим некоторые свойства обобщенных резольвент, вытекающие из формулы (2.1) и соответствующих свойств резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ самосопряженного оператора.

1) Каковы бы ни были невещественные числа λ и μ, для любого элемента f из области значений $\Delta_A(\lambda)$ оператора $A - \lambda E$ справедливо равенство:

$$(R_\mu - R_\lambda) f = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda f. \tag{2.2}$$

Для доказательства рассмотрим известное функциональное уравнение резольвенты

$$\widetilde{R}_\mu - \widetilde{R}_\lambda = (\mu - \lambda) \widetilde{R}_\mu \widetilde{R}_\lambda. \tag{2.3}$$

Так как для всякого $f \in \Delta_A(\lambda)$

$$\widetilde{R}_\lambda f = (A - \lambda E)^{-1} f \in H,$$

то, согласно (2.1),

$$R_\lambda f = \widetilde{R}_\lambda f \quad (f \in \Delta_A(\lambda)). \tag{2.4}$$

Умножим обе части соотношения (2.3) на оператор P слева и применим полученное операторное равенство к элементу $f \in \Delta_A(\lambda)$. Тогда, принимая во внимание (2.1) и (2.4), придем к равенству (2.2).

2) При любом невещественном λ и любом $h \in H$

$$\| R_\lambda h \|^2 \leqslant \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(R_\lambda h, h), \tag{2.5}$$

где $\tau = \operatorname{Im} \lambda$.

Действительно, для резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ имеет место формула

$$\| \widetilde{R}_\lambda h \|^2 = \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(\widetilde{R}_\lambda h, h), \tag{2.6}$$

которую легко получить, например, из (2.3), полагая $\mu = \overline{\lambda}$ и принимая во внимание соотношение:

$$\widetilde{R}_\lambda^* = \widetilde{R}_{\overline{\lambda}}.$$

Но, в силу (2.1), для любого $h \in H$

$$\| R_\lambda h \| \leqslant \| \widetilde{R}_\lambda h \|$$

и

$$(R_\lambda h, h) = (\widetilde{R}_\lambda h, h).$$

Сопоставляя два последних соотношения и формулу (2.6), получим (2.5).

3) R_λ есть регулярная операторная функция от λ в верхней, а также в нижней полуплоскости *.

Это свойство непосредственно следует из аналогичного свойства резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$ и формулы (2.1).

4) Если

$$\lambda_n = \sigma_n + i\tau_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

— последовательность невещественных чисел, удовлетворяющая условиям:

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty, \quad \sup \left| \frac{\sigma_n}{\tau_n} \right| < +\infty, \tag{2.7}$$

то при $n \to \infty$

$$\lambda_n R_{\lambda_n} \to -E \tag{2.8}$$

в смысле сильной сходимости.

Для доказательства нашего утверждения достаточно снова сослаться на формулу (2.1) и на аналогичное свойство резольвенты $\widetilde{R}_\lambda$, согласно которому

$$\lambda_n \widetilde{R}_{\lambda_n} h \to -h \quad (h \in \widetilde{H}) \tag{2.9}$$

---

* Для ограниченных линейных операторов понятия регулярной операторной функции в смысле слабой, сильной, а также равномерной сходимости, как известно, совпадают [см., например, ([13]), стр. 74—76].

для любой последовательности, удовлетворяющей условиям (2.7) *.

5) При любом невещественном λ справедливо равенство $R_\lambda^* = R_{\bar\lambda}$. Это свойство непосредственно следует из равенства $\widetilde{R}_\lambda^* = \widetilde{R}_{\bar\lambda}$ и формулы (2.1).

6) Для всякого невещественного λ из $R_\lambda f = 0$ следует $f = 0$.

Для доказательства представим резольвенту $\widetilde{R}_\lambda$ в виде

$$\widetilde{R}_\lambda = \frac{1}{\lambda - \bar\lambda}\left[(\widetilde{A} - \bar\lambda E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} - E\right]. \tag{2.10}$$

Пусть $f \in H$. Умножая обе части (2.10) на оператор P слева и принимая во внимание (2.1), получим:

$$R_\lambda f = \frac{1}{\lambda - \bar\lambda}\left[P(\widetilde{A} - \bar\lambda E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} f - f\right].$$

Предположим, что $R_\lambda f = 0$; тогда

$$P(\widetilde{A} - \bar\lambda E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} f = f,$$

откуда, в силу унитарности оператора $(\widetilde{A} - \bar\lambda E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1}$, следует, что

$$(\widetilde{A} - \bar\lambda E)(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} f = f.$$

Из последнего равенства, согласно (2.10), вытекает, что $\widetilde{R}_\lambda f = 0$ и, следовательно, $f = 0$, что и требовалось доказать. Впрочем, рассматриваемое свойство является следствием свойств 2)—4) семейства R_λ (см. § 4, доказательство теоремы 3).

2. Все перечисленные в п. 1 свойства обобщенных резольвент, за исключением свойства 1), выражены в терминах, вполне определяемых этими резольвентами, т. е. являются их внутренними свойствами. Что касается свойства 1), то там речь идет не только об обобщенной резольвенте, но и о подпространствах $\Delta_A(\lambda)$, определяемых оператором A. В связи с этим мы видоизменим формулировку свойства 1) так, чтобы не ставить рассматриваемых подпространств в зависимость от оператора A.

Предварительно напомним некоторые определения.

Дефектным числом линейного многообразия $\mathfrak{L}$ в H называется размерность ортогонального дополнения к замыканию $\mathfrak{L}$ в H.

---

* Соотношение (2.9) можно доказать, например, при помощи уравнения (2.3). Действительно, фиксируя в (2.3) $\lambda = \lambda_0$ и полагая $\mu = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, находим

$$\lambda_n \widetilde{R}_{\lambda_n} \widetilde{R}_{\lambda_0} = -\widetilde{R}_{\lambda_0} + \widetilde{R}_{\lambda_n} + \lambda_0 \widetilde{R}_{\lambda_n} \widetilde{R}_{\lambda_0}.$$

Так как $\left\| R_{\lambda_n} \right\| \leqslant \frac{1}{|\tau_n|}$ и в силу (2.7) $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$, то отсюда следует, что $\lambda_n \widetilde{R}_{\lambda_n} \widetilde{R}_{\lambda_0} \to -\widetilde{R}_{\lambda_0}$.

Итак, для любого $f \in \widetilde{R}_{\lambda_0} \widetilde{H}$ $\lambda_n \widetilde{R}_n f \to -f$. Но многообразие элементов f указанного вида плотно в $\widetilde{H}$, ибо $\widetilde{R}_{\lambda_0} \widetilde{H} = D_{\widetilde{A}}$. Таким образом, соотношение (2.9) доказано для плотного в $\widetilde{H}$ многообразия. Так как, кроме того, в силу (2.7),

$$\left\| \lambda_n \widetilde{R}_{\lambda_n} \right\| \leqslant \left| \frac{\lambda_n}{\tau_n} \right| \leqslant 1 + \left| \frac{\sigma_n}{\tau_n} \right| \leqslant M,$$

где M — некоторое фиксированное число, то (2.9) справедливо на всем $\widetilde{H}$.

Если A — симметрический оператор, то, как известно, дефектное число многообразия $\Delta_A(\lambda)$ одинаково для всех невещественных λ, принадлежащих одной и той же полуплоскости (верхней или нижней), и называется дефектным числом оператора A в этой полуплоскости. Поскольку в настоящей работе оператор A предполагается замкнутым, то при любом невещественном λ $\Delta_A(\lambda)$ является подпространством.

Зафиксировав какое-нибудь невещественное λ_0, положим $\mathfrak{L} = \Delta_A(\lambda_0)$. Дефектное число $\mathfrak{m}$ подпространства $\mathfrak{L}$ есть дефектное число оператора A в полуплоскости Π, содержащей точку λ_0.

Для любого невещественного λ имеем:

$$\Delta_A(\lambda) = (A - \lambda E)(A - \lambda_0 E)^{-1}\mathfrak{L} = [E + (\lambda_0 - \lambda)(A - \lambda_0 E)^{-1}]\,\mathfrak{L},$$

откуда, принимая во внимание (1.6), получаем:

$$\Delta_A(\lambda) = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}]\,\mathfrak{L}.$$

Таким образом, взамен свойства 1) можно сформулировать следующее свойство обобщенных резольвент:

1′) Для произвольного невещественного λ_0 существует подпространство $\mathfrak{L}$ с дефектным числом $\mathfrak{m}$ такое, что, каковы бы ни были невещественные числа λ и μ, при любом $f \in [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}]\,\mathfrak{L}$ справедливо равенство (2.2).

Ниже мы покажем, что условия 1′), 2)—5)* являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы заданное семейство R_λ служило обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора с дефектным числом $\mathfrak{m}$ в полуплоскости Π. Более того, одна из задач, какие мы перед собой ставим в настоящей работе, заключается в том, чтобы показать, что некоторые из этих условий можно значительно ослабить. Именно в связи с такой постановкой вопроса нам понадобится несколько вспомогательных предложений, к рассморению которых мы сейчас и приступаем.

§ 3. Вспомо ательные предложения

ЛЕММА 1. *Пусть R_λ — семейство линейных ограниченных операторов, действующих в унитарном пространстве H $(D_{R_\lambda} = H)$ и зависящих от комплексного параметра λ, который пробегает какое-либо множество Λ в комплексной плоскости.*

Пусть, далее, для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$ существует такое подпространство $\mathfrak{L} \subset H$, что для любого $\mu \in \Lambda$ и любого $f \in \mathfrak{L}$

$$R_\mu f - R_{\lambda_0} f = (\mu - \lambda_0) R_\mu R_{\lambda_0} f. \tag{3.1}$$

* Свойство 6), как мы отмечали, является следствием свойств 2)—4) семейства R_λ (см. доказательство теоремы 3)

Тогда при любом $\lambda \in \Lambda$ *многообразие* $\mathfrak{L}_\lambda = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$ *является подпространством и для любых* $\mu, \nu \in \Lambda$ *и* $h \in \mathfrak{L}_\lambda$ *справедливы равенства:*

$$R_\mu h - R_\lambda h = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda h, \tag{3.2}$$

$$[E + (\mu - \nu) R_\mu][E + (\lambda - \mu) R_\lambda] h = [E + (\lambda - \nu) R_\lambda] h. \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{L}$. Тогда из (3.1) следует:

$$R_\mu [E + (\lambda_0 - \mu) R_{\lambda_0}] f = R_{\lambda_0} f. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание последнее равенство, получим:

$$R_\mu [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] f = R_\mu [E + (\lambda_0 - \mu) R_{\lambda_0}] f + (\mu - \lambda) R_\mu R_{\lambda_0} f = $$
$$= R_{\lambda_0} f + (\mu - \lambda) R_\mu R_{\lambda_0} f,$$

т. е.

$$R_\mu [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] f - R_{\lambda_0} f = (\mu - \lambda) R_\mu R_{\lambda_0} f. \tag{3.5}$$

Положим

$$h = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] f \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Тогда, заменяя в (3.4) μ на λ, имеем:

$$R_{\lambda_0} f = R_\lambda h:$$

Из (3.5) и двух последних равенств непосредственно вытекает равенство (3.2), которое, таким образом, установлено для любого $h \in \mathfrak{L}_\lambda$, ибо элемент f был взят в $\mathfrak{L}$ произвольно.

Принимая во внимание (3.2), получим для $h \in \mathfrak{L}_\lambda$:

$$[E + (\mu - \nu) R_\mu][E + (\lambda - \mu) R_\lambda] h = h + (\mu - \nu) R_\mu h + (\lambda - \mu) R_\lambda h -$$
$$- (\mu - \nu)(R_\mu - R_\lambda) h = h + (\lambda - \nu) R_\lambda h,$$

и равенство (3.3) также доказано.

Остается доказать, что линейное многообразие $\mathfrak{L}_\lambda = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$ является подпространством, т. е. что оно замкнуто. С этой целью рассмотрим справедливое для любого $\lambda \in \Lambda$ равенство

$$[E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda][E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] f = f \quad (f \in \mathfrak{L}), \tag{3.6}$$

которое можно получить из (3.3), если заменить там λ и ν на λ_0, а μ — на λ (впрочем, (3.6) следует также непосредственно из (3.1)). Поскольку операторы R_λ и R_{λ_0} ограничены, а многообразие $\mathfrak{L}$ замкнуто, то на основании равенства (3.6) легко заключить, что многообразие $[E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$ также замкнуто. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть семейство линейных операторов* R_λ, *действующих в* H $(D_{R_\lambda} = H)$ *и зависящих от невещественного параметра* λ, *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *для некоторого невещественного* λ_0 *имеется такое подпространство* $\mathfrak{L}$, *что для любого невещественного* μ *и любого* $f \in \mathfrak{L}$ *справедливо равенство* (3.1);

2) *для любого невещественного* λ, *принадлежащего одной из полуплоскостей (верхней или нижней),*

$$R_\lambda^* = R_{\bar\lambda}. \tag{3.7}$$

Пусть при любом невещественном λ *оператор* U_λ *определяется формулой:*

$$U_\lambda = E + (\lambda - \bar\lambda) R_\lambda. \tag{3.8}$$

Тогда для любого невещественного λ *и любых* $g \in H$, $h \in \mathfrak{L}_\lambda = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$ *имеет место равенство*

$$(U_\lambda h,\ U_\lambda g) = (h, g). \tag{3.9}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из справедливости равенства (3.7) для значений λ в одной полуплоскости следует его справедливость и в другой полуплоскости. Так как оператор R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) вместе со своим сопряженным определен всюду в H, то он, согласно известному критерию [см. ([1]), стр. 75], ограничен. Таким образом, семейство R_λ удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, имеет место равенство (3.3).

Полагая в (3.3) $\mu = \bar\lambda$, $\nu = \lambda$, получим:

$$[E + (\bar\lambda - \lambda) R_{\bar\lambda}]\,[E + (\lambda - \bar\lambda) R_\lambda]\, h = h \quad (h \in \mathfrak{L}_\lambda).$$

Принимая во внимание (3.7) и (3.8), перепишем последнее равенство в виде:

$$U_\lambda^* U_\lambda h = h \quad (h \in \mathfrak{L}_\lambda),$$

откуда непосредственно вытекает (3.9). Лемма доказана.

Замечание. В условиях леммы 2 для всякого невещественного λ справедливо, в силу (3.9), равенство:

$$\| U_\lambda h \| = \| h \| \quad (h \in \mathfrak{L}_\lambda). \tag{3.10}$$

В силу легко проверяемого тождества

$$\| [E + (\lambda - \bar\lambda) R_\lambda]\, g \|^2 = \\ = \| g \|^2 + 4\tau^2 \left[\| R_\lambda g \|^2 - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(R_\lambda g, g) \right] \quad (g \in H), \tag{3.11}$$

где $\tau = \operatorname{Im}\lambda$, равенство (3.10) равносильно равенству:

$$\| R_\lambda h \|^2 = \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(R_\lambda h, h) \quad (h \in \mathfrak{L}_\lambda), \tag{3.12}$$

которое, впрочем, можно установить непосредственно.

ЛЕММА 3. *Пусть семейство линейных операторов* R_λ *— такое же, как в лемме* 2. *Тогда, каковы бы ни были невещественные числа* λ *и* μ,

принадлежащие одной и той же полуплоскости (верхней или нижней), пересечение подпространств

$$\mathfrak{L}_\lambda = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}^* \text{ и } \mathfrak{N}_\mu = H \ominus [E + (\lambda_0 - \mu) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L} = H \ominus \mathfrak{L}_\mu$$

состоит из нулевого элемента, $\mathfrak{L}_\lambda \cap \mathfrak{N}_\mu = (0)$, *а прямая сумма этих подпространств совпадает с* H, $\mathfrak{L}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_\mu = H$.

Доказательство. Как мы уже отмечали при доказательстве предыдущей леммы, семейство R_λ удовлетворяет условиям леммы 1. Заменяя в (3.3) λ и ν соответственно на λ_0 и λ и замечая, что $\mathfrak{L}_{\lambda_0} = \mathfrak{L}$, получим:

$$[E + (\mu - \lambda) R_\mu] [E + (\lambda_0 - \mu) R_{\lambda_0}] f = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] f \quad (f \in \mathfrak{L}),$$

откуда видно, что оператор $E + (\mu - \lambda) R_\mu$ отображает $\mathfrak{L}_\mu$ на $\mathfrak{L}_\lambda$, т. е.

$$[E + (\mu - \lambda) R_\mu] \mathfrak{L}_\mu = \mathfrak{L}_\lambda. \tag{3.13}$$

Заменим в (3.8) λ на μ и выразим R_μ через U_μ:

$$R_\mu = \frac{1}{\mu - \bar{\mu}} (U_\mu - E).$$

Тогда

$$E + (\mu - \lambda) R_\mu = \frac{1}{\mu - \bar{\mu}} [(\lambda - \bar{\mu}) E + (\mu - \lambda) U_\mu]. \tag{3.14}$$

Обозначим через Q_μ оператор ортогонального проектирования в H на $\mathfrak{L}_\mu$ и введем в рассмотрение оператор

$$S_{\lambda,\mu} = \frac{1}{\mu - \bar{\mu}} [(\lambda - \bar{\mu}) E + (\mu - \lambda) U_\mu Q_\mu]. \tag{3.15}$$

Сопоставляя (3.14) и (3.15), заключаем, что на подпространстве $\mathfrak{L}_\mu$ оператор $S_{\lambda,\mu}$ совпадает с оператором $E + (\mu - \lambda) R_\mu$ и, следовательно, согласно (3.13),

$$S_{\lambda,\mu} \mathfrak{L}_\mu = \mathfrak{L}_\lambda. \tag{3.16}$$

Из формулы (3.15) непосредственно видно, что на подпространстве $\mathfrak{N}_\mu$ оператор $S_{\lambda,\mu}$ совпадает с оператором $\frac{\lambda - \bar{\mu}}{\mu - \bar{\mu}} E$; следовательно,

$$S_{\lambda,\mu} \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}_\mu. \tag{3.17}$$

Покажем, что для оператора $S_{\lambda,\mu}$ существует ограниченный обратный, определенный на всем H. Заметим прежде всего, что, согласно (3.10),

$$\| U_\mu Q_\mu g \| \leqslant \| g \| \quad (g \in H). \tag{3.18}$$

Принимая во внимание (3.15) и (3.18), приходим к неравенству

$$\| S_{\lambda,\mu} g \| \geqslant k \| g \| \quad (g \in H), \tag{3.19}$$

---

* $\mathfrak{L}_\lambda$ есть подпространство в силу леммы 1.

где

$$k = \frac{|\lambda - \bar{\mu}| - |\lambda - \mu|}{|\mu - \bar{\mu}|};$$

при этом $k > 0$, так как $|\lambda - \mu| < |\lambda - \bar{\mu}|$ в силу того, что λ и μ принадлежат одной полуплоскости.

Поскольку оператор $U_\mu Q_\mu$ не превосходит, согласно (3.18), по норме единицы, то этим же свойством обладает оператор $(U_\mu Q_\mu)^*$; поэтому для оператора

$$S^*_{\lambda,\mu} = \frac{1}{\bar{\mu} - \mu} [(\bar{\lambda} - \mu) E + (\mu - \bar{\lambda})(U_\mu Q_\mu)^*]$$

также справедливо неравенство

$$\| S^*_{\lambda,\mu} g \| \geqslant k \| g \| \quad (g \in H). \tag{3.20}$$

Из (3.19) и (3.20) следует, что оператор $S^{-1}_{\lambda,\mu}$ существует, ограничен и определен на всем H *.

Теперь можно перейти к непосредственному доказательству утверждений леммы. Достаточно установить, что всякий элемент $g \in H$ допускает представление

$$g = h + \psi, \tag{3.21}$$

где $h \in \mathfrak{L}_\lambda$, $\psi \in \mathfrak{N}_\mu$, и что это представление единственно.

Предположим, что разложение (3.21) имеет место. Применяя к обеим частям равенства (3.21) оператор $S^{-1}_{\lambda,\mu}$, получим:

$$S^{-1}_{\lambda,\mu} g = S^{-1}_{\lambda,\mu} h + S^{-1}_{\lambda,\mu} \psi. \tag{3.22}$$

Но, в силу (3.16), $S^{-1}_{\lambda,\mu} h \in \mathfrak{L}_\mu$, а в силу (3.17), $S^{-1}_{\lambda,\mu} \psi \in \mathfrak{N}_\mu$. Из (3.22) тогда следует, что

$$S^{-1}_{\lambda,\mu} h = Q_\mu S^{-1}_{\lambda,\mu} g,$$
$$S^{-1}_{\lambda,\mu} \psi = (E - Q_\mu) S^{-1}_{\lambda,\mu} g,$$

откуда

$$\begin{aligned} h &= S_{\lambda,\mu} Q_\mu S^{-1}_{\lambda,\mu} g, \\ \psi &= S_{\lambda,\mu} (E - Q_\mu) S^{-1}_{\lambda,\mu} g. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Итак, если элемент g допускает разложение (3.21), то оно единственно. Но, с другой стороны, каков бы ни был элемент $g \in H$, элементы h и ψ, определенные формулами (3.23), входят, согласно (3.16) и (3.17), соответственно, в $\mathfrak{L}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_\mu$; равенство (3.21), как легко проверить, также имеет место.

Таким образом, лемма доказана.

* Для наших целей достаточно было бы вместо неравенства (3.20) установить, что оператор $S^*_{\lambda,\mu}$ удовлетворяет условию: из $S^*_{\lambda,\mu} g = 0$ следует $g = 0$.

Замечание. Принимая во внимание (3.15), (3.18) и (3.23), получаем для норм элементов h и ψ разложения (3.21) следующие оценки:

$$\begin{gathered}\|h\| \leqslant m(\lambda, \mu)\|g\|, \\ \|\psi\| \leqslant m(\lambda, \mu)\|g\|,\end{gathered} \tag{3.24}$$

где

$$m(\lambda, \mu)=\frac{|\lambda-\bar{\mu}|+|\lambda-\mu|}{|\lambda-\bar{\mu}|-|\lambda-\mu|}.$$

ЛЕММА 4. *Пусть семейство линейных операторов R_λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$, действующих в H $(D_{R_\lambda}=H)$, удовлетворяет условиям леммы 2 и, кроме того, условию: для любого невещественного λ из полуплоскости Π (верхней или нижней), содержащей λ_0, и любого $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$*

$$\|R_\lambda \psi\|^2 \leqslant \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(R_\lambda \psi, \psi), \tag{3.25}$$

где $\tau=\operatorname{Im}\lambda$. Тогда для любого невещественного λ и любого $g \in H$ справедливо неравенство

$$\|R_\lambda g\|^2 \leqslant \frac{1}{\tau} \operatorname{Im}(R_\lambda g, g). \tag{3.26}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что подлежащее доказательству соотношение (3.26) равносильно, в силу тождества (3.11), неравенству

$$\|U_\lambda g\| \leqslant\|g\| \quad (g \in H), \tag{3.27}$$

где попрежнему $U_\lambda=E+(\lambda-\bar{\lambda}) R_\lambda$. В таком случае, согласно условию (3.25), для любого $\lambda \in \Pi$ и любого $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$ имеет место неравенство

$$\|U_\lambda \psi\| \leqslant\|\psi\|. \tag{3.28}$$

Пусть $g \in H$. Предположим сначала, что невещественное число λ принадлежит полуплоскости Π. Тогда, согласно лемме 3, g можно представить в виде

$$g=h+\psi,$$

где

$$h \in \mathfrak{L}_\lambda=[E+(\lambda_0-\lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}, \quad \psi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}=\ominus H \mathfrak{L}.$$

Принимая во внимание лемму 2, а также неравенство (3.28), получим

$$\begin{gathered}\|U_\lambda g\|^2=(U_\lambda h, U_\lambda h)+(U_\lambda h, U_\lambda \psi)+(U_\lambda \psi, U_\lambda h)+ \\ +(U_\lambda \psi, U_\lambda \psi) \leqslant(h, h)+(h, \psi)+(\psi, h)+(\psi, \psi)=\|g\|^2.\end{gathered}$$

Этим доказано, что соотношение (3.27) справедливо для любого λ из полуплоскости Π, т. е. что оператор U_λ $(\lambda \in \Pi)$ не превосходит по норме единицы. Но тогда и норма сопряженного оператора U_λ^* $(\lambda \in \Pi)$ не превосходит единицы, и так как

$$U_\lambda^*=[E+(\lambda-\bar{\lambda}) R_\lambda]^*=E+(\bar{\lambda}-\lambda) R_{\bar{\lambda}}=U_{\bar{\lambda}},$$

то соотношение (3.27) справедливо и в другой полуплоскости.

Лемма доказана.

Следствие. *Если семейство линейных операторов R_λ удовлетворяет условиям леммы 4, то при любом невещественном λ*

$$\| R_\lambda \| \leqslant \frac{1}{|\tau|}, \tag{3.29}$$

где $\tau = \operatorname{Im} \lambda$.

Действительно, принимая во внимание (3.26), имеем для любого $g \in H$:

$$\|R_\lambda g\|^2 \leqslant \frac{1}{|\tau|} \, |(R_\lambda g, g)| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \, \| R_\lambda g \| \cdot \| g \|,$$

откуда

$$\| R_\lambda g \| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \| g \| \quad (g \in H).$$

Замечание. Из доказательства леммы видно, что условие (3.25) можно ослабить. Достаточно потребовать, чтобы при любом невещественном λ, принадлежащем одной из полуплоскостей, неравенство (3.25) выполнялось для любого $\psi \in \mathfrak{N}_\mu = H \ominus \mathfrak{L}_\mu$, где μ — некоторое невещественное число, принадлежащее той же полуплоскости, что и λ, причем μ может зависеть от λ. Можно, в частности, также потребовать, чтобы неравенство (3.25) имело место для любого $\psi \in \mathfrak{N}_\lambda$. В этом последнем случае не пришлось бы при доказательстве леммы 4 использовать лемму 3.

ЛЕММА 5. *Пусть семейство операторов R_λ — такое же, как в лемме 4 и $\lambda_n = \sigma_n + i\tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность невещественных чисел, удовлетворяющая условиям:*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \sup \left| \frac{\sigma_n}{\tau_n} \right| < +\infty. \tag{3.30}$$

Тогда для любого $g \in \overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n R_{\lambda_n} g = -g \tag{3.31}$$

в смысле сильной сходимости.

Доказательство. Из (3.30) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$. Тогда, в силу (3.29),

$$R_{\lambda_n} \rightrightarrows 0 \tag{3.32}$$

(в смысле равномерной сходимости).

Заметим, что согласно (3.29) и второму из условий (3.30)

$$\| \lambda_n R_{\lambda_n} \| \leqslant \frac{|\lambda_n|}{|\tau_n|} \leqslant 1 + \left| \frac{\sigma_n}{\tau_n} \right| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где M — некоторое фиксированное число. Поэтому достаточно доказать (3.31) для любого элемента g вида $g = R_{\lambda_0} f$ $(f \in \mathfrak{L})$.

Полагая в (3.1) $\mu = \lambda_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), после элементарного преобразования придем к равенству:

$$\lambda_n R_{\lambda_n} R_{\lambda_0} f = - R_{\lambda_0} f + R_{\lambda_n} f + \lambda_0 R_{\lambda_n} R_{\lambda_0} f \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При $n \to \infty$ два последних члена в правой части, в силу (3.32), стремятся к нулю пространства H, и, следовательно,

$$\lambda_n R_{\lambda_n} R_{\lambda_0} f \to - R_{\lambda_0} f \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. *Если в условиях леммы 5 для всякого* $\varphi \in H \ominus \overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n (R_{\lambda_n}\varphi, \varphi) = -(\varphi, \varphi), \tag{3.33}$$

то при $n \to \infty$

$$\lambda_n R_{\lambda_n} \xrightarrow{\text{сл.}} -E \tag{3.34}$$

(в смысле слабой сходимости).

Доказательство. Пусть $f \in H$. Представим f в виде

$$f = g + \varphi,$$

где $g \in \overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}$, $\varphi \in H \ominus \overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}$. Тогда

$$(\lambda_n R_{\lambda_n} f, f) = (\lambda_n R_{\lambda_n} g, f) + (\lambda_n R_{\lambda_n}\varphi, g) + (\lambda_n R_{\lambda_n}\varphi, \varphi). \tag{3.35}$$

В силу леммы 5,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n R_{\lambda_n} g, f) = -(g, f) = -(g, g),$$

а

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n R_{\lambda_n}\varphi, g) = \lim_{n\to\infty} (\varphi, \bar{\lambda}_n R_{\bar{\lambda}_n} g) = -(\varphi, g) = 0.$$

Переходя в (3.35) к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание последние соотношения, а также (3.33), получим:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n R_{\lambda_n} f, f) = -(g, g) - (\varphi, \varphi) = -(f, f),$$

откуда, в силу произвольности f, следует (3.34). Лемма доказана.

ЛЕММА 7. *Пусть семейство линейных операторов* R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), *действующих в* H ($D_{R_\lambda} = H$), *удовлетворяет условиям леммы 2, а также условию:*

для любого $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$ $R_\lambda\psi$ *есть регулярная векторная функция от* λ *в полуплоскости* Π, *содержащей* λ_0.

Тогда R_λ *является регулярной операторной функцией от* λ *в каждой из полуплоскостей.*

Доказательство. Выше, при доказательстве леммы 2, мы уже отмечали, что каждый из операторов R_λ ограничен. В силу регулярности векторной функции $R_\lambda\psi$ ($\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$) в полуплоскости Π, какова бы ни была замкнутая область Γ, содержащаяся внутри Π, существует

такое положительное число M_Γ, что для любого $\lambda \in \Gamma$ и любого $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$

$$\| R_\lambda \psi \| \leqslant M_\Gamma \| \psi \| \text{ *}. \tag{3.36}$$

Из справедливого в условиях леммы 2 равенства (3.12) следует, что при любом невещественном λ и любом $h \in \mathfrak{L}_\lambda = [E + (\lambda_0 - \lambda) R_{\lambda_0}] \mathfrak{L}$ имеет место неравенство

$$\| R_\lambda h \| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \| h \|, \tag{3.37}$$

где $\tau = \operatorname{Im} \lambda$ [ср. вывод неравенства (3.29)].

Теперь нетрудно убедиться в существовании такого N_Γ, что для любого $\lambda \in \Gamma$ и любого $g \in H$

$$\| R_\lambda g \| \leqslant N_\Gamma \| g \|. \tag{3.38}$$

Действительно, согласно лемме 3, имеет место разложение

$$g = h + \psi,$$

где $h \in \mathfrak{L}_\lambda$, $\psi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0} = H \ominus \mathfrak{L}$. При этом, в силу (3.24),

$$\begin{gathered} \| h \| \leqslant m(\lambda, \lambda_0) \| g \|, \\ \| \psi \| \leqslant m(\lambda, \lambda_0) \| g \|, \end{gathered} \tag{3.39}$$

где

$$m(\lambda, \lambda_0) = \frac{|\lambda - \bar{\lambda}_0| + |\lambda - \lambda_0|}{|\lambda - \bar{\lambda}_0| - |\lambda - \lambda_0|}.$$

Принимая во внимание соотношения (3.36), (3.37) и (3.39), получим:

$$\begin{gathered} \| R_\lambda g \| \leqslant \| R_\lambda h \| + \| R_\lambda \psi \| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \| h \| + M_\Gamma \| \psi \| \leqslant \\ \leqslant m(\lambda, \lambda_0) \left(\frac{1}{|\tau|} + M_\Gamma \right) \| g \|. \end{gathered}$$

Остается заметить, что при фиксированном λ_0 выражение

$$m(\lambda, \lambda_0) \left(\frac{1}{|\tau|} + M_\Gamma \right)$$

есть ограниченная в области Γ функция от λ; неравенство (3.38) таким образом доказано.

Покажем, что, какова бы ни была точка λ_1 в полуплоскости Π, операторная функция R_λ непрерывна в точке λ_1 в смысле сильной сходимости. Взяв произвольный элемент $g \in H$, представим его, снова в силу леммы 3, в виде

$$g = h_1 + \psi_1, \tag{3.40}$$

---

* Действительно, для всякого $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$ норма $\| R_\lambda \psi \|$, рассматриваемая как функция от λ, ограничена в Γ. Так как, кроме того, в силу непрерывности каждого из операторов R_λ $(\lambda \in \Gamma)$, $\| R_\lambda \psi \|$ является при любом $\lambda \in \Gamma$ непрерывным выпуклым функционалом в $H \ominus \mathfrak{L}$, то, как известно [см. ([1]), следствие леммы относительно выпуклых функционалов, стр. 58—60], $p(\psi) = \sup\limits_{\lambda \in \Gamma} \| R_\lambda \psi \|$ есть выпуклый непрерывный функционал в $H \ominus \mathfrak{L}$, т. е. $p(\psi) \leqslant M_\Gamma \| \psi \|$ $(\psi \in H \ominus \mathfrak{L})$, где M_Γ — некоторое число. Отсюда следует (3.36).

где $h_1 \in \mathfrak{L}_{\lambda_1}$, $\psi_1 \in \mathfrak{N}_{\lambda_0} = H \ominus \mathfrak{L}$. Достаточно, очевидно, установить непрерывность в точке λ_1 векторной функции $R_\lambda h_1$, так как векторная функция $R_\lambda \psi_1$ непрерывна в силу регулярности. Семейство R_λ $(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$ удовлетворяет условиям леммы 1; заменяя в (3.2) μ и λ соответственно на λ и λ_1, получим:

$$R_\lambda h_1 - R_{\lambda_1} h_1 = (\lambda - \lambda_1) R_\lambda R_{\lambda_1} h_1 \quad (h_1 \in \mathfrak{L}_{\lambda_1}). \tag{3.41}$$

Принимая во внимание (3.38), заключаем, что правая часть равенства (3.41) при $\lambda \to \lambda_1$ стремится к нулю пространства H, и, следовательно, $R_\lambda h_1 \to R_{\lambda_1} h_1$. Тем самым сильная непрерывность операторной функции R_λ в точке λ_1 доказана.

Теперь уже нетрудно доказать и дифференцируемость (в смысле сильной сходимости) операторной функции R_λ в точке λ_1. Поскольку произвольный элемент $g \in H$ можно представить в виде (3.40), а векторная функция $R_\lambda \psi_1$ регулярна в полуплоскости П, то достаточно установить, что в точке λ_1 дифференцируема векторная функция $R_\lambda h_1$ $(h_1 \in \mathfrak{L}_{\lambda_1})$. Но это сразу следует из равенства (3.41), если разделить обе части на разность $\lambda - \lambda_1$ $(\lambda \neq \lambda_1)$ и учесть, что при $\lambda \to \lambda_1$ $R_\lambda R_{\lambda_1} h_1 \to R^2_{\lambda_1} h_1$, в силу непрерывности операторной функции R_λ. Тем самым доказана регулярность операторной функции R_λ в полуплоскости П, ибо точка λ_1 была выбрана в этой полуплоскости произвольно. Тогда регулярность операторной функции R_λ в другой полуплоскости следует непосредственно из равенства $R_\lambda = R^*_{\bar{\lambda}}$. Лемма полностью доказана.

§ 4. Теорема о характеристических свойствах обобщенных резольвент

1. Результаты § 2 и 3 позволяют установить следующее предложение:

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы семейство линейных операторов* $R_\lambda(\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0)$, *действующих в унитарном пространстве* H $(D_{R_\lambda} = H)$, *являлось обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора с дефектным числом* $\mathfrak{m}$ *в полуплоскости* П, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

I) *для некоторого невещественного* λ_0 *из полуплоскости* П *имеется подпространство* $\mathfrak{L} \subset H$ *с дефектным числом* $\mathfrak{m}$ *такое, что*

а) *для любого невещественного* μ *и любого* $f \in \mathfrak{L}$ *справедливо равенство*

$$R_\mu f - R_{\lambda_0} f = (\mu - \lambda_0) R_\mu R_{\lambda_0} f; \tag{4.1}$$

б) *для любого невещественного* λ *из полуплоскости* П *и любого* $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$ *выполняется неравенство*

$$\| R_\lambda \psi \|^2 \leqslant \frac{1}{\tau} \mathrm{Im}\,(R_\lambda \psi, \psi),$$

где $\tau = \mathrm{Im}\,\lambda$;

в) *для любого* $\psi \in H \ominus \mathfrak{L}$ $R_\lambda \psi$ *есть регулярная векторная функция от* λ *в полуплоскости* П;

г) *существует последовательность невещественных чисел* $\lambda_n = \sigma_n + i\tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \quad \sup\left|\frac{\sigma_n}{\tau_n}\right| < +\infty,$$

такая, что для любого $\varphi \in H \ominus \overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}}$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n (R_{\lambda_n}\varphi, \varphi) = -(\varphi, \varphi);$$

II) *для любого невещественного* λ *из полуплоскости* Π

$$R_\lambda^* = R_{\bar\lambda}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Необходимость всех перечисленных условий вытекает непосредственно из установленных в § 2 свойств 1′), 2) — 5) обобщенной резольвенты.

Обращаясь к доказательству достаточности, предположим, что семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы. Из доказанных в § 3 лемм 4, 6 и 7 тогда следует, что семейство R_λ обладает следующими свойствами:

1) при любом невещественном λ и любом $h \in H$

$$\|R_\lambda h\|^2 \leqslant \frac{1}{\tau}\operatorname{Im}(R_\lambda h, h); \tag{4.3}$$

2) R_λ есть регулярная операторная функция от λ в верхней, а также в нижней полуплоскости;

3) $\lambda_n R_{\lambda_n} \overset{\text{сл.}}{\rightarrow} -E.$ (4.4)

Основываясь на этих свойствах и условии (4.2), покажем, что семейство R_λ удовлетворяет также условию:

4) для всякого невещественного λ из $R_\lambda f = 0$ следует $f = 0$.

Действительно, поскольку $(R_\lambda f, f)$ есть регулярная функция от λ в верхней и в нижней полуплоскостях, а мнимая часть функции, согласно (4.3), сохраняет в каждой из полуплоскостей постоянный знак, то из равенства $(R_\lambda f, f) = 0$ при каком-либо значении λ следует, что $(R_\lambda f, f)$ тождественно обращается в нуль в полуплоскости, содержащей точку λ, а тогда, в силу (4.2), $(R_\lambda f, f) \equiv 0$ и в другой полуплоскости. Но, согласно (4.4),

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n (R_{\lambda_n} f, f) = -(f, f)$$

и, следовательно, $f = 0$. Свойство 4) таким образом доказано. Отсюда следует, что при любом невещественном λ оператор R_λ^{-1} существует.

Определим теперь оператор A на многообразии $D_A = R_{\lambda_0}\mathfrak{L}$ формулой

$$Ag = (R_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 E) g \quad (g \in R_{\lambda_0}\mathfrak{L}). \tag{4.5}$$

Отметим, что, в силу (4.1), $R_{\lambda_0}\mathfrak{L} \subset R_\mu H$ при любом невещественном μ.

Полагая в (4.1) $\mu = \bar{\lambda}_0$, $f = R_{\lambda_0}^{-1} g$ и умножая обе части на $R_{\bar{\lambda}_0}^{-1}$ слева, получим:

$$R_{\lambda_0}^{-1} g - R_{\bar{\lambda}_0}^{-1} g = (\bar{\lambda}_0 - \lambda_0) g,$$

откуда

$$R_{\lambda_0}^{-1} g + \lambda_0 g = R_{\bar{\lambda}_0}^{-1} g + \bar{\lambda}_0 g \quad (g \in R_{\lambda_0} \mathfrak{L}). \tag{4.6}$$

С другой стороны, принимая во внимание (4.2), имеем для любых g, $h \in R_{\lambda_0} \mathfrak{L}$ равенство

$$((R_{\lambda_0}^{-1} + \lambda_0 E) g, h) = (g, (R_{\bar{\lambda}_0}^{-1} + \bar{\lambda}_0 E) h). \tag{4.7}$$

Сопоставляя соотношения (4.5), (4.6) и (4.7), убеждаемся в справедливости равенства

$$(Ag, h) = (g, Ah) \quad (g, h \in R_{\lambda_0} \mathfrak{L}).$$

Таким образом, доказано, что оператор A является симметрическим. Так как, кроме того, согласно (4.5), $\Delta_A(\lambda_0) = \mathfrak{L}$, то оператор A замкнут и его дефектное число в полуплоскости Π равно $\mathfrak{m}$.

Покажем, что семейство R_λ служит обобщенной резольвентой только что рассмотренного оператора A.

Приступая к доказательству этого утверждения, еще раз заметим, что в силу свойств 1), 2), $(R_\lambda f, f)$ является при любом $f \in H$ регулярной функцией от λ в верхней и в нижней полуплоскостях, причем мнимая часть этой функции в верхней полуплоскости неотрицательна (точнее, положительна, если $f \neq 0$). Из (4.3) вытекает также неравенство

$$\| R_\lambda f \| \leqslant \frac{1}{|\tau|} \| f \| \ ^{*}.$$

Кроме того, согласно (4.2), при любом невещественном λ

$$(R_{\bar{\lambda}} f, f) = (\overline{R_\lambda f, f}) \quad (f \in H).$$

Из только что перечисленных свойств семейства R_λ, как известно, следует **, что для любых $f, g \in H$ и любого невещественного λ имеет место формула

$$(R_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - \lambda} d(E_t f, g), \tag{4.8}$$

где E_t $(-\infty < t < +\infty)$ есть некоторое семейство ограниченных самосопряженных операторов в H, удовлетворяющее условиям:

1°. $(E_t f, f)$ есть неубывающая функция от t при любом $f \in H$;

2°. $E_{-\infty} = 0$ и $E_{t-0} = E_t$ (в смысле сильной сходимости);

3°. $\| E_t \| \leqslant 1$.

---

* См. § 3, доказательство следствия леммы 4.

** См. (1), стр. 240—245.

Отметим, что введением условия 2° обеспечивается единственность представления (4.8). Принимая во внимание условия (4.4) и (4.8), легко убедиться, что при $t \to +\infty$ $E_t \to E$. Таким образом, семейство E_t является обобщенным разложением единицы.

Формулу (4.8) можно заменить более сильным равенством:

$$R_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\lambda} dE_t, \tag{4.9}$$

так как операторный интеграл в правой части последнего соотношения существует в смысле сильной и даже в смысле равномерной сходимости интегральных сумм *.

Наше утверждение, что R_λ является обобщенной резольвентой оператора A, будет доказано, если удастся установить, что обобщенное разложение единицы E_t, входящее в равенство (4.9), является спектральной функцией оператора A.

Основываясь на формуле (4.9), найдем при любом невещественном μ интегральные представления для каждой из обеих частей равенства (4.1):

$$R_\mu - R_{\lambda_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\mu} dE_t - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\lambda_0} dE_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu-\lambda_0}{(t-\mu)(t-\lambda_0)} dE_t =$$

$$= (\mu-\lambda_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\mu} d_t \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s;$$

с другой стороны,

$$(\mu-\lambda_0) R_\mu R_{\lambda_0} = (\mu-\lambda_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\mu} dE_t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s.$$

Если $\mu \neq \lambda_0$, то, подставляя полученные выражения в (4.1), после сокращения на $\mu - \lambda_0$ придем к формуле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\mu} d_t \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\mu} dE_t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f, \tag{4.10}$$

где f — произвольный элемент из подпространства $\mathfrak{L}$. Заметим, что формула (4.10) оказывается справедливой и при $\mu = \lambda_0$, в силу непрерывности обеих частей как функций от μ.

Поскольку равенство (4.10) имеет место при любом невещественном μ, то для любого $t\ (-\infty < t < +\infty)$ и любого $f \in \mathfrak{L}$ справедлива формула:

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f = E_t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f. \tag{4.11}$$

Пусть $g \in D_A$. Тогда, согласно (4.5),

$$g = R_{\lambda_0} f \quad \text{и} \quad Ag = f + \lambda_0 R_{\lambda_0} f, \tag{4.12}$$

* См. первую сноску на стр. 53.

где $f \in \mathfrak{L}$. Принимая во внимание (4.9), (4.11) и (4.12), получим:

$$Ag = \int_{-\infty}^{+\infty} dE_t f + \lambda_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t-\lambda_0} dE_t f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t-\lambda_0} dE_t f =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t d_t \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t R_{\lambda_0} f = \int_{-\infty}^{+\infty} t dE_t g,$$

причем все интегралы сходятся в смысле сильной сходимости. Таким образом, для любого $g \in D_A$

$$Ag = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, dE_t\, g. \tag{4.13}$$

Далее, в силу (4.13), имеем:

$$(Ag, Ag) = \int_{-\infty}^{+\infty} t d(E_t g, Ag) = \int_{-\infty}^{+\infty} t d(g, E_t Ag). \tag{4.14}$$

С другой стороны, принимая во внимание соотношения (4.12), (4.9) и (4.11), получим:

$$E_t Ag = E_t f + \lambda_0 E_t R_{\lambda_0} f = \int_{-\infty}^{t} dE_s f + \lambda_0 \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{s-\lambda_0} dE_s f =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{s}{s-\lambda_0} dE_s f = \int_{-\infty}^{t} s\, d_s \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{u-\lambda_0} dE_u f =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} s dE_s R_{\lambda_0} f = \int_{-\infty}^{t} s\, dE_s\, g$$

и, следовательно,

$$(g, E_t Ag) = \overline{(E_t Ag, g)} = \int_{-\infty}^{t} \overline{s d(E_s g, g)} = \int_{-\infty}^{t} s d(E_s g, g).$$

Вводя только что полученное выражение в (4.14), приходим к равенству:

$$(Ag, Ag) = \int_{-\infty}^{+\infty} t d_t \int_{-\infty}^{t} s d(E_s g, g),$$

т. е.

$$(Ag, Ag) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 d(E_t g, g) \tag{4.15}$$

при любом $g \in D_A$.

Равенства (4.13) и (4.15) показывают, что обобщенное разложение единицы E_t действительно является спектральной функцией оператора A. Следовательно, согласно формуле (4.9), семейство R_λ служит обобщенной резольвентой оператора A. Теорема полностью доказана.

Замечание. Принимая во внимание замечание к лемме 4 § 3, можно соответствующим образом изменить условие I б) только что доказанной теоремы.

2. Обращаясь к доказательству теоремы 3, нетрудно выяснить условия, характеризующие обобщенные резольвенты замкнутых симметрических операторов с плотной областью определения.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы семейство линейных операторов* R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), *действующих в унитарном пространстве* H ($D_{R_\lambda} = H$), *являлось обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора с плотной в* H *областью определения и с дефектным числом* $\mathfrak{m}$ *в полуплоскости* П, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* I а), б), в) *и* II *теоремы* 3, *а также условие*

$$\overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}} = H\ ^*. \tag{4.16}$$

Доказательство. Остановимся сначала на доказательстве необходимости условия (4.16); необходимость остальных условий очевидна.

Пусть R_λ — обобщенная резольвента замкнутого симметрического оператора A в H с плотной областью определения и с дефектным числом $\mathfrak{m}$ в полуплоскости П. Взяв произвольное невещественное число $\lambda_0 \in$ П, положим $\mathfrak{L} = \Delta_A(\lambda_0)$. Тогда, согласно (1.6),

$$R_{\lambda_0} f = (A - \lambda_0 E)^{-1} f \qquad (f \in \mathfrak{L})$$

и, следовательно,

$$\overline{R_{\lambda_0}\mathfrak{L}} = \overline{D}_A = H.$$

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы. Поскольку в рассматриваемом случае условие I г) теоремы 3, в силу (4.16), выполняется тривиальным образом, то семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 и, следовательно, служит обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора с дефектным числом $\mathfrak{m}$ в полуплоскости П. В ходе доказательства теоремы 3 такой оператор A был построен; он определен на многообразии $D_A = R_{\lambda_0}\mathfrak{L}$ формулой (4.5). В силу (4.16), область определения D_A оператора A плотна в H. Теорема доказана.

Рассмотрим случай максимального симметрического, а также самосопряженного оператора.

Напомним, что замкнутый симметрический оператор A, действующий в унитарном пространстве H, является максимальным тогда и только тогда, когда одно из его дефектных чисел равно нулю**.

---

* В этой теореме условие I в) ослаблено по сравнению с условием 4) теоремы 1 в ([19]), а условие 2) упомянутой теоремы здесь совсем опущено, так как оно является следствием других условий. По поводу условия I б) в настоящей работе и условия (3) в работе ([19]) см. замечание к теореме 3.

** Легко непосредственно доказать, что если одно из дефектных чисел замкнутого симметрического оператора A равно нулю, то область определения D_A оператора A плотна в H. Впрочем, этот факт следует, например, из результатов М. А. Наймарка [см. ([8]), теоремы 7 и 8].

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы семейство линейных операторов* R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), *действующих в унитарном пространстве* H ($D_{R_\lambda} = H$), *являлось обобщенной резольвентой некоторого максимального замкнутого симметрического оператора, дефектное число которого в полуплоскости* Π *равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) *для некоторого невещественного* λ_0 *из полуплоскости* Π *и для любого невещественного* μ *справедливо равенство*

$$R_\mu - R_{\lambda_0} = (\mu - \lambda_0) R_\mu R_{\lambda_0};$$

2) *для любого невещественного* λ *из полуплоскости* Π

$$R_\lambda^* = R_{\bar\lambda};$$

3) *для некоторого невещественного* λ_1 *из* $R_{\lambda_1} f = 0$ *следует* $f = 0$.

R_λ *является резольвентой некоторого самосопряженного оператора тогда и только тогда, когда, кроме того, выполняется условие*:

4) *для некоторого невещественного* $\lambda_2 \in \Pi$ *из* $f + (\bar\lambda_2 - \lambda_2) R_{\bar\lambda_2} f = 0$ *следует* $f = 0$ [ср. ([11]), стр. 56—58].

Доказательство. После того как рассмотрена теорема 3, необходимость первых двух условий очевидна; впрочем, можно непосредственно сослаться на свойства обобщенной резольвенты 1) и 5) из § 2. Необходимость условия 3) вытекает из свойства 6) обобщенной резольвенты, рассмотренного в § 2.

Если R_λ — резольвента самосопряженного оператора A, то при любом невещественном λ

$$E + (\bar\lambda - \lambda) R_{\bar\lambda} = (A - \lambda E)(A - \bar\lambda E)^{-1},$$

и необходимость условия 4) очевидна.

Переходим к доказательству достаточности. Пусть семейство R_λ удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 5. Покажем, что тогда семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 3 при $\mathfrak{L} = H$. Проверки требует, очевидно, лишь условие I г). Докажем, что

$$\overline{R_{\lambda_0} H} = H; \tag{4.17}$$

тогда условие I г) окажется тривиальным.

В силу условия 2), равенство (4.17) равносильно тому условию, что из $R_{\bar\lambda_0} f = 0$ следует $f = 0$.

Итак, предположим, что для некоторого $f \in H$ $R_{\bar\lambda_0} f = 0$. Рассмотрим $(R_\lambda f, f)$ как функцию от λ в полуплоскости Π_1, содержащей точку $\bar\lambda_0$. Согласно лемме 4 § 3 (при $\mathfrak{L} = H$), $\operatorname{Im}(R_\lambda f, f)$ сохраняет в полуплоскости Π_1 постоянный знак, а в силу леммы 7 § 3 (снова при $\mathfrak{L} = H$), $(R_\lambda f, f)$ является регулярной в Π_1 функцией от λ. Поскольку $(R_{\bar\lambda_0} f, f) = 0$, то $(R_\lambda f, f) = 0$ для всякого λ из полуплоскости Π_1. Принимая во внимание условие 2), заключаем, что $(R_\lambda f, f) = 0$ при любом невещественном λ. Тогда, в силу леммы 4 § 3, $R_\lambda f = 0$ для всякого невещественного λ; в частности, $R_{\lambda_1} f = 0$, откуда, согласно условию 3), следует, что $f = 0$.

Таким образом, семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 3, причем $\mathfrak{L} = H$. Следовательно, согласно указанной теореме, R_λ является обобщенной резольвентой некоторого замкнутого симметрического оператора A, имеющего в полуплоскости П дефектное число $m = 0$.

Заметим, что в соответствии с формулой (1.6) для всякого невещественного λ из полуплоскости П имеет место равенство:

$$R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}. \tag{4.18}$$

Если наряду с условиями 1) — 3) выполняется условие 4), то многообразие $[E + (\lambda_2 - \overline{\lambda}_2) R_{\lambda_2}] H$ плотно в H. Но, согласно (4.18),

$$E + (\lambda_2 - \overline{\lambda}_2) R_{\lambda_2} = (A - \overline{\lambda}_2 E)(A - \lambda_2 E)^{-1}$$

и, следовательно,

$$[E + (\lambda_2 - \overline{\lambda}_2) R_{\lambda_2}] H = \Delta_A (\overline{\lambda}_2).$$

Так как точка $\overline{\lambda}_2$ принадлежит полуплоскости $П_1$ (той же, что и точка $\overline{\lambda}_0$), то отсюда следует, что дефектное число оператора A в полуплоскости $П_1$ также равно нулю, т. е. оператор A является самосопряженным. Теорема полностью доказана.

§ 5. Формула обобщенных резольвент симметрического оператора с плотной областью определения

1. В предыдущем параграфе речь шла о внутренних свойствах, характеризующих обобщенные резольвенты замкнутых симметрических операторов. Однако нами не были выяснены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы семейство операторов R_λ служило обобщенной резольвентой данного замкнутого симметрического оператора. Перейдем к решению этого вопроса для случая оператора с плотной областью определения.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, действующий в унитарном пространстве H и имеющий плотную в H область определения D_A. Для того чтобы семейство линейных операторов R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$), действующих в H ($D_{R_\lambda} = H$), служило обобщенной резольвентой оператора A, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: при любом невещественном λ из полуплоскости* П *(верхней или нижней)*

1) $(A^* - \lambda E) R_\lambda = E$;

2) $\|(A^* - \overline{\lambda} E) R_\lambda h\| \leqslant \|h\|$ *при любом* $h \in H$;

3) $R_\lambda^* = R_{\overline{\lambda}}$;

4) *$R_\lambda \psi$ есть регулярная векторная функция от λ в полуплоскости* П *для всякого $\psi \in H \ominus \Delta_A(\lambda_0)$, где λ_0 — некоторое невещественное число из полуплоскости* П.

Доказательство. Установим сперва необходимость условий. Пусть R_λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) есть обобщенная резольвента оператора A. Тогда, согласно теореме 2 § 1*,

$$R_\lambda h = P(\tilde{A} - \lambda E)^{-1} h \quad (h \in H), \tag{5.1}$$

* См. вторую сноску на стр. 53.

где $\widetilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение оператора A, действующее в унитарном пространстве $\widetilde{H} \supset H$, а P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{H}$ на H. Принимая во внимание формулу (5.1) и замечая, что для всякого $f \in D_A$ $\widetilde{A}f = Af$, имеем для любых $f \in D_A$, $h \in H$ и любого невещественного λ:

$$((A - \overline{\lambda} E) f, R_\lambda h) = ((A - \overline{\lambda} E) f, P (\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} h) =$$
$$= ((A - \overline{\lambda} E) f, (\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} h) = (f, h).$$

Отсюда следует, что при любом $h \in H$ и любом невещественном λ

$$R_\lambda h \in D_{A^*} \text{ и } (A^* - \lambda E) R_\lambda h = h.$$

Таким образом, условие 1) выполняется (и притом для всякого невещественного λ).

В силу условия 1), неравенство, входящее в условие 2), можно переписать в виде:

$$\| [E + (\lambda - \overline{\lambda}) R_\lambda] h \| \leqslant \| h \| \quad (h \in H). \tag{5.2}$$

Покажем, что последнее соотношение справедливо для всякого $h \in H$ при любом невещественном λ. Действительно, согласно (5.1), имеем:

$$[E + (\lambda - \overline{\lambda}) R_\lambda] h = P [E + (\lambda - \overline{\lambda})(\widetilde{A} - \lambda E)^{-1}] h =$$
$$= P (\widetilde{A} - \overline{\lambda} E) (\widetilde{A} - \lambda E)^{-1} h.$$

Поскольку оператор $(\widetilde{A} - \overline{\lambda} E)(A - \lambda E)$ унитарен, то отсюда непосредственно следует соотношение (5.2).

Необходимость условий 3) и 4) вытекает из результатов § 2.

Переходя к доказательству достаточности, предположим, что семейство R_λ удовлетворяет условиям 1) — 4).

Покажем, что, каково бы ни было невещественное число λ, при любом $g \in D_A$ имеет место равенство:

$$R_\lambda (A - \lambda E) g = g, \tag{5.3}$$

или, что то же самое:

$$R_\lambda f = (A - \lambda E)^{-1} f \tag{5.4}$$

для любого $f \in \Delta_A(\lambda)$.

Рассмотрим сначала случай, когда λ принадлежит полуплоскости Π. Так как, согласно 1),

$$R_\lambda H \subset D_{A^*},$$

то $R_\lambda f$ можно представить в виде:

$$R_\lambda f = g + \varphi + \psi, \tag{5.5}$$

где

$$g \in D_A, \quad \varphi \in \mathfrak{N}_{\overline{\lambda}} = H \ominus \Delta_A(\overline{\lambda}), \quad \psi \in \mathfrak{N}_\lambda = H \ominus \Delta_A(\lambda).$$

Применим к обеим частям равенства (5.5) оператор $A^* - \lambda E$; принимая во внимание 1), получим:

$$f = (A - \lambda E) g + (\bar{\lambda} - \lambda) \psi. \tag{5.6}$$

Так как $f \in \Delta_A(\lambda)$, то отсюда следует, что $\psi = 0$. Таким образом, согласно (5.6),

$$f = (A - \lambda E) g,$$

откуда

$$g = (A - \lambda E)^{-1} f.$$

Равенство (5.5) принимает теперь следующий вид:

$$R_\lambda f = (A - \lambda E)^{-1} f + \varphi. \tag{5.7}$$

Применяя к обеим частям последней формулы оператор $A^* - \bar{\lambda} E$, получим:

$$(A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda f = (A - \bar{\lambda} E)(A - \lambda E)^{-1} f + (\lambda - \bar{\lambda}) \varphi.$$

Поскольку слагаемые в правой части взаимно ортогональны, а оператор $(A - \bar{\lambda} E)(A - \lambda E)^{-1}$ изометрический, отсюда вытекает равенство:

$$\| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda f \|^2 = \| f \|^2 + | \lambda - \bar{\lambda} |^2 \| \varphi \|^2.$$

Сопоставляя последнее соотношение с условием 2), заключаем, что

$$\varphi = 0.$$

Из (5.7) тогда непосредственно следует (5.4). Этим доказана справедливость равенства (5.3) для любого λ из полуплоскости Π.

Если λ принадлежит другой полуплоскости Π_1, то $\bar{\lambda} \in \Pi$; принимая во внимание условия 3) и 1), имеем для любых $g \in D_A$ и $h \in H$:

$$(R_\lambda (A - \lambda E) g, h) = (g, (A^* - \bar{\lambda} E) R_{\bar{\lambda}} h) = (g, h).$$

Так как h произвольно, то отсюда следует справедливость равенства (5.3) и для значений λ из полуплоскости Π_1. Таким образом, равенство (5.3) полностью установлено.

Покажем теперь, что, каковы бы ни были невещественные числа λ и μ, для любого $f \in \Delta_A(\lambda)$ справедливо равенство

$$R_\mu f - R_\lambda f = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda f. \tag{5.8}$$

Действительно, в силу (5.4), имеем

$$R_\mu (A - \lambda E) R_\lambda f = R_\mu f. \tag{5.9}$$

С другой стороны, поскольку, в силу (5.4), $R_\lambda f \in D_A$, заменяя в (5.3) λ на μ и полагая $g = R_\lambda f$, получим:

$$R_\mu (A - \mu E) R_\lambda f = R_\lambda f. \tag{5.10}$$

Вычитая из (5.9) равенство (5.10), придем к равенству (5.8).

Докажем далее, что для любого невещественного $\lambda \in \Pi$ и любого $h \in H$ выполняется соотношение:

$$\| R_\lambda h \|^2 \leqslant \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} (R_\lambda h, h), \tag{5.11}$$

где $\tau = \operatorname{Im} \lambda$. В самом деле, принимая во внимание условие 1), имеем:

$$\| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \|^2 = \| h + (\lambda - \bar{\lambda}) R_\lambda h \|^2 =$$
$$= \| h \|^2 + 4\tau^2 \| R_\lambda h \|^2 - 4\tau \operatorname{Im} (R_\lambda h, h),$$

откуда

$$4\tau^2 [\| R_\lambda h \|^2 - \frac{1}{\tau} \operatorname{Im} (R_\lambda h, h)] = \| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \|^2 - \| h \|^2.$$

Так как, согласно условию 2), правая часть последнего неравенства неположительна, то отсюда непосредственно следует (5.11). Отметим еще, что в силу (5.4)

$$\overline{R_\lambda \Delta_A (\lambda)} = \overline{D_A} = H \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0). \tag{5.12}$$

Сопоставляя соотношения (5.8), (5.11), (5.12) и условия 3), 4), мы видим, что семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 4 и, подавно, теоремы 3, если положить

$$\mathfrak{m} = \dim (H \ominus \Delta_A (\lambda_0)),$$
$$\mathfrak{L} = \Delta_A (\lambda_0).$$

Поэтому, как было установлено при доказательстве теоремы 3, семейство R_λ является обобщенной резольвентой замкнутого симметрического оператора A_1, определенного на многообразии $D_{A_1} = R_{\lambda_0} \Delta_A (\lambda_0)$ формулой [см. (4.5)]:

$$A_1 g = R_{\lambda_0}^{-1} g + \lambda_0 g \quad (g \in D_{A_1}).$$

Обращаясь к установленному выше равенству (5.4), легко убедиться в том, что так определенный оператор A_1 совпадает с исходным оператором A. Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание. Условия 2) в теореме 6 можно заменить следующим: 2') при любом $h \in H$

$$i\tau [(A^* R_\lambda h, R_\lambda h) - (R_\lambda h, A^* R_\lambda h)] \geqslant 0.$$

Действительно, предполагая условие 1) выполненным, имеем:

$$\| h \|^2 - \| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \|^2 = \| (A^* - \lambda E) R_\lambda h \|^2 - \| (A^* - \bar{\lambda} E) R_\lambda h \|^2 =$$
$$= - \bar{\lambda} (A^* R_\lambda h, R_\lambda h) - \lambda (R_\lambda h, A^* R_\lambda h) + \lambda (A^* R_\lambda h, R_\lambda h) + \bar{\lambda} (R_\lambda h, A^* R_\lambda h) =$$
$$= (\lambda - \bar{\lambda}) [(A^* R_\lambda h, R_\lambda h) - (R_\lambda h, A^* R_\lambda h)].$$

Отсюда видно, что при выполнении условия 1) условие 2) равносильно условию 2') *.

---

* Необходимость условий 1) и 2) вытекает непосредственно из одного предложения М. А. Наймарка [см. (9), следствие 6].

2. Рассмотрим несколько вспомогательных предложений, относящихся к так называемым квазиунитарным и квазисамосопряженным расширениям соответственно изометрических и симметрических операторов. Понятие квазиунитарного, а также квазисамосопряженного расширения для операторов с равными конечными дефектными числами было введено в работах М. С. Лившица ([6]), ([7]). В работе ([18]) мы ввели в рассмотрение квазиунитарные расширения преобразований Кели замкнутого симметрического оператора с любыми дефектными числами, но с плотной областью определения, а также квазисамосопряженные расширения самого симметрического оператора.

Пусть U — замкнутый изометрический оператор в унитарном пространстве H с областью определения D_U и с областью значений $\bar{\Delta}_U$. Квазиунитарным расширением W оператора U будем называть любой линейный ограниченный оператор в H, определенный на всем H, являющийся расширением оператора U и удовлетворяющий условию:

$$W(H \ominus D_U) \subset H \ominus \Delta_U. \tag{5.13}$$

Таким образом оператор W служит квазиунитарным расширением оператора U тогда и только тогда, когда он представим в виде ортогональной суммы операторов:

$$W = U \oplus C,$$

где C — произвольный ограниченный линейный оператор с областью определения $D_C = H \ominus D_U$ и с областью значений $\Delta_C \subset H \ominus \Delta_U$. Об операторе C будем говорить, что он определяет квазиунитарное расширение W оператора U.

ЛЕММА 8. *Пусть U — замкнутый изометрический оператор, действующий в унитарном пространстве H, а W — определенный на всем пространстве линейный оператор в H, являющийся расширением оператора U и не превосходящий по норме единицы. Тогда W есть квазиунитарное расширение оператора U.*

Доказательство. Достаточно установить, что в рассматриваемом случае выполняется соотношение (5.13).

Так как оператор W не превосходит по норме единицы, то для любых элементов $f \in D_U$, $\varphi \in H \ominus D_U$ и любого комплексного z справедливо неравенство:

$$\| zf + \varphi \|^2 - \| W(zf + \varphi) \|^2 \geqslant 0.$$

Произведя элементарные преобразования с учетом того, что $Wf = Uf$ и $\| Uf \| = \| f \|$, придем к неравенству

$$\| \varphi \|^2 - \| W\varphi \|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,[z(Uf, W\varphi)] \geqslant 0.$$

Последнее соотношение может выполняться для всех комплексных значений z лишь в том случае, если

$$(Uf, W\varphi) = 0.$$

Этим самым доказано соотношение (5.13), а вместе с ним и лемма.

Пусть A — замкнутый симметрический оператор, действующий в унитарном пространстве H и имеющий плотную в H область определения. При невещественном λ обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектное подпространство оператора A для точки λ:

$$\mathfrak{N}_\lambda = H \ominus \Delta_A(\lambda)\,*.$$

Выбрав произвольное невещественное число λ, рассмотрим какой-либо линейный ограниченный оператор C, отображающий $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Квазисамосопряженным расширением оператора A, определяемым оператором C, будем называть оператор A_C, заданый на многообразии D_{A_C} элементов g вида

$$g = f + C\psi - \psi \quad (f \in D_A, \psi \in \mathfrak{N}_\lambda) \tag{5.14}$$

формулой

$$A_C g = Af + \lambda C\psi - \bar\lambda\psi. \tag{5.15}$$

Поскольку пересечение многообразий D_A, $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ состоит лишь из нулевого элемента, представление элемента g в виде (5.14) единственно и, следовательно, формулы (5.14), (5.15) определяют оператор A_C однозначно.

Ясно, что квазисамосопряженное расширение A_C оператора A является частью оператора A^*, сопряженного с A.

При прежнем невещественном значении λ рассмотрим изометрический оператор

$$U_\lambda = (A - \bar\lambda E)(A - \lambda E)^{-1}.$$

Введенным выше оператором C определяется некоторое квазиунитарное расширение W_λ оператора U_λ:

$$W_\lambda = U_\lambda \oplus C. \tag{5.16}$$

Принимая во внимание равенство

$$U_\lambda - E = (\lambda - \bar\lambda)(A - \lambda E)^{-1}$$

и уже отмеченную линейную независимость многообразий D_A, $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, легко заключить, что оператор W_λ удовлетворяет условию:

$$\text{из } W_\lambda h - h = 0 \text{ следует } h = 0.$$

Таким образом, для оператора $W_\lambda - E$ существует обратный.

Представляя элемент $f \in D_A$ в виде

$$f = (U_\lambda - E)\,h,$$

где $h \in \Delta_A(\lambda)$, и принимая во внимание равенство

$$A = (\lambda U_\lambda - \bar\lambda E)(U_\lambda - E)^{-1},$$

---

* В предыдущих работах автора [см. (14), (15) (17) — (19)] это подпространство обозначалось через $\mathfrak{M}_{\bar\lambda}$.

формулы (5.14) и (5.15) можно записать так:

$$g = (U_\lambda - E)h + (C - E)\psi,$$
$$A_C g = (\lambda U_\lambda - \bar{\lambda}E)h + (\lambda C - \bar{\lambda}E)\psi \quad (h \in \Delta_A(\lambda),\ \psi \in \mathfrak{N}_\lambda),$$

т. е., согласно (5.16),

$$g = (W_\lambda - E)(h + \psi),$$
$$A_C g = (\lambda W_\lambda - \bar{\lambda}E)(h + \psi),$$

откуда

$$A_C = (\lambda W_\lambda - \bar{\lambda}E)(W_\lambda - E)^{-1}. \tag{5.17}$$

Теперь нетрудно выразить и квазиунитарное расширение W_λ оператора U_λ через квазисамосопряженное расширение A_C оператора A. В силу (5.17), имеем:

$$A_C - \lambda E = (\lambda - \bar{\lambda})(W_\lambda - E)^{-1}.$$

Отсюда следует, что оператор $(A_C - \lambda E)^{-1}$ существует и определен на всем H и что

$$W_\lambda = (A_C - \bar{\lambda}E)(A_C - \lambda E)^{-1};$$

в частности, при любом $\psi \in \mathfrak{N}_\lambda$ справедлива формула

$$C\psi = (A_C - \bar{\lambda}E)(A_C - \lambda E)^{-1}\psi. \tag{5.18}$$

ЛЕММА 9. *Пусть λ_0 — какое-либо невещественное число и A_F — квазисамосопряженное расширение замкнутого симметрического оператора A в H $(\overline{D_A} = H)$, определяемое оператором F из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не перевосходящим по норме единицы. Тогда при любом невещественном λ из полуплоскости Π (верхней или нижней), содержащей точку λ_0, оператор $(A_F - \lambda E)^{-1}$ существует, ограничен и определен на всем H, а оператор*

$$X_\lambda = (A_F - \bar{\lambda}E)(A_F - \lambda E)^{-1} \tag{5.19}$$

является квазиунитарным расширением оператора U_λ, не превосходящим по норме единицы.

Доказательство. Рассмотрим квазиунитарное расширение W_{λ_0} оператора U_{λ_0}, определяемое оператором F. Полагая в формуле (5.17) $\lambda = \lambda_0$ и $C = F$, получим:

$$A_F = (\lambda_0 W_{\lambda_0} - \bar{\lambda}_0 E)(W_{\lambda_0} - E)^{-1}. \tag{5.20}$$

Отсюда следует равенство:

$$A_F - \lambda E = [(\lambda - \bar{\lambda}_0)E - (\lambda - \lambda_0)W_{\lambda_0}](W_{\lambda_0} - E)^{-1}, \tag{5.21}$$

верное для любого комплексного λ.

Пусть λ принадлежит полуплоскости Π (верхней или нижней), содержащей точку λ_0. Тогда

$$|\lambda - \lambda_0| < |\lambda - \bar{\lambda}_0|.$$

Принимая во внимание, что оператор W_{λ_0} по норме не превосходит единицы, заключаем, что оператор

$$[(\lambda-\bar{\lambda}_0)E-(\lambda-\lambda_0)W_{\lambda_0}]^{-1}$$

существует, ограничен и определен на всем H; то же самое можно утверждать, согласно формуле (5.21), и об операторе $(A_F-\lambda E)^{-1}$.

Из формулы (5.19) теперь непосредственно следует, что оператор X_λ определен на всем H; при этом ясно, что X_λ есть расширение оператора U_λ. Для того чтобы убедиться, что X_λ является квазиунитарным расширением оператора U_λ и по норме не превосходит единицы, достаточно, согласно лемме 8, доказать лишь последнее.

Подставляя в (5.19) вместо A_F выражение (5.20), после простых преобразований мы придем к формуле

$$X_\lambda=[(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0)E-(\bar{\lambda}-\lambda_0)W_{\lambda_0}][(\lambda-\bar{\lambda}_0)E-(\lambda-\lambda_0)W_{\lambda_0}]^{-1}. \tag{5.22}$$

Пусть h — произвольный элемент пространства H. Представим h в виде

$$h=[(\lambda-\bar{\lambda}_0)E-(\lambda-\lambda_0)W_{\lambda_0}]g, \tag{5.23}$$

где $g\in H$. Тогда, в силу (5.22),

$$X_\lambda h=[(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_0)E-(\bar{\lambda}-\lambda_0)W_{\lambda_0}]g. \tag{5.24}$$

Формулы (5.23) и (5.24) позволяют установить при помощи элементарных выкладок следующее равенство:

$$\|h\|^2-\|X_\lambda h\|^2=(|\lambda-\bar{\lambda}_0|^2-|\lambda-\lambda_0|^2)(\|g\|^2-\|W_{\lambda_0}g\|^2).$$

Так как оба сомножителя в правой части неотрицательны, то отсюда вытекает, что

$$\|X_\lambda h\|\leqslant\|h\|.$$

Поскольку последнее соотношение справедливо для любого $h\in H$, то оператор X_λ по норме не превосходит единицы, и лемма таким образом доказана.

Следующая лемма содержит предложение, которое можно рассматривать как усиленное обратное по отношению к лемме 9.

ЛЕММА 10. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор, действующий в унитарном пространстве H и имеющий плотную в H область определения, а B — оператор в H, являющийся расширением оператора A.*

Если для какого-нибудь λ из полуплоскости Π, содержащей точку λ_0, оператор $(B-\lambda E)^{-1}$ существует и определен на всем H, а оператор $(B-\bar{\lambda}E)(B-\lambda E)^{-1}$ не превосходит по норме единицы, то B есть квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое некоторым оператором F из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, по норме не превосходящим единицы.

Доказательство. Пусть λ — невещественное число из полуплоскости П, для которого выполняются указанные в лемме условия. Положим:

$$Y_\lambda = (B - \bar{\lambda}E)(B - \lambda E)^{-1}. \tag{5.25}$$

Оператор Y_λ по условию определен на всем H и не превосходит по норме единицы; кроме того, он является расширением оператора U^λ, так как B есть расширение оператора A. Тогда, согласно лемме 8, Y_λ есть квазиунитарное расширение оператора U_λ, определяемое некоторым оператором K из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^-$, не превосходящим по норме единицы.

Из (5.25) следует:

$$Y_\lambda - E = (\lambda - \bar{\lambda})(B - \lambda E)^{-1},$$

откуда

$$B = (\lambda Y_\lambda - \bar{\lambda}E)(Y_\lambda - E)^{-1}. \tag{5.26}$$

Сопоставляя последнее равенство с формулой (5.17), заключаем, что B можно рассматривать как квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое оператором K.

Обратимся теперь к лемме 9; меняя в ней ролями λ и λ_0 и заменяя оператор A_F на B, приходим к выводу, что оператор

$$(B - \lambda_0 E)^{-1}$$

существует и определен на всем H, а оператор

$$Y_{\lambda_0} = (B - \bar{\lambda}_0 E)(B - \lambda_0 E)^{-1} \tag{5.27}$$

есть квазиунитарное расширение оператора U_{λ_0}, определяемое некоторым оператором F из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящим по норме единицы. Выражая в (5.27) B через Y_{λ_0} (аналогично тому, как из (5.25) была получена формула (5.26)), находим:

$$B = (\lambda_0 Y_{\lambda_0} - \bar{\lambda}_0 E)(Y_{\lambda_0} - E)^{-1},$$

откуда в соответствии с формулой (5.17) следует, что B совпадает с квазисамосопряженным расширением A_F оператора A, определяемым оператором F. Лемма доказана.

3. Перейдем к рассмотрению основной теоремы об общей формуле резольвент замкнутого симметрического оператора с плотной областью определения. Ввиду соотношения

$$R_{\bar{\lambda}} = R_\lambda^*,$$

достаточно эту формулу установить для всех невещественных значений λ из одной полуплоскости (верхней или нижней). Выбрав какое-либо невещественное λ_0, мы и ограничимся рассмотрением семейства R_λ в полуплоскости П, содержащей точку λ_0.

ТЕОРЕМА 7. *Всякая обобщенная резольвента R_λ замкнутого симметрического оператора A в H, имеющего плотную в H область определения, представима в виде:*

$$R_\lambda = (A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1} \quad (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 > 0), \tag{5.28}$$

где $F(\lambda)$ — некоторая регулярная в полуплоскости операторная функция из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящая по норме единицы, а $A_{F(\lambda)}$ — квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое оператором $F(\lambda)$.

Обратно, всякой операторной функцией $F(\lambda)$, обладающей перечисленными свойствами, определяется по формуле (5.28) *некоторая обобщенная резольвента оператора A.*

Доказательство. Предположим сначала, что R_λ есть обобщенная резольвента оператора A. Тогда, как мы видели в § 1 (следствие теоремы 2), оператор R_λ является при любом невещественном λ расширением оператора $(A-\lambda E)^{-1}$. Поскольку, кроме того, оператор R_λ^{-1} существует, то оператор

$$B_\lambda = R_\lambda^{-1} + \lambda E$$

служит, очевидно, расширением оператора A.

Покажем, что при любом невещественном λ из полуплоскости П оператор B_λ можно рассматривать как квазисамосопряженное расширение оператора A, определяемое некоторым оператором $F(\lambda)$ из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящим по норме единицы. Для этого, согласно лемме 10, достаточно убедиться в том, что:

1) оператор $(B_\lambda - \lambda E)^{-1}$ существует и определен на всем H;

2) оператор $(B_\lambda - \bar{\lambda}E)(B_\lambda - \lambda E)^{-1}$ не превосходит по норме единицы.

Справедливость первого утверждения очевидна, так как

$$B_\lambda - \lambda E = R_\lambda^{-1}.$$

Далее, имеем:

$$(B_\lambda - \bar{\lambda}E)(B \ - \lambda E)^{-1} = E + (\lambda - \bar{\lambda})(B_\lambda - \lambda E)^{-1} =$$

$$= E + (\lambda - \bar{\lambda}) R_\lambda;$$

справедливость второго утверждения теперь непосредственно следует из соотношения (5.2), установленного в ходе доказательства теоремы 6.

Итак, для любого λ из полуплоскости П имеет место формула:

$$R_\lambda^{-1} + \lambda E = A_{F(\lambda)}, \tag{5.29}$$

где $F(\lambda)$ — некоторый оператор из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящий по норме единицы.

Покажем, что $F(\lambda)$ является регулярной в полуплоскости П операторной функцией параметра λ. Для этого заметим, что, согласно (5.18), при

любом невещественном λ из полуплоскости Π и при любом $\psi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ имеет место формула:

$$E(\lambda) = (A_{F(\lambda)} - \bar{\lambda}_0 E)(A_{F(\lambda)} - \lambda_0 E)^{-1}\psi,$$

$$F(\lambda)\psi = \psi + (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0)(A_{F(\lambda)} - \lambda_0 E)^{-1}\psi.$$

Принимая во внимание (5.29), легко получить отсюда равенство

$$F(\lambda)\psi = \psi + (\lambda_0 - \bar{\lambda}_0) R_\lambda [E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda]^{-1}\psi, \qquad (5.30)$$

справедливое при любом невещественном $\lambda \in \Pi$ и при любом $\psi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$*.

Так как обобщенная резольвента R_λ является регулярной в полуплоскости операторной функцией, то, согласно формуле (5.30), для доказательства регулярности операторной функции $F(\lambda)$ достаточно установить справедливость следующего предложения:

какова бы ни была точка μ *в полуплоскости* Π, *норма*

$$\| [E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda]^{-1} \|,$$

как функция от λ, *ограничена в достаточно малой окрестности точки* μ **.

Для доказательства рассмотрим оператор

$$W_\lambda = E + (\lambda - \bar{\lambda}) R_\lambda. \qquad (5.31)$$

В силу установленного ранее соотношения (5.2),

$$\| W_\lambda h \| \leqslant \| h \| \qquad (5.32)$$

при любом $h \in H$ и любом невещественном λ. Выражая в равенстве (5.31) R_λ через W_λ, приходим к формуле:

$$E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} [(\lambda_0 - \bar{\lambda}) E + (\lambda - \lambda_0) W_\lambda].$$

---

* Поскольку оператор $(A_{F(\lambda)} - \lambda_0 E)^{-1}$ существует и определен на всем H, то из соотношения

$$A_{F(\lambda)} - \lambda_0 E = R_\lambda^{-1} + (\lambda - \lambda_0) E = [E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda] R_\lambda^{-1}$$

вытекает, что оператор $[E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda]^{-1}$ существует, определен на всем H и, следовательно, в силу замкнутости, ограничен.

** Здесь мы опираемся на следующее легко доказываемое предложение: пусть $G(\lambda)$ — семейство линейных ограниченных операторов в H, зависящих от комплексного параметра λ. Если: 1) операторная функция $G(\lambda)$ дифференцируема в точке μ в смысле сильной сходимости операторов; 2) для каждого λ оператор $G^{-1}(\lambda)$ существует и определен на всем H; 3) норма $\| G^{-1}(\lambda) \|$, как функция от λ, ограничена в некоторой окрестности точки μ, то операторная функция $G^{-1}(\lambda)$ также дифференцируема в точке μ в смысле сильной сходимости. Для доказательства рассматривается равенство

$$G^{-1}(\lambda) - G^{-1}(\mu) = - G^{-1}(\lambda) [G(\lambda) - G(\mu)] G^{-1}(\mu),$$

позволяющее заключить, что $G^{-1}(\lambda)$ сильно непрерывна в точке μ. Разделив затем обе части на $\lambda - \mu$ $(\lambda \neq \mu)$, переходим к пределу при $\lambda \to \mu$.

Отсюда, учитывая (5.32), легко получить неравенство:

$$\| [E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda]^{-1} \| \leqslant \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{|\bar{\lambda} - \lambda_0| - |\lambda - \lambda_0|},$$

верное для любого невещественного λ из полуплоскости П. Правая часть последнего соотношения, как функция от λ, ограничена в достаточно малой окрестности точки μ. Этим самым регулярность операторной функции $F(\lambda)$ в полуплоскости П доказана.

Таким образом, входящая в формулу (5.29) операторная функция $F(\lambda)$ обладает всеми перечисленными в теореме свойствами. Из равенства (5.29) теперь непосредственно следует, что обобщенная резольвента допускает представление (5.28). Этим завершается доказательство первой части теоремы.

Приступая к доказательству второй части теоремы, предположим, что $F(\lambda)$ есть регулярная в полуплоскости П операторная функция из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$, не превосходящая по норме единицы. Каждому значению λ из полуплоскости П соответствует некоторое квазисамосопряженное расширение $A_{F(\lambda)}$ оператора A, определяемое оператором $F(\lambda)$. В силу леммы 9, при любом $\lambda \in$ П оператор $(A_{F(\lambda)} - \lambda E)^{-1}$ существует и определен на всем H. Определив семейство R_λ для значений λ из полуплоскости П формулой (5.28), положим для значений λ из другой полуплоскости $П_1$

$$R_\lambda = R^*_{\bar{\lambda}} .$$

Покажем, что так определенное семейство R_λ служит обобщенной резольвентой оператора A. Для этого достаточно установить, что семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.

Поскольку при любом $\lambda \in$ П оператор $A_{F(\lambda)}$ является частью оператора A^*, то из формулы (5.28) непосредственно следует, что выполняется условие 1) теоремы 6. Если, кроме того, принять во внимание лемму 9, то становится очевидным, что семейство R_λ удовлетворяет условию 2). Условию 3) семейство R_λ удовлетворяет по определению.

Докажем, что R_λ является регулярной в полуплоскости П операторной функцией и что, следовательно, условие 4) теоремы 6 также выполняется.

С этой целью введем в рассмотрение семейство $T(\lambda)$ квазиунитарных расширений оператора

$$U_{\lambda_0} = (A - \bar{\lambda}_0 E)(A - \lambda_0 E)^{-1},$$

определяемых операторами $F(\lambda)$, т. е. для любого $\lambda \in$ П положим

$$T(\lambda) = U_{\lambda_0} \oplus F(\lambda).$$

Ясно, что $T(\lambda)$ является регулярной операторной функцией, причем $\| T(\lambda) \| = 1$.

Согласно равенству (5.21), установленному при доказательстве леммы 9, для любого λ из полуплоскости Π имеет место формула:

$$A_{F(\lambda)} - \lambda E = [(\lambda - \overline{\lambda}_0) E - (\lambda - \lambda_0) T(\lambda)] [T(\lambda) - E]^{-1}.$$

Сопоставляя последнее соотношение с формулой (5.28), получаем для любого $\lambda \in \Pi$ равенство:

$$R_\lambda = [T(\lambda) - E] [(\lambda - \lambda_0) E - (\lambda - \lambda_0) T(\lambda)]^{-1}. \qquad (5.33)$$

Поскольку для нормы обратного оператора, входящего в правую часть, имеем очевидную оценку:

$$\| [(\lambda - \overline{\lambda}_0) E - (\lambda - \lambda_0) T(\lambda)]^{-1} \| \leqslant \frac{1}{|\lambda - \overline{\lambda}_0| - |\lambda - \lambda_0|},$$

из равенства (5. 33) вытекает регулярность операторной функции R_λ в полуплоскости Π *.

Таким образом, семейство R_λ удовлетворяет всем условиям теоремы 6 и, следовательно, служит обобщенной резольвентой оператора A.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Нетрудно показать, что для квазисамосопряженных расширений оператора A справедлива формула:

$$(A_F)^* = A_{F^*} \qquad (5.34)$$

(если F есть оператор из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}_0}$, то F^* отображает $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}_0}$ в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$).

Принимая во внимание равенство (5.34), заключаем, что формула (5.28) окажется справедливой и для значений λ из другой полуплоскости, если операторную функцию $F(\lambda)$ в этой полуплоскости определить равенством

$$F(\overline{\lambda}) = F^*(\overline{\lambda}) \quad (\operatorname{Im}\lambda \cdot \operatorname{Im}\lambda_0 < 0).$$

Замечание 2. Так как различными операторными функциями $F(\lambda)$ из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\overline{\lambda}_0}$ определяются, очевидно, различные семейства квазисамосопряженных расширений $A_{F(\lambda)}$ оператора A, то из формулы (5.28) следует, что различным $F(\lambda)$ соответствуют различные обобщенные резольвенты R_λ.

Поступило
16. X. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950.

[2] Красносельский М. А., О расширении эрмитовых операторов с неплотной областью определения, Доклады Ак. наук СССР, т. LIX, № 1 (1948), 13—16.

[3] Красносельский М. А., О самосопряженных расширениях эрмитовых операторов, Украинский математический журнал Ак. наук УССР, № 1 (1949), 21—38.

* См. вторую сноску на стр. 83.

[4] Крейн М. Г., Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице, Доклады Ак. наук СССР, т. XLIII, № 8 (1944), 339—342.
[5] Крейн М. Г., О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m,m), Доклады Ак. наук СССР, т. LII, № 8 (1946), 657—660.
[6] Лившиц М. С., Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, Матем. сб., т. 19(61), в. 2 (1946), 239—260.
[7] Лившиц М. С., К теории изометрических операторов с равными дефектными числами, Доклады Ак. наук СССР, т. LVIII, № 1 (1947), 13—15.
[8] Наймарк М. А., О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., т. 4 (1940), 53—104.
[9] Наймарк М. А., Спектральные функции симметрического оператора, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., т. 4 (1940), 277—318.
[10] Наймарк М. А., О спектральных функциях симметрического оператора, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем, т. 7 (1943), 285—296.
[11] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов. I, Усп. матем. наук., вып. IX (1941), 3—125.
[12] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, М. —Л., 1947.
[13] Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, Москва, 1951.
[14] Штраус А. В., Спектральные функции симметрического оператора с конечными индексами дефекта, Учен. зап. Куйбыш. гос. педагогич. и учительск. ин-та, вып. 11 (1952), 17—66.
[15] Штраус А. В., К теории эрмитовых операторов, Доклады Ак. наук СССР, т. LXVII, № 4 (1949), 611—614.
[16] Штраус А. В., Об одном классе регулярных оператор-функций, Доклады Ак. наук СССР, т. LXX, № 4 (1950), 577—580.
[17] Штраус А. В., Об обобщенных резольвентах симметрического оператора, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXI, № 2 (1950), 241—244.
[18] Штраус А. В., К теории обобщенных резольвент симметрического оператора, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXVIII, № 2 (1951), 217—220.
[19] Штраус А. В., О характеристических свойствах обобщенных резольвент, Доклады Ак. наук СССР, т. LXXXII, № 2 (1952), 209—212.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 87—94

Ю. М. ГАВРИЛОВ

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И КРИТЕРИЯХ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В работе устанавливается связь между условиями сходимости простых итераций и итераций Зейделя при решении систем линейных алгебраических уравнений с симметрическими и положительно определенными матрицами.

Введение

При выполнении определенных требований систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} x_k = p_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

или

$$A_0 X = P \tag{2}$$

можно решать путем последовательных приближений, т. е. итераций: простых, Зейделя и т. д.

Задача «исследовать связь между обоими методами в отношении условий их сходимости», поставленная Д. Ю. Пановым, решалась В. К. Ивановым [см. ([1]), стр. 477] без наложения ограничений на матрицу A_0 заданной системы и матрицу системы одночленных уравнений

$$x_j = L_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

соответствующую той или иной подготовке системы к вычислению приближений.

В данной работе та же задача решается для класса симметрических и положительно определенных матриц A_0 при условии, что каждое уравнение с номером j решается относительно неизвестного, имеющего тот же номер. Рассматриваются: 1) обычно принятое и 2) одно необычное преобразование системы уравнений (3).

1) Под обычным преобразованием системы (3) подразумевается такое преобразование

$$X = AX + F, \tag{4}$$

при котором матрица A системы (4) имеет нулевые диагональные элементы. Она может быть выражена через элементы матрицы

$$A_0 = A_1 + A_2, \tag{5}$$

где A_1 — диагональная матрица (составленная из диагональных элементов матрицы A_0), в такой последовательности:

На основании (2) и (5), имеем:

$$(A_1 + A_2) X = P,$$
$$A_1 X = - A_2 X + P,$$
$$X = - A_1^{-1} A_2 X + A_1^{-1} P;$$

значит, согласно (4),

$$A = - A_1^{-1} A_2. \tag{6}$$

2) Под необычным преобразованием системы (3) подразумевается такое преобразование

$$X = {}'AX + P_1, \tag{7}$$

при котором матрица $'A$ системы (7) имеет ненулевые диагональные элементы. Она получается в такой последовательности:

1) сначала матрица A_0 нормируется к единице путем деления каждой из ее строк на $\max \delta_{jj}$, что дает A_{01};

2) затем имеет место следующее преобразование, аналогичное указанному на числовом примере В. Н. Фаддеевой [см. ([2]), стр. 125]:

$$A_{01} X = P_1,$$
$$X = (E - A_{01}) X + P_1,$$

откуда, согласно (7),

$$'A = E - A_{01}. \tag{8}$$

§ 1. Условия сходимости простых итераций при обычном преобразовании A

Пусть дана система (2) такая, что

а) ее матрица A_0 симметрична, т. е.

$$\delta_{jk} = \delta_{kj}; \tag{9}$$

б) квадратичная форма

$$Q = \sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk} x_j x_k, \tag{10}$$

составленная с матрицей A_0, положительно определенна, т. е. $Q > 0$ для любого вектора $X \neq 0$.

Для выполнения требования б) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\delta_{11} > 0; \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} > 0; \ldots ; \begin{vmatrix} \delta_{11}, \ldots, \delta_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}, \ldots, \delta_{nn} \end{vmatrix} > 0, \tag{11}$$

называемые критериями знакоопределенности квадратичных форм Сильвестра.

Как известно, если имеется в виду обычное преобразование с матрицей A, то требования а) и б) представляют собой необходимые и достаточные условия сходимости итераций Зейделя.

Покажем, что дополнительным (кроме а) б)) необходимым и достаточным условием сходимости простых итераций является требование того, чтобы

в) квадратичная форма

$$R = \sum_{j,k=1}^{n} \dot{\delta}_{jk} x_j x_k, \tag{12}$$

составленная с матрицей $\dot{A}_0$, где $\dot{A}_0 = A_1 - A_2$, была положительно определенной, т. е. чтобы выполнялось: $R > 0$ для любого вектора $X \neq 0$.

Другими словами, докажем, что сходимость простых итераций обусловливается следующей теоремой:

ТЕОРЕМА I. *Если $A_0 = A_1 + A_2$ является действительной симметрической матрицей n-го порядка со всеми положительными элементами диагональной матрицы A_1, то необходимым и достаточным условием того, чтобы все собственные числа матрицы $A = A_1^{-1} A_2$ были по абсолютной величине меньшими единицы, является требование, чтобы положительно определенной была как заданная матрица A_0, так и матрица $\dot{A}_0 = A_1 - A_2$.*

Доказательство. Как известно, необходимым и достаточным условием сходимости простых итераций является требование, чтобы максимальное из собственных чисел матрицы A было по модулю меньше единицы:

$$\lambda_A = \max |\lambda_i| < 1. \tag{13}$$

Примем для общности, что некоторое собственное число λ_i матрицы A комплексно. Пусть Z_i — принадлежащий ему собственный вектор-столбец, $\overline{Z}_i'$ — транспонированный и комплексно сопряженный вектор. Тогда можно написать:

$$-A_1^{-1} A_2 Z_i = \lambda_i Z_i$$

или

$$A_2 Z_i + \lambda_i A_1 Z_i = 0. \tag{14}$$

Умножая (14) слева на $\overline{Z}_i'$ и заменяя $A_2 = A_0 - A_1$, получим:

$$\overline{Z}_i' A_0 Z_i + (\lambda_i - 1) \overline{Z}_i' A_1 Z_i = 0. \tag{15}$$

Более подробно равенства (15) можно переписать в виде

$$\sum_{j,k=1}^{n} \delta_{jk} z_j^{(i)} z_k^{(i)} + (\lambda_i - 1) \sum_{j=1}^{n} \delta_{jj} | z_j^{(i)} |^2 = 0, \tag{16}$$

где

$$Z_i = (z_1^{(i)}, \ldots, z_n^{(i)}).$$

Нетрудно видеть, что обе квадратичные формы, входящие в (16), положительно определенны: первая, как симметрическая, а значит, действительная и положительно определенная по условию, а вторая,

как очевидно положительная в связи с тем, что, согласно требованию б), все $\delta_{jj} > 0$, так как иначе не выполнялось бы неравенство $Q > 0$ при $x_j \neq 0$ и всех $x_k = 0$ при $k \neq j$.

Отсюда приходим к заключению, что множитель $(\lambda_i - 1)$, который фигурирует в (15), может быть только действительным числом $\lambda_i - 1 < 0$, откуда

$$\lambda_i < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

В связи с тем, что условие (17) не совпадает с условием (13), сходимость простых итераций требованиями а) и б) еще не определяется. Для установления искомого требования в) умножим (14) слева на Z_i' и сделаем замену $A_2 = -\mathring{A}_0 + A_1$, где $\mathring{A}_0 = A_1 - A_2$. Тогда получим:

$$-Z_i'\mathring{A}_0 Z_i + (\lambda_i + 1) Z_i' A_1 Z_i = 0. \tag{18}$$

На основании (18) заключаем, что для осуществления недостающего, согласно (13) и (17), условия

$$-1 < \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{19}$$

действительно достаточно выполнения требования в).

Для доказательства необходимости вошедших в теорему I требований остается показать, что из условия (13) вытекают как следствия соотношения (15) и (18) не только при $X = Z_i$, но и при произвольных $X \neq 0$.

В связи с полной аналогией между Q и R, покажем это только для Q.

Допустим, что все λ_i попарно различны. В этом предположении все векторы $Z_1, \ldots, Z_n$ линейно независимы и их можно принять за базис пространства. Пусть X — любой вектор пространства и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — его координаты в базисе $Z, \ldots, Z_n$, т. е. пусть

$$X = x_1 Z_1 + \cdots + x_n Z_n.$$

Через выбранные координаты форма Q выражается таким образом:

$$X' A_0 X = \Big(\sum_j x_j Z_j\Big) A_0 \Big(\sum_k x_k Z_k\Big) = \sum_{j,k} x_j x_k Z' A_0 Z_k. \tag{20}$$

Заменяя $A_2 = A_0 - A_1$, запишем (14) один раз для Z_j, а другой раз для Z_k и умножим слева первое выражение на Z_k', а второе — на Z_j'. Тогда получим:

$$Z_k' A_0 Z_j + (\lambda_j - 1) Z_k' A_1 Z_j = 0, \tag{21}$$
$$Z_j' A_0 Z_k + (\lambda_k - 1) Z_j A_1 Z_k = 0. \tag{22}$$

Вычитая протранспонированное выражение (21) из (22), найдем:

$$0 + (\lambda_k - \lambda_j) Z_j' A_1 Z_k = 0,$$

т. е.

$$Z_j' A_1 Z_k = 0 \quad (j \neq k), \tag{23}$$

так как, ввиду принятого выше допущения, $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$.

Из (22) и (23) получаем окончательно

$$Z_j' A_0 Z_k = 0 \quad (j \neq k). \tag{24}$$

Равенство (24) свидетельствует о том, что при составлении суммы (20) нет необходимости учитывать произведения величин, имеющих разноименные индексы, и что поэтому следствием (20) является равенство:

$$X'A_0X = \sum_i x_i^2 Z_i' A_0 Z_i. \tag{25}$$

Но, согласно (13) и (15), при сходящемся процессе простых итераций должно быть $\overline{Z}_i' A_0 Z_i > 0$; поэтому, в силу положительности x_i^2, на основании (25) получаем окончательно:

$$X'A_0X > 0, \tag{26}$$

что и требовалось доказать.

Сделанное допущение об отсутствии кратных собственных чисел матрицы A не является существенным, ибо его выполнения можно добиться сколь угодно малой деформацией матрицы A_0. Поэтому из соображений непрерывности положительность формы Q, а также формы R, оказывается необходимым условием сходимости простых итераций (конечно, в предположении положительности диагональных элементов матрицы A_0) и при наличии кратных собственных чисел.

На основании доказанной таким образом теоремы I приходим к выводу о том, что в случае положительных диагональных элементов класс симметрических матриц, для которых сходятся итерации Зейделя, шире класса матриц, для которых сходятся простые итерации; это различие определяется требованиями а) и б), т. е. условием $\lambda_i < 1$, с одной стороны, и теми же требованиями вместе с требованием в), эквивалентным условию $-1 < \lambda_i$, с другой стороны.

Чтобы проиллюстрировать данное различие на простом числовом примере, рассмотрим, к чему сводится требование в) в случае матрицы A_0 третьего порядка. Здесь оно может оказывать влияние только на последний в цепи неравенств (11) главный минор третьего порядка

$$\delta_{11}\delta_{22}\delta_{33} - 2\delta_{11}\delta_{23}\delta_{31} - \delta_{11}\delta_{23}^2 - \delta_{22}\delta_{31}^2 - \delta_{33}\delta_{12}^2 > 0. \tag{27}$$

Полагая для простоты, что $\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta$ и $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$, получим:

$$1 - 2\delta^3 - 3\delta^2 > 0. \tag{28}$$

Нетрудно проверить, что неравенство (28) справедливо при $0 < \delta < 0{,}5$ в то время как аналогичное ему неравенство

$$1 + 2\delta^3 - 3\delta^2 > 0, \tag{29}$$

соответствующее условию б), справедливо при $0 < \delta < 1$.

§ 2. Условия сходимости итераций (простых и Зейделя) при необычном преобразовании $'A$

А) Примененный в § 1 метод дает возможность установить, что в случае упомянутого во введении необычного преобразования с матрицей $'A$, дополнительным (кроме а) и б)) необходимым и достаточным условием сходимости простых итераций является требование, чтобы

г) квадратичная форма

$$S = \sum_{j,k}^{n} \ddot{\delta}_{jk} x_j x_k, \qquad (30)$$

составленная с матрицей $\ddot{A}_0 = 2E - A_{01}$, была положительно определенной.

В связи с этим справедлива следующая

ТЕОРЕМА II. *Если* $A_{01} = \frac{1}{\max|\delta_{jj}|}(A_1 + A_2)$ — *действительная симметрическая матрица n-го порядка со всеми положительными элементами диагональной матрицы* A_1, *то необходимым и достаточным условием того, чтобы все собственные числа матрицы* $(E - A_{01})$ *были по абсолютной величине меньшими единицы, является требование, чтобы положительно определенной была как заданная матрица* A_0, *так и матрица* $\ddot{A}_0 = 2E - A_{01}$.

Чтобы доказать теорему II, нужно для матрицы $'A$ провести рассуждения, аналогичные проведенным в § 1 для матрицы A.

Заметим, что требование г), вообще говоря, менее ограничительно, чем установленное в § 1 требование в).

Чтобы убедиться в этом, будем рассматривать некоторую нормированную к единице матрицу A_{01}, как A_0, и будем сравнивать условия, при которых могут быть положительно определенными соответствующие матрицы $\ddot{A}_0$ и $\dot{A}_0$.

Легко видеть, что ввиду тождественности A_{01} и A_0, обе сравниваемые матрицы $\ddot{A}_0$ и $\dot{A}_0$ имеют одинаковые побочные элементы. В то же время они имеют различные диагональные элементы, равные соответственно $\ddot{\delta}_{jj} \geqslant 1$ и $\dot{\delta}_{jj} \leqslant 1$. Поэтому, в силу $\ddot{\delta}_{jj} \geqslant \dot{\delta}_{jj}$, неравенство $S > 0$ сохраняется, вообще говоря, при несколько бо́льших по удельному весу значениях побочных элементов заданной матрицы A_0, чем неравенство $R > 0$.

Если диагональные элементы произвольной матрицы стремятся к одному и тому же числу, то для всех рассмотренных матриц $\delta_{jj} \to 1$; в силу этого $'A \to A$ и $\ddot{A}_0 \to \dot{A}_0$, и в результате требование г) вырождается в требование в).

Различие между классами матриц A_0, для которых сходятся простые итерации с преобразованиями A и $'A$, можно иллюстрировать следующим числовым примером матрицы A_0 третьего порядка с элементами $\delta_{12} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta$; $\delta_{11} = 1$, $\delta_{22} = 0{,}9$ и $\delta_{33} = 0{,}8$.

По условию в) имеем, согласно (27):

$$0{,}72 - 2\delta^3 - 2{,}7\delta^2 > 0. \qquad (31)$$

Аналогично, по условию г) находим:

$$1{,}32 - 2\delta^3 - 3{,}3\delta^2 > 0. \qquad (32)$$

Легко проверить, что неравенство (31) справедливо при $0 < \delta < 0{,}45$, а неравенство (32) — при $0 < \delta < 0{,}55$.

Б) Согласно теореме Е. Райха [см. ([2]), стр. 139], если имеет место обычное преобразование (4) с матрицей A, в случае системы с положи-

тельно определенной матрицей A_0 итерации Зейделя сходятся всегда. Оказывается, что в случае той же системы с положительно определенной матрицей A_0 итерации Зейделя сходятся также, если имеет место необычное преобразование (7) с матрицей $'A$. Этот факт может быть сформулирован в виде следующей теоремы, доказываемой вполне аналогично доказательству теоремы Е. Райха.

ТЕОРЕМА III. *Если $A_{01} = Q + P + Q'$ является нормированной к единице действительной симметрической матрицей n-го порядка со всеми положительными элементами диагональной матрицы P, а Q и Q' являются треугольными матрицами, составленными из элементов матрицы A_{01}, расположенных соответственно ниже и выше главной диагонали этой матрицы, то необходимым и достаточным условием того, чтобы все собственные числа матрицы $B = (E + Q)^{-1} (E - P - Q')$ были по абсолютной величине меньшими единицы, является требование, чтобы заданная матрица A_0 была положительно определенной.*

Хотя, согласно доказанной теореме III, итерации Зейделя с матрицей $'A$ сходятся для того же самого класса систем, для которого сходятся итерации Зейделя с матрицей A, они сходятся не при всяких возможных способах подготовки системы (с положительно определенной матрицей) к вычислению приближений.

Покажем это на примере следующей системы [см. ([1]), стр. 481]:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2x_1 - 3{,}61\, x_2, \\ x_2 &= \qquad\; x_1 + 1{,}80\, x_2, \end{aligned} \tag{33}$$

которую можно рассматривать как результат некоторого преобразования эквивалентной ей системы

$$\begin{aligned} 3{,}75\, x_1 + 3{,}00\, x_2 &= 0, \\ 3{,}00\, x_1 + 3{,}61\, x_2 &= 1, \end{aligned} \tag{34}$$

имеющей положительно определенную матрицу A_0.

Вследствие того что для системы (34) выполняются все требования а), б), в) и г), для нее сходятся оба процесса как при преобразовании A, так и при преобразовании $'A$. В то же время при преобразовании, соответствующем системе (33), «простые итерации сходятся, а итерации Зейделя расходятся» [см. ([1]), стр. 481].

§ 3. Критерии знакоопределенности квадратичных форм, основанные на проверке сходимости итераций

Следствием всех упомянутых выше теорем являются следующие критерии знакоопределенности квадратичных форм:

1) если итерации Зейделя сходятся для преобразованных систем одночленных уравнений $X = AX + F$ или $X = 'AX + P_1$, полученных из системы $A_0 X = P$ с матрицей $A_0 = A_1 + A_2$ (со всеми положительными элементами диагональной матрицы A_1), то квадратичная форма с матрицей A_0 является положительно определенной;

2) если для системы $X = AX + F$ сходятся также простые итерации, то положительно определенной является, кроме того, форма с матрицей $\dot{A}_0 = A_1 - A_2$ и т. д.*

Формулированные таким образом критерии указывают на существование тесной связи между условиями сходимости целого ряда итерационных процессов. Кроме того, при помощи них можно практически устанавливать знаки квадратичных форм как путем вычисления самих итераций Зейделя, так и путем проверки достаточных условий сходимости итераций Зейделя, простых итераций и т. д.

В заключение автор выражает признательность Я. Б. Лопатинскому и А. И. Вольперту за ценные указания при написании настоящей работы.

Поступило
5. VII. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Иванов В. К., О сходимости процессов итерации при решении систем линейных алгебраических уравнений, Известия Ак. наук СССР, серия матем., № 4 (1939), 477—483.

[2] Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1950.

---

* Если для системы $X = (E - A_{01})X + P_1$ сходятся также простые итерации, то положительно определенной является, кроме того, форма с матрицей $\ddot{A}_0 = 2E - A_{01}$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 95—104

Б. В. ШИРОКОРАД

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ К ЦЕПЯМ МАРКОВА

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В статье находятся условия применимости предельной теоремы к нестационарным цепям Маркова с двумя состояниями в схеме последовательности испытаний. Обнаруживается, что они существенно отличны от условий, найденных С. Н. Бернштейном для схемы серий.

В статье рассматривается последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots, \tag{1}$$

каждая из которых принимает только значения 0 и 1, связанных в простую неоднородную цепь Маркова.

Матрица переходных вероятностей при переходе от ξ_n к ξ_{n+1} обозначается

$$\begin{Vmatrix} a_n & a'_n \\ b_n & b'_n \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Безусловные вероятности

$$p_n = P\{\xi_n = 1\},$$

как хорошо известно, вычисляются рекуррентно при помощи формул:

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + b_{n+1} q_n, \quad q_n = 1 - p_n.$$

Для случая, когда асимптотически

$$a'_n \sim \frac{a}{n^\alpha}, \quad b_n \sim \frac{b}{n^\beta},$$

$$a > 0, \quad b > 1,$$

$$0 < \alpha \leqslant 1, \quad 0 < \beta \leqslant 1,$$

дается полное исследование предельных законов распределения сумм

$$\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n.$$

Естественно, что достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha \leqslant \beta$. Так и делается во всем дальнейшем.

Результаты исследования таковы:

ТЕОРЕМА 1. *Если $\alpha \leqslant \beta < 1$, то применима классическая предельная теорема, т. е. отклонения сумм от их математических ожиданий, нормированные своими дисперсиями, подчинены соотношению*

$$P\left\{\frac{\zeta_n - M\zeta_n}{\sqrt{B\zeta_n}} < t\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

ТЕОРЕМА 2. *Если $\alpha < \beta = 1$, то*

$$P\left\{\frac{\zeta_n}{n^\alpha} < t\right\} \to \frac{a^{\frac{b}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \int_0^t t^{\frac{b}{\alpha}-1} e^{-at}\, dt, \quad t \geqslant 0.$$

ТЕОРЕМА 3. *Если $\alpha = \beta = 1$, то*

$$P\left\{\frac{\zeta_n}{n} < t\right\} \to \frac{1}{B(a, b)} \int_0^t t^{b-1} (1-t)^{a-1}\, dt, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Теорему 1 интересно сопоставить с классическим результатом С. Н. Бернштейна, относящимся к схеме серий:

$$\begin{matrix} \xi_{11} \\ \xi_{21}\, \xi_{22} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_{n1}\, \xi_{n2} \ldots \xi_{nn}, \end{matrix} \tag{3}$$

где в каждой серии задана своя последовательность переходных матриц:

$$\left\| \begin{matrix} a_{nk} & a'_{nk} \\ b_{nk} & b'_{nk} \end{matrix} \right\|, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{4}$$

С. Н. Бернштейн доказал, что условия

$$a_{nk} > \frac{C}{n^\alpha}, \quad b_{nk} > \frac{C}{n^\alpha}, \quad a'_{nk} > \frac{C}{n^\alpha}, \quad b'_{nk} > \frac{C}{n^\alpha} \tag{5}$$

достаточны для применимости классической предельной теоремы в схеме серий, если $\alpha < \frac{1}{3}$, и *не достаточны*, если $\alpha \geqslant \frac{1}{3}$.

Теорема 1 показывает, что в рассмотренной нами схеме последовательности случайных величин достаточными для применимости классической предельной теоремы оказываются значительно более слабые ограничения возможного порядка убывания переходных вероятностей *.

---

* В связи с изложенным следует отметить, что в обзоре Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова ([5]) результаты С. Н. Бернштейна прореферированы неточно. Смысл приведенных в этом обзоре соотношений

$$p_{12}^{(t)} \sim \frac{C}{n^\alpha}, \quad p_{21}^{(t)} \sim \frac{C}{n^\alpha}$$

не ясен, так как не указано, как t связано с n. Если иметь в виду рассмотренную нами схему последовательности величин ξ_n и считать $t = n$, то утверждение Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова ошибочно, так как оно противоречит нашей теореме 1.

Перейдем к доказательству сформулированных теорем.

Идея доказательства теоремы 1 заключается в асимптотической оценке дисперсии B_n сумм (1), которая дает возможность использовать результат С. Н. Бернштейна [см. (4), стр. 60 и (3)].

Оценим дисперсию сумм (1):

$$B_n = p_1 q_1 (1 + 2\delta_2 + \cdots + 2\delta_2 \ldots \delta_n) + \cdots + p_{n-1} q_{n-1} (1 + 2\delta_n) + p_n q_n,$$

где

$$\delta_k = a_k - b_k, \quad q_k = 1 - p_k.$$

Не ограничивая общности рассуждений, можно предположить, что

$$\left.\begin{aligned} &\alpha < \beta, \\ &\delta_n > 1 - \frac{1}{n^\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Замечание. Случай $\beta < \alpha$ сводится к случаю (6), если рассматривать вторую альтернативу цепи C_2. Случай $\alpha = \beta$ сводится к случаю, исследованному С. Н. Бернштейном [см. (2)], так как в этом случае

$$\lim_{n=\infty} p_n = \frac{b}{a+b},$$

следовательно, удовлетворяется условие:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k > \frac{b}{2(a+b)} n \quad (\text{когда } n \to \infty).$$

Из второго неравенства (6) вытекает оценка:

$$\delta_i + \delta_i \delta_{i+1} + \cdots + \delta_i \ldots \delta_n > \frac{i^\alpha - 1}{2},$$

если

$$i^\alpha \leqslant n - i$$

и, тем более, если

$$i \leqslant n - n^\alpha.$$

Отсюда следует неравенство:

$$B > \sum_{i=1}^{n-n^\alpha} p_i q_i (i+1)^\alpha. \tag{7}$$

Для более точной оценки дисперсии B_n покажем, что асимптотически

$$p_n \sim \frac{b}{a} n^{\alpha - \beta}. \tag{8}$$

Для этого введем следующие обозначения:

$$\Omega_1(n) = n^{1-\gamma} p_n,$$

$$\gamma = 1 + \alpha - \beta.$$

Из классического разностного уравнения А. А. Маркова (1)

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n q_{n-1}$$

вытекает разностное уравнение

$$n^{\alpha}[\Omega_1(n)-\Omega_1(n-1)]+c_n\Omega_1(n-1)=n^{\beta}b_n, \tag{9}$$

где

$$c_n=n^{\alpha}a_n'+a_n n^{\alpha}\left[1-\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\gamma}\right]+n^{\alpha}b_n\left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-\gamma}.$$

В условиях теоремы 1 существует предел

$$\lim_{n=\infty} c_n=a>0. \tag{10}$$

Последовательность чисел $\{\Omega_1(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ удовлетворяет условиям следующей леммы:

ЛЕММА [M. Watanabe ([6])]. *Последовательность вещественных чисел $\{v_n\}_{n=1,2,\ldots}$ сходится, если удовлетворяются условия*

$$\lim_{n=\infty}[n^{\alpha}(v_n-v_{n-1})+c_n v_{n-1}]=l,$$

$$\lim_{n=\infty} c_n=c>0,$$

где $\alpha>0$, c_n, l — вещественные числа. Если, кроме того, $0<\alpha\leqslant 1$, то

$$\lim_{n=\infty} v_n=\frac{l}{c}.$$

На основании приведенной леммы из (9) и (10) следует существование предела

$$\lim_{n=\infty}\Omega_1(n)=\frac{b}{a},$$

откуда получается утверждение (8).

Применяя к суммам, стоящим в правой части неравенства (7), известную теорему Штольца и принимая во внимание (8), получим следующую асимптотическую оценку дисперсии B_n сумм (1):

$$B_n>ln^{1+2\alpha-\beta}, \tag{11}$$

где

$$l=\frac{b}{2a(1+2\alpha-\beta)}>0.$$

Воспользуемся теперь результатом, полученным С. Н. Бернштейном [см. ([4]) и ([3])].

В конце статьи ([4]) С. Н. Бернштейн замечает, что предельная теорема применима к цепи C_2, если существует такое число ρ, удовлетворяющее неравенствам

$$\alpha<\rho<1, \tag{12}$$

что отношения

$$\frac{n^{2\alpha-\rho}}{\sqrt{B_n}} \quad \text{и} \quad \frac{n^{\rho}}{\sqrt{B_n}} \tag{13}$$

исчезают, когда n неограниченно возрастает. В частности, такое число ρ всегда существует для цепи C_2 в схеме последовательности серий (3), если число α удовлетворяет неравенствам:

$$0<\alpha<\frac{1}{3}.$$

Покажем, что в условиях теоремы 1 (т. е. в схеме простой последовательности (1)) число ρ, удовлетворяющее указанным свойствам, существует и может быть принято равным

$$\rho=\frac{1+2\alpha-\beta}{2}-\varepsilon, \tag{14}$$

где ε — любое число, удовлетворяющее неравенствам

$$0<\varepsilon<\frac{1-\beta}{2}. \tag{15}$$

Прежде всего, в предположении (6) и на основании (15) выбранное значение (14) удовлетворяет неравенствам (12).

Покажем, что отношения (13) исчезают вместе с $\frac{1}{n}$. Действительно, на основании асимптотической оценки дисперсии B_n (неравенство (11)) для достаточно больших значений n имеют место следующие неравенства:

$$\frac{n^{2\alpha-\rho}}{\sqrt{B_n}}<\frac{n^{2\alpha-\frac{1+2\alpha-\beta}{2}+\varepsilon}}{\sqrt{l}\,n^{\frac{1+2\alpha-\beta}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{l}}\,n^{-1+\beta+\varepsilon},$$

$$\frac{n^{\rho}}{\sqrt{B_n}}<\frac{n^{\frac{1+2\alpha-\beta}{2}-\varepsilon}}{\sqrt{l}\,n^{\frac{1+2\alpha-\beta}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{l}}\,n^{-\varepsilon},$$

из которых следует, что рассматриваемые отношения (13) исчезают, когда n неограниченно возрастает.

Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2. Доказательство теорем 2 и 3 основывается на исследовании асимптотических свойств разностных уравнений Маркова и вычислении моментов предельного распределения нормированных сумм:

$$\frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n^{\alpha}}. \tag{16}$$

Рассмотрим классические разностные уравнения Маркова для совмещений s-го порядка:

$$p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}n}=a_n\,p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}n-1}+$$
$$+(p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}}-p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}n-1})\,b_n,$$

где

$$p_{\alpha_1\ldots\alpha_s}=P\{\xi_{\alpha_1}=1;\ldots;\xi_{\alpha_s}=1\},$$
$$1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_{s-1}<n-1,$$
$$p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}}=1 \text{ и } p_{\alpha_1\ldots\alpha_{s-1}n}=p_n, \text{ когда } s=1.$$

Суммируя уравнения Маркова по индексам $\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1}$ и принимая во внимание, что

$$p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-2}\, n-1,\, n} = a_n p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-2}\, n-1},$$

получим разностное уравнение

$$\omega_s(n) = \delta_n \omega_s(n-1) + a_n \omega_{s-1}(n-1) + b_n \nu_{s-1}(n-2), \tag{17}$$

где

$$\omega_s(n) = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_{s-1} < n} p_{\alpha_1 \ldots \alpha_{s-1} n},$$

$$\nu_s(n) = \sum_{1 \leqslant \alpha_1 < \, < \alpha \cdots_s \leqslant n} p_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}.$$

Обозначим

$$\Omega_s(n) = \frac{\omega_s(n)}{n^{s\alpha-1}},$$

$$\overline{\nu_s(n)} = \frac{\nu_s(n)}{n^{s\alpha}},$$

$$\Omega_0(n) = 0, \qquad \overline{\nu_0(n)} = 0.$$

Умножая обе части уравнения (17) на $n^{1-(s-1)\alpha}$, получим разностное уравнение

$$n^{\alpha}[\Omega_s(n) - \Omega_s(n-1)] + c_{ns}\Omega_s(n-1) = l_{ns}, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned} c_{ns} &= n^{\alpha} a'_n + a_n n^{\alpha}\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s\alpha-1}\right] + n^{\alpha} b_n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s\alpha-1}, \\ l_{ns} &= a_n \Omega_{s-1}(n-1)\left[\frac{n-1}{n}\right]^{(s-1)\alpha-1} + n b_n \overline{\nu_{s-1}(n-2)}\left[\frac{n-2}{n}\right]^{(s-1)\alpha}. \end{aligned} \tag{19}$$

В условиях теоремы 2 для каждого фиксированного числа $s = 1, 2, \ldots$ существует предел

$$\lim_{n=\infty} c_{ns} = a.$$

Покажем, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ существует предел

$$\nu_s = \lim_{n=\infty} \overline{\nu_s(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{\nu_s(n)}{n^{s\alpha}}.$$

В самом деле, на основании теоремы Штольца можно заключить, что предел ν_s существует, если существует предел

$$\Omega_s = \lim_{n=\infty} \Omega_s(n).$$

В этом случае имеем

$$\nu_s = \lim_{n=\infty} \frac{\nu_s(n)}{n^{s\alpha}} = \lim_{n=\infty} \frac{\nu_s(n) - \nu_s(n-1)}{n^{s\alpha} - (n-1)^{s\alpha}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\omega_s(n)}{n^{s\alpha}\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s\alpha}\right]} = \lim_{n=\infty} \frac{\Omega_s(n)}{n\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{s\alpha}\right]} = \frac{\Omega_s}{sa},$$

т. е.

$$\nu_s = \frac{\Omega_s}{s\alpha}. \tag{20}$$

С другой стороны, из существования предела Ω_{s-1} следует существование предела Ω_s, так как в этом случае, как мы видели, существует предел ν_{s-1}, и поэтому из (19) заключаем, что существует также предел

$$l_s = \lim_{n=\infty} l_{ns} = \Omega_{s-1} + b\nu_{s-1}. \tag{21}$$

Но тогда последовательность чисел $\{\Omega_s(n)\}_{n=s,\, s+1,\, \ldots}$, связанных разностным уравнением (18), удовлетворяет условиям леммы M. Watanabe ([6]), откуда следует существование предела

$$\Omega_s = \lim_{n=\infty} \Omega_s(n) = \frac{l_s}{a}. \tag{22}$$

Так как в условиях теоремы 2 существует предел

$$l_1 = \lim_{n=\infty} l_{n1} = \lim_{n=\infty} nb_n = b \qquad (s=1),$$

то из (22) следует существование предела

$$\Omega_1 = \lim_{n=\infty} \Omega_1(n) = \frac{l_1}{a},$$

из (20) — существование предела

$$\nu_1 = \frac{\Omega_1}{a}.$$

Таким образом, можно сделать индуктивное заключение о существовании последовательности пределов $\{\nu_s\}_{s=1,2\ldots}$.

Для доказательства существования предельного распределения нормированных сумм (16), однозначно определенного последовательностью моментов

$$M_s = \nu_s s!$$
$$(s = 1, 2, \ldots),$$

воспользуемся леммой Н. В. Смирнова [см. ([7]), стр. 197].

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — последовательность случайных событий. Обозначим через

$$p_{a_1 a_2 \ldots a_s},$$
$$1 \leqslant a_1 < \cdots a_s \leqslant n,$$

вероятность положительных исходов в испытаниях с номерами $a_1, \ldots, a_s$ и положим

$$\nu_s(n) = \sum_{1 \leqslant a_1 < \cdots < a_s \leqslant n} p_{a_1 \ldots a_s}.$$

Пусть, далее, m_n — число положительных исходов в n испытаниях, $\mu(n)$ — некоторая положительная, неограниченно возрастающая функция от n и

$$F_n(t) = P\{m_n \leqslant t\mu(n)\}.$$

Имеет место следующая

ЛЕММА (Н. В. Смирнов). *Пусть для всякого фиксированного* $s\,(s=1, 2, \ldots)$ *выполняется условие*

$$\frac{\nu_s(n)}{[\mu(n)]^s} \to \nu_s$$
$$(n \to \infty).$$

Если, кроме того,

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[s]{\nu_s} < A,$$

где A — некоторая положительная константа, то последовательность функций

$$F_1(t),\ F_2(t),\ \ldots,\ F_n(t),\ \ldots$$

при $n \to \infty$ сходится к закону распределения $F(t)$ (в каждой точке непрерывности последнего), однозначно определенному последовательностью моментов

$$M_s = \int_0^\infty x^s\, dF(x) = \nu_s\, s!$$

Положим в этой лемме

$$m_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n,$$

$$\mu(n) = n^\alpha.$$

Тогда, согласно (20), выполняется первое условие леммы. Второе условие леммы также выполняется, если положить

$$A = \frac{1}{a} + 1.$$

Действительно, из соотношений (20), (21) и (22) следует рекуррентное соотношение

$$\nu_s = \frac{s - 1 + \frac{b}{\alpha}}{as}\, \nu_{s-1}. \tag{23}$$

Далее, существует предел

$$\lim_{s=\infty} \sqrt[s]{\nu_s} = \lim_{s=\infty} \frac{\nu_{s+1}}{\nu_s} = \lim_{s=\infty} \frac{s + \frac{b}{\alpha}}{a(s+1)} = \frac{1}{a}.$$

Следовательно, удовлетворяется второе условие леммы:

$$\overline{\lim_{s=\infty}} \sqrt[s]{\nu_s} = \lim_{s=\infty} \sqrt[s]{\nu_s} = \frac{1}{a} < A.$$

Итак, доказано существование предельного распределения нормированных сумм (16), однозначно определенного последовательностью моментов

$$M_s = \nu_s s! \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Применяя рекуррентную формулу (23) s раз, получим выражение для момента s-го порядка предельного распределения:

$$M_s = \frac{s - 1 + \frac{b}{\alpha}}{a} \cdot \frac{s - 2 + \frac{b}{\alpha}}{a} \cdots \frac{1 + \frac{b}{\alpha}}{a} \cdot \frac{\frac{b}{\alpha}}{a}. \tag{24}$$

Известно, что последовательность моментов $\{M_s\}_{s=1,2,\ldots}$ вида (24) однозначно определяет безгранично делимый закон *«гамма-распределение»* с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{a^{\frac{b}{\alpha}}}{\Gamma\left(\frac{b}{\alpha}\right)} x^{\frac{b}{\alpha}} e^{-ax} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Теорема 2 доказана полностью.

Доказательство теоремы 3 в принципе ничем не отличается от доказательства теоремы 2. Видоизменяются только некоторые формулы. Например, формула (22) принимает следующий вид:

$$\Omega_s = \frac{l_s}{a+b};$$

формула (23) принимает вид

$$\nu_s = \frac{s-1+b}{s-1+b+a} \cdot \frac{1}{s} \cdot \nu_{s-1}. \tag{25}$$

В условиях теоремы 3

$$\lim_{s=\infty} \sqrt[s]{\nu_s} = \lim_{s=\infty} \frac{\nu_{s+1}}{\nu_s} = \lim_{s=\infty} \frac{s+b}{(s+b+a)\,(s+1)} = 0,$$

так что в качестве постоянной A леммы Н. В. Смирнова можно положить любое положительное число.

Применяя рекуррентную формулу (25) s раз, получим выражение для момента s-го порядка предельного распределения:

$$M_s = \frac{b\,(b+1)\ldots(b+s-1)}{(a+b)\,(a+b+1)\ldots(a+b+s-1)}. \tag{26}$$

Последовательность моментов $\{M_s\}_{s=1,2,\ldots}$ вида (26) однозначно определяет (вообще говоря, не безгранично делимый) закон *«бэта-распределение»* с плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{B(a,b)} x^{b-1}(1-x)^{a-1} & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Считаю своим долгом выразить благодарность А. Н. Колмогорову и Н. В. Смирнову за ценные указания.

Поступило
25. V. 1953.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марков А. А., Замечательный случай испытаний, связанных в цепь. Исчисление вероятностей, Москва, 1924.

[2] Бернштейн С. Н., Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин, Успехи матем. наук, вып. X (1944), 65—114.

[3] Бернштейн С. Н., Sur les sommes de quantités dépendantes, Изв. Ак. Наук СССР, серия VI, т. X (1926), 1459—1478.

[4] Бернштейн С. Н., Sur les sommes de quantités dépendantes, Доклады Ак. Наук СССР (А), № 4 (1928), 55—60.

[5] Колмогоров А. Н. и Гнеденко Б. В., Цепи Маркова, Сборник «Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947 гг.», М.—Л., ОГИЗ, (1948), 701—727.

[6] Watanabe M., On a determinate System of non-independent Trials, Tóhoku Math. J., 15 (1919), 22—35.

[7] Смирнов Н. В., Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Успехи матем. наук, вып. X (1944), 180—206.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 105—112

И. М. ВИНОГРАДОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ПРОСТОМУ МОДУЛЮ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СИМВОЛА ЛЕЖАНДРА

В работе дано арифметическое доказательство закона равномерности распределения по простому модулю q простых чисел p с заданным значением символа Лежандра $\left(\frac{p}{q}\right)$.

Обозначения. N — число с условием $N \geqslant N_0$, где N_0 — достаточно большое постоянное, превосходящее 2; $r = \ln N$.

q — простое число с условием $q_0 \leqslant q < N$, где q_0 — достаточно большое постоянное, превосходящее 2; $(a, q) = 1$.

ε — произвольно малое положительное постоянное.

θ — число с условием $-1 < \theta < 1$.

$A \ll B$ обозначает то же самое, что и $A = O(B)$.

$\{z\}$ обозначает дробную часть вещественного числа z.

σ — число с условием $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$; $\psi(z)$ — периодическая функция с периодом 1, определяемая равенствами

$$\psi(z) = 1 - \sigma, \text{ если } 0 \leqslant \{z\} < \sigma,$$
$$\psi(z) = -\sigma, \quad \text{если } \sigma \leqslant \{z\} < 1.$$

s — одно из чисел 1, -1; $p^{(s)}$ пробегает простые числа с условием $\left(\frac{p^{(s)}}{q}\right) = s$; $\pi_{s,\sigma}(N)$ — число тех $p^{(s)}$, не превосходящих N, наименьшие неотрицательные вычеты которых по модулю q меньше σq; следовательно, $\pi_{s,1}(N)$ — число всех $p^{(s)}$, не превосходящих N.

В настоящей работе я показываю, что арифметический метод, развитый в одной из моих последних работ ([1]) в применении к вопросу о распределении простых чисел по модулю q, может быть применен и к вопросам о распределении чисел более общего вида. Здесь я рассматриваю числа $p^{(s)}$, указанные в начале этой статьи. Тот же метод пригоден и в случае, когда $p^{(s)}$ пробегает простые числа с условием $\operatorname{ind} p^{(s)} \equiv n \pmod n$ (или также произведения заданного числа простых чисел, подчиненные тому же условию), где n — делитель $q - 1$, превосходящий 1, и s — одно из чисел $0, 1, \ldots, n-1$; однако последний случай требует некоторого усложнения доказательства, в частности, некоторого уточнения лемм 2, 3, 4.

Следует отметить, что случай, рассматриваемый в настоящей работе, равно как и более общий случай, указанный выше, могут быть также исследованы применением тригонометрических сумм вида

$$\sum_{p^{(s)}<N} \chi(p^{(s)}) e^{2\pi i \frac{ap^{(s)}}{q}}.$$

Так как леммы 3 и 4 настоящей работы уже были доказаны в моей статье (1) (леммы 6 и 7), то я привожу их без доказательств.

ЛЕММА 1. *Пусть k — одно из чисел 1, -1 и m_k пробегает числа $1, \ldots, q-1$ с условием $\left(\frac{m_k}{q}\right) = k$. Тогда имеем*

$$\left|\sum_{m_k} \psi\left(\frac{m_k}{q}\right)\right| < \sqrt{q}\ln q.$$

Доказательство. Из известного закона распределения квадратичных вычетов и квадратичных невычетов, арифметическое доказательство которого можно найти в одной из моих последних работ (2) (теорема 1), следует, что число f' значений m_k, меньших σq, может быть представлено в форме (q_0 достаточно велико):

$$f' = \frac{\sigma q}{2} + \frac{\theta}{2}\sqrt{q}\ln q;$$

следовательно, число f'' оставшихся значений m_k представится в форме

$$f'' = \frac{q-1}{2} - f' = \frac{(1-\sigma)q}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\theta}{2}\sqrt{q}\ln q.$$

Поэтому

$$\sum_{m_k} \psi\left(\frac{m_k}{q}\right) = (1-\sigma)f' - \sigma f'' = \frac{\theta}{2}\sqrt{q}\ln q + \frac{\sigma}{2},$$

что численно $< \sqrt{q}\ln q$.

ЛЕММА 2. *Пусть h — произвольно малое положительное постоянное $< 0{,}1$; $g = 1 + h$, P — произведение простых чисел, не превосходящих $N^{\frac{1}{3}}$. Тогда, полагая*

$$D = r^{\frac{\ln r}{\ln g}},$$

делители d числа P, не превосходящие N, можно разбить на $< D$ классов с условием, что для чисел d, принадлежащих одному классу, символ $\left(\frac{d}{q}\right)$, а также функция $\mu(d)$ сохраняют неизменные значения. Два из этих классов будут состоять только из значений d с условием $d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}$. Для каждого из остальных классов можно указать целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y такие, что все значения x лежат в интервале

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+h}$$

и все числа d класса, каждое B раз, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$.

Доказательство. Пусть τ — наибольшее целое число с условием

$$2^{g^{\tau-1}} < N^{\frac{1}{3}};$$

тогда легко найдем

$$\tau < \frac{\ln r}{\ln g} - 80.$$

Далее, нетрудно видеть, что каждое d есть произведение $\leqslant b$ простых чисел, где $b = [r]$ (N_0 достаточно велико). Отсюда следует, что каждое d единственным способом представимо в виде произведения

$$d = p_1 p_2 \cdots p_b,$$

если к расположенным в невозрастающем порядке всем δ простым делителям числа d присоединим, в случае $\delta < b$, сомножители $p_{\delta+1}, \ldots, p_b$, равные 1.

Каждому p_j, превосходящему 1, приведем в соответствие числа t_j, φ_j, F_j с условиями

$$t_j > 0, \quad \varphi_j = 2^{g^{t_j-1}}, \quad F_j = \varphi_j^g = 2^{g^{t_j}}, \quad \varphi_j < p_j \leqslant F_j.$$

Каждому $p_j = 1$ приведем в соответствие числа t_j, φ_j, F_j с условиями

$$t_j = 0, \quad \varphi_j = p_j = F_j = 1.$$

Таким образом, каждое d свяжем с единственной последовательностью

$$t_1, \ldots, t_b. \tag{1}$$

Обозначая, далее, символом l_s число членов последовательности (1), равных s, убедимся, что числами $l_\tau, \ldots, l_0$ эта последовательность полностью определяется. Отсюда следует, что число различных последовательностей (1) будет ($l_j \leqslant b$)

$$< r^{\tau+1} < Dr^{-79}.$$

Все значения d, связанные с последовательностями (1) с условием $\varphi_1 \ldots \varphi_b \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, разобьем на два класса; в один из них войдут значения d с условием $\left(\frac{d}{q}\right) = 1$, в другой — значения d с условием $\left(\frac{d}{q}\right) = -1$. Для значений d каждого из этих двух классов, очевидно, имеем $d < N^{\frac{1}{3}+h}$.

Рассмотрим, далее, совокупность значений d, отвечающих последовательности (1) с условием $\varphi_1 \ldots \varphi_b > N^{\frac{1}{3}}$. Пусть β — наибольшее число с условием

$$\varphi_1 \ldots \varphi_{\beta-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}}.$$

Тогда имеем

$$\varphi_\beta \leqslant N^{\frac{1}{3}}, \quad N^{\frac{1}{3}} < \varphi_1 \ldots \varphi_\beta \leqslant N^{\frac{2}{3}}.$$

Пусть $\varphi_{\beta-k_1-1}, \ldots, \varphi_\beta, \ldots, \varphi_{\beta+k_2}$ — все значения φ_j, равные φ_β. Тогда, полагая

$$d' = p_1 \cdots p_{\beta-k_1}, \quad d'' = p_{\beta-k_1+1} \cdots p_\beta, \quad d''' = p_{\beta+k_2+1} \cdots p_b,$$

мы значения d рассматриваемой совокупности разобьем на восемь совокупностей; для значений d, принадлежащих одной из этих новых совокупностей, символы $\left(\frac{d'}{q}\right)$, $\left(\frac{d''}{q}\right)$, $\left(\frac{d'''}{q}\right)$ сохраняют неизменные значения. Для каждой новой совокупности значения d'' разобьем на $\leqslant r$ классов, относя к одному и тому же классу значения d'' с одним и тем же числом невычетов по модулю q среди простых сомножителей. В соответствии с этим каждая новая совокупность разобьется на $\leqslant r$ классов; в каждый класс войдут числа $d'd''d'''$ совокупности с условием, что среди простых сомножителей d'' имеется заданное число μ квадратичных невычетов по модулю q. Очевидно, должно быть $\mu \leqslant k_1 + k_2$. Число μ можно разбить на два целочисленных слагаемых λ_1 и λ_2 с условием $\lambda_1 \leqslant k_1$, $\lambda_2 \leqslant k_2$. Пусть ξ и η независимо друг от друга пробегают: первое — произведения k_1 различных простых p_β, связанных с φ_β, среди которых имеется ровно λ_1 квадратичных невычетов, второе — произведения k_2 различных простых p_β, связанных с φ_μ, среди которых имеется ровно λ_2 квадратичных невычетов. При $(\xi, \eta) = 1$ и только в этом случае произведение $\xi\eta$ совпадает с одним из d'', причем одно и то же d'' встретится среди всех произведений $\xi\eta$ ровно $B = C_\mu^{\lambda_1} \cdot C_{k_1+k_2}^{k_1-\lambda}$ раз. Числа же d выбранного класса, каждое B раз, получим, если, полагая $x = d'\xi$, $y = \eta d'''$, мы из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$. Замечая, что

$$8rDr^{-79} < D,$$

мы и убеждаемся в справедливости леммы.

ЛЕММА. 3. *Пусть* $1 \leqslant U < N$, $1 < \Delta \leqslant U$, $U + \Delta \leqslant N$,

$$S = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right),$$

где x и y пробегают целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям, причем значения y взаимно просты с q и суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U + \Delta, \quad \frac{N}{U+\Delta} < y \leqslant \frac{N}{x}.$$

Тогда имеем

$$S \ll N \frac{\Delta^2}{U^2} F_1; \quad F_1 = \sqrt{\frac{1}{\Delta} + \frac{U^2}{N\Delta} + \frac{1}{q} + \frac{qU^2}{N\Delta^2}}\ (\ln q)^2.$$

Следствие. *Пусть* $1 \leqslant U < N$, $0 < \Delta \leqslant U$, $U + \Delta \leqslant N$.

$$S_0 = \sum_x \sum_y \psi\left(\frac{axy}{q}\right),$$

где x и y пробегают целые числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям, причем значения y взаимно просты с q и могут повторяться, каждое не более K раз. Пусть суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U + \Delta, \quad 0 < y \leqslant \frac{N}{x}.$$

Тогда имеем

$$S_0 \ll NKF_2; \quad F_2 = \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,(\ln q)^2.$$

ЛЕММА 4. *Пусть x, y, m пробегают положительные, взаимно простые с q числа, принадлежащие трем возрастающим последовательностям. Пусть, далее,*

$$1 < U < N, \quad U < U' \leqslant 2U,$$

$$S = \sum_x \sum_y \sum_m \psi\left(\frac{axym}{q}\right),$$

где суммирование распространяется на область

$$U < x \leqslant U', \quad xym \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll N^{1+\varepsilon} F_3; \quad F_3 = \sqrt{\frac{1}{U} + \frac{U}{N} + \frac{1}{q} + \frac{q}{N}}\,.$$

ТЕОРЕМА. *Для суммы*

$$S = \sum_{p^{(s)} \leqslant N} \psi\left(\frac{ap^{(s)}}{q}\right)$$

имеем неравенство

$$S \ll N^{1+\varepsilon} F_0; \quad F_0 = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + N^{-\frac{1}{6}}.$$

Замечание 1. Результат теоремы, очевидно, может быть представлен неравенством

$$\pi_{s,\sigma}(N) - \sigma\pi_{s,1}(N) \ll N^{1+\varepsilon} F_0.$$

Доказательство. Пусть h — произвольно малое положительное постоянное $< 0{,}1$; P — произведение всех не равных q простых чисел с условием $p \leqslant N^{\frac{1}{3}}$, Q — произведение всех не равных q простых чисел с условием $N^{\frac{1}{3}} < p \leqslant N$. Находим

$$\sum_{Q_2 \leqslant N}' \psi\left(\frac{aQ_2}{q}\right) + S + O\left(N^{\frac{2}{3}}\right) = \sum_{d \setminus P}'' \sum_{dm \leqslant N} \mu(d)\, \psi\left(\frac{adm}{q}\right). \tag{2}$$

Здесь Q_2 в сумме $\sum'$ пробегает различные произведения пар простых делителей числа Q с условием $\left(\frac{Q_2}{q}\right) = s$, а m в сумме $\sum''$ пробегает при заданном d числа натурального ряда с условием $\left(\frac{dm}{q}\right) = s$.

Чтобы оценить $\sum'$ рассмотрим две суммы:

$$\sum_{\substack{p_1 \setminus Q \\ \left(\frac{p_1}{q}\right)=1}} \sum_{\substack{p_2 \setminus Q \\ \left(\frac{p_2}{q}\right)=s}} \psi\left(\frac{ap_1p_2}{q}\right), \qquad \sum_{\substack{p_1 \setminus Q \\ \left(\frac{p_1}{q}\right)=-1}} \sum_{\substack{p_2 \setminus Q \\ \left(\frac{p_2}{q}\right)=-s}} \psi\left(\frac{ap_1p_2}{q}\right).$$

Исключив из этих сумм $\ll \sqrt{N}$ слагаемых с условием $p_1 = p_2$, получим суммы, содержащие все слагаемые суммы $\sum'$, причем каждое слагаемое повторится два раза. Но согласно следствию леммы 3, каждая из этих сумм будет (все значения p_1 лежат в интервале $N^{\frac{1}{3}} < p_1 \leqslant N^{\frac{2}{3}}$, который можно разбить на $\ll \ln N$ интервалов вида, указанного в следствии леммы 3)

$$\ll N^{1+\varepsilon} F_0.$$

Такую же оценку будет иметь и сумма $\sum''$.

Правая часть равенства (2) разбивается на четыре части; для каждой части $\mu(d)$ и $\left(\frac{d}{q}\right)$ сохраняют неизменные значения. Мы рассмотрим только часть

$$S_0 = \sum_{d \setminus P} {}_0 \sum_{dm \leqslant N} {}_0 \, \psi\left(\frac{adm}{q}\right),$$

где суммирование распространяется на значения d с условиями $\mu(d) = 1$, $\left(\frac{d}{q}\right) = 1$. Остальные три части оцениваются аналогично.

Все значения d, участвующие в сумме S_0, можно разбить на классы, как указано в лемме 2. Сначала рассмотрим один из двух классов, указанных в этой лемме, состоящий только из значений d с условием $d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}$. Часть суммы S_0, отвечающую такому классу, можно представить в форме

$$S' + S'' + S'''; \quad S' = \sum_{d > \frac{N}{q}} {}_0 \sum_{m \leqslant \frac{N}{d}} {}_0 \, \psi\left(\frac{adm}{q}\right),$$

$$S'' = \sum_{d \leqslant \frac{N}{q}} {}_0 \sum_{m \leqslant \left[\frac{N}{dq}\right] q} {}_0 \, \psi\left(\frac{adm}{q}\right), \quad S''' = \sum_{d \leqslant \frac{N}{q}} {}_0 \sum_{\left[\frac{N}{dq}\right] q < m \leqslant \frac{N}{d}} {}_0 \, \psi\left(\frac{adm}{q}\right).$$

Оценим S'. Очевидно, S' отлично от нуля лишь в случае, когда $\frac{N}{q} < N^{\frac{1}{3}+h}$. Интервал

$$\frac{N}{q} < d \leqslant N^{\frac{1}{3}+h}$$

мы разделим на $\ll \ln N$ интервалов, к каждому из которых применимо следствие леммы 3. Получим

$$S' \ll N^{1+\varepsilon} F_0.$$

Оценим S''. Часть суммы S'', отвечающую данному d, можно представить в виде произведения $\left[\frac{N}{dq}\right]$ на сумму

$$\sum_{\rho} \psi\left(\frac{ad\rho}{q}\right),$$

где ρ пробегает числа ряда $1, \ldots, q-1$ с условием $\left(\frac{\rho d}{q}\right) = s$. Согласно лемме 1, последняя сумма $\ll \sqrt{q} \ln q$. Следовательно,

$$S'' \ll \sum_{d \leqslant \frac{N}{q}}{}_0 \frac{N}{dq} \sqrt{q} \ln q \ll N^{1+\varepsilon} F_0.$$

Наконец, оценим S'''. Значения d, входящие в S''', мы распределим среди интервалов

$$1 \leqslant d \leqslant \frac{N}{s_0 q}, \quad \frac{N}{s_0 q} < d \leqslant \frac{N}{(s_0-1)q}, \ldots, \frac{N}{2q} < d \leqslant \frac{N}{q},$$

где s_0 — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{\frac{N}{q}}$. Часть суммы S''', отвечающая первому интервалу, очевидно,

$$\ll \frac{N}{s_0 q} q \ll N \sqrt{\frac{q}{N}}.$$

Часть суммы S''', отвечающая какому-либо из оставшихся интервалов

$$\frac{N}{sq} < d \leqslant \frac{N}{(s-1)q},$$

очевидно, равна

$$S(s) = \sum_{\frac{N}{sq} < d \leqslant \frac{N}{(s-1)q}}{}_0 \quad \sum_{(s-1)q < m \leqslant \frac{N}{d}}{}_0 \psi\left(\frac{adm}{q}\right).$$

Применяя лемму 3, получим $\left(U = \frac{N}{sq}, \ \Delta = \frac{N}{s(s-1)q}\right)$

$$S(s) \ll \frac{N}{s^2} \sqrt{\frac{s^2 q}{N} + \frac{1}{q}} \ll \frac{N}{s} F_0; \quad \sum_{s=2}^{s_0} S(s) \ll N^{1+\varepsilon} F_0.$$

Теперь рассмотрим часть правой части равенства (2), отвечающую одному из оставшихся классов. Эта часть приводится к виду (лемма 2)

$$\frac{1}{B} \sum_{x} \sum_{y} \psi\left(\frac{axy}{y}\right),$$

где суммирование распространяется на область

$$N^{\frac{1}{3}} < x \leqslant N^{\frac{2}{3}+h}, \quad xym \leqslant N, \quad (x, y) = 1).$$

Последняя сумма разбивается на $\ll k$ сумм, к каждой из которых применима лемма 4. Поэтому эта сумма будет

$$\ll N^{1+\varepsilon''} F_{\upsilon}.$$

Собирая все доказанное, мы и убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Замечание 2. В указанном в начале статьи общем случае, когда $p^{(s)}$ пробегает простые числа с условием $\operatorname{ind} p^{(s)} \equiv s \pmod n$ (или также — произведения заданного числа простых чисел, подчиненные тому же условию), оценка теоремы будет также иметь место. Она будет иметь место также и для чисел $p^{(s)}$, определяемых двумя условиями: $\operatorname{ind} p^{(s)} \equiv s \pmod n$, $\mu(p^{(s)}) = l$, где l имеет одно из значений 1, —1.

Поступило
21.XII.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Элементарное доказательство одной теоремы теории простых чисел, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 3—12.

[2] Виноградов И. М., Арифметический метод в применении к вопросам распределения чисел с заданным свойством индекса, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 15 (1951), 297—308.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 113 – 144

Н. С. КОШЛЯКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ. I

Работа посвящена изучению некоторых аналитических функций, связанных с дедекиндовой функцией $\zeta_\Omega(s)$ в тех случаях, когда Ω есть либо рациональное, либо квадратичное поле как с положительным, так и с отрицательным определителем Δ.

Вводя особую функцию $\sigma(z)$, автор строит ряд определенных общих закономерностей, которые для рационального поля переходят в классические формулы анализа. Для квадратичного поля эти закономерности представляют собою новые, еще неизвестные результаты.

§ 1. О функциях $\zeta_\Omega(s)$ и $\sigma(z)$

1°. Пусть Ω есть алгебраическое поле χ-го порядка с основным числом Δ и пусть r_1 есть число вещественных полей, сопряженных с Ω, а r_2 — половина числа мнимых сопряженных полей, так что

$$\chi = r_1 + 2r_2. \tag{1.1}$$

В настоящей работе мы ограничимся исследованием лишь случаев рационального и квадратичного поля, когда

$$\chi = 1 \text{ и } \chi = 2. \tag{1.2}$$

Обозначим через $F(n)$ число идеалов поля с нормой n и введем в рассмотрение функцию комплексной переменной $s=\tau+it$, определив ее посредством ряда Дирихле:

$$\zeta_\Omega(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}. \tag{1.3}$$

Так как

$$F(n) = O(n^\eta), \tag{1.4}$$

где положительное число η может быть сделано сколь угодно малым, то ряд (1.3) будет абсолютно сходящимся при $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Кронекер и Дедекинд первые изучили аналитический характер функции $\zeta_\Omega(s)$ и показали, что эта функция является регулярной на всей плоскости комплексного переменного s, за исключением точки $s=1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \tag{1.5}$$

где

$$r = r_1 + r_2 - 1, \quad \zeta_\Omega^{(0)}(0) = \zeta_\Omega(0), \quad \zeta_\Omega^{(1)}(0) = \zeta'_\Omega(0) = \left.\frac{d\zeta_\Omega(s)}{ds}\right|_{s=0}.$$

Кроме того, ими установлено, что для функции $\zeta_\Omega(s)$ имеет место функциональное уравнение

$$A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s)=A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\zeta_\Omega(1-s), \tag{1.6}$$

где для краткости положено:

$$A=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2^{r_2}\pi^{\chi/2}}. \tag{1.7}$$

Из этого функционального уравнения и из выражения (1.5) следует, что $\zeta_\Omega(0)=-\frac{1}{2}$ для рационального поля; $\zeta_\Omega(0)=-1$ для мнимого квадратичного поля; $\zeta_\Omega(0)=0$ для вещественного квадратичного поля.

В дальнейшем исследовании нам понадобится асимптотическая оценка функции $\zeta_\Omega(s)$ в полосе $s=\tau+it$ $(\tau_1<\tau<\tau_2)$ при больших значениях $|t|$. Этот вопрос был исследован Ландау, который показал, что

$$\zeta_\Omega(s)=O(|t|^{\chi(1-\tau)}),\quad \tau\leqslant 0, \tag{1.8}$$

причем эта оценка равномерна относительно τ, изменяющегося в пределах $\tau_1<\tau<\tau_2$.

2°. Введем в наше исследование основную функцию $\sigma(z)$, которая по своим свойствам окажется вполне аналогичной функции $\frac{1}{e^{2\pi z}-1}$, играющей фундаментальную роль в теории рационального поля. С этой целью рассмотрим определенный интеграл

$$\int_0^\infty K_{r_1,r_2}(xt)t^{s-1}\,dt=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,\frac{G(1-s)}{x^s},\quad x>0,\quad \operatorname{Re}(s)>0, \tag{2.1}$$

где для краткости положено

$$G(s)=\frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)}{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}. \tag{2.2}$$

Так как

$$\int_0^\infty K_0(xt)t^{s-1}dt=2^{s-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{x^s},\quad x>0,\quad \operatorname{Re}(s)>0, \tag{2.3}$$

где $K_0(x)$ обозначает макдональдову функцию, то мы можем заключить, что

$$K_{1,0}(x)=\sqrt{\pi}e^{-2x} \tag{2.4}$$

для рационального поля $(r_1=1,\ r_2=0)$;

$$K_{0,1}(x)=\frac{K_0(2\bar\varepsilon\sqrt{x})-K_0(2\varepsilon\sqrt{x})}{i} \tag{2.5}$$

для мнимого квадратичного поля $(r_1=0,\ r_2=1)$;

$$K_{2,0}(x)=2\{K_0(4\bar\varepsilon\sqrt{x})+K_0(4\varepsilon\sqrt{x})\} \tag{2.6}$$

для вещественного квадратичного поля $(r_1=2,\ r_2=0)$, где

$$\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{4}},\quad \bar\varepsilon=e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Из асимптотический оценки при большом $|x|$:

$$K_0(x) = \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}, \quad |\vartheta| < 1, \tag{2.7}$$

и дно, что интеграл (2.1) будет абсолютно сходящимся при $\operatorname{Re}(s) > 0$; поэтому его можно обратить по известной формуле Меллина, в результате чего получится формула:

$$K_{r_1, r_2}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau - i\infty}^{\tau + i\infty} \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{G(1-s)}{x^s}\, ds, \quad \tau > 0, \quad x > 0. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(x) = \sigma_{r_1, r_2}(x) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, K_{r_1 r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right), \quad x > 0, \tag{2.9}$$

где число A выражается формулой (1.7).

Докажем, что ряд (2.9) будет сходиться абсолютно и равномерно в области, определяемой неравенствами $x > x_0 > 0$, где через x_0 обозначено произвольное число, которое может быть выбрано сколь угодно малым.

Действительно, при $s = \tau + it$ и при большом $|t|$ имеет место оценка

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, |t|^{\tau - 1/2}\right), \quad \tau_1 < \tau < \tau_2, \tag{2.10}$$

из которой вытекает, что

$$\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, G(1-s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, |t|^{\chi(\tau - 1/2)}\right). \tag{2.11}$$

Положим в формуле (2.8) $\tau > \tau_1 > 1$, тогда мы можем написать, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} F(n)\, K_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau_1 - i\infty}^{\tau_1 + i\infty} \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, G(1-s) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s} \frac{A^{2s}\, ds}{x^s}.$$

Произведенная здесь перестановка порядков суммирования и интегрирования совершена на законном основании, так как ряд (1.3) сходится абсолютно при $\tau_1 > 1$ и, кроме того, сходится абсолютно и интеграл (2.1), как это следует из оценки (2.11).

Далее, из оценок (1.8) и (2.11) вытекает, что

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} F(n)\, K_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right) \right| < \frac{M}{x_0^{\tau_1}} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\tau_1}}, \quad \tau_1 > 1, \tag{2.12}$$

где через M обозначена конечная, не зависящая от x величина.

Из последнего неравенства ясно, что ряд (2.9) сходится абсолютно и равномерно в области $x > x_0$.

Отметим еще, что из приведенных здесь рассуждений вытекает следующая важная для нас формула:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{A^{2s-1}}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, G(1-s)\, \zeta_Q(s)\, \frac{ds}{x^s}, \quad \alpha > 1, \quad x > 0. \tag{2.13}$$

3°. Найдем, пользуясь формулой (2.13), разложение функции $\sigma(x)$ на рациональные дроби. С этой целью возьмем за контур интегрирования прямоугольник с вершинами

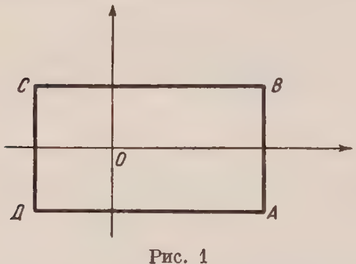


Рис. 1

$$A(\alpha - iT),\quad B(\alpha + iT),$$
$$C(\beta + iT),\quad D(\beta - iT),$$

где $\alpha > 1$, $-1 < \beta < 0$, и проинтегрируем по этому контуру функцию

$$\omega(s) = \frac{A^{2s-1} G(1-s) \zeta_\Omega(s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}\cdot x^s}.$$

Если принять во внимание оценки (2.11) и (1.8), то нетрудно убедиться, что на прямых BC и DA имеет место оценка

$$\omega(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^\lambda\right),$$

откуда ясно, что

$$\lim_{T\to\infty}\int_{BC}\omega(s)\,ds = 0,\qquad \lim_{T\to\infty}\int_{DA}\omega(s)\,ds = 0.$$

Применяя теорему Коши, найдем, что

$$\sigma(x) = R_0 + R_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\omega(s)\,ds,\qquad x > 0, \tag{3.1}$$

где через R_0 и R_1 обозначены вычеты функции $\omega(s)$ относительно ее простых полюсов $s=0$ и $s=1$.

Преобразуем интеграл, входящий в формулу (3.1), сначала при помощи функционального уравнения

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s} G(s)\,\zeta_\Omega(1-s), \tag{3.2}$$

а затем при помощи подстановки $s = 1-\sigma$; тогда этот интеграл приведется к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\zeta_\Omega(\sigma)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{x^{1-\sigma}} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\left(\frac{n}{x}\right)^\sigma}.$$

Так как по условию $\beta < 0$, то мы имеем право переставить здесь порядки суммирования и интегрирования. Сделав это и приняв во внимание известное равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{\alpha^\sigma} = \frac{1}{1+\alpha^2},\qquad \alpha > 0,\quad 0 < \tau < 2, \tag{3.3}$$

мы убедимся, что интеграл, стоящий в правой части равенства (3.1), приведется к сумме

$$\frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2}.$$

Замечая, что

$$R_0 = \frac{2^r \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad R_1 = -\frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi} \frac{1}{x},$$

мы получаем искомую формулу, дающую разложение функции $\sigma(x)$ на рациональные дроби, а именно:

$$\sigma(x) = \frac{2^r \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi} \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2 + n^2}. \tag{3.4}$$

Для рационального поля эта формула переходит в классическое разложение Эйлера:

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi x} + \frac{x}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - n^2}. \tag{3.5}$$

Хотя разложение (3.4) доказано нами в предположении, что x вещественно и положительно, но нетрудно убедиться, пользуясь методом аналитического продолжения функций, что равенство (3.4) сохраняет свою силу и для комплексных значений x, но таких, что $-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{\pi}{2}$. Укажем на некоторые следствия найденных формул.

Следствие 1. *Если положить* $z = x + iy$ $(x \geqslant 0)$, *то из соотношения* (3.4) *следует формула*:

$$2\pi i \sigma(iz) = i \frac{2^{r+1} \pi^{r_2+1} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{2\zeta_{\Omega}(0)}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \left\{ \frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right\}. \tag{3.6}$$

Из этой формулы видно, что $2\pi i \sigma(iz)$ есть мероморфная функция, имеющая на плоскости z бесчисленное множество простых полюсов в точках $z = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ с вычетами, соответственно равными $F(n)$; кроме того, из того же разложения видно, что

$$\sigma(iz) = -\sigma(-iz) + \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}. \tag{3.7}$$

Следствие 2. *Если* $z = x + iy$ *и* $x > 0$, *то модуль произведения* $z^s \sigma(z)$ *может быть сделан сколь угодно малым при беспредельно растущем* x *и при любом вещественном* s.

Для доказательства достаточно обратиться к формуле

$$\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{A^{2\sigma - 1}}{2 \cos \frac{\pi\sigma}{2}} G(1 - \sigma) \zeta_{\Omega}(\sigma) \frac{d\sigma}{z^{\sigma}}, \quad \alpha > 1, \tag{3.8}$$

доказанной нами для вещественного и положительного z. Но эта формула сохраняет свою силу и для комплексных значений z с положительной вещественной частью, т. е. для

$$z = |z| e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, интеграл (3.8) будет в этом случае сходящимся, что следует из оценки подинтегральной функции:

$$O\left(e^{-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)|t|} |t|^{\xi}\right). \tag{3.9}$$

Умножим обе части равенства (3.8) на z^s и выберем α бо́льшим s, что мы всегда можем сделать. В силу оценки (3.9), мы можем написать, что

$$|z^s\sigma(z)| < x^{s-\alpha} M \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)|t|} |t|^{\xi} dt,$$

где ограниченная величина M от x не зависит. Отсюда непосредственно следует, что

$$|z^s\sigma(z)| = O\left(\frac{1}{x^{\alpha-s}}\right),$$

а это равенство и доказывает наше следствие.

Следствие 3. *Если вещественная часть $z = x + iy$ растет неограниченно так, что ее дробная часть $\{x\} = [x] - x$ заключается между двумя произвольно взятыми дробями x_0 и x_1, то*

$$|\sigma(iz)| = O(|z|^{\eta}), \tag{3.10}$$

где положительное число η может быть взято сколь угодно малым.

Для доказательства достаточно воспользоваться формулой (3.6), разбив суммирование в правой части на интервалы $(1,\ n < x)$, $(n > x,\ \infty)$ и приняв затем во внимание оценку (1.4).

4°. Воспользуемся функциональным уравнением (3.2) для доказательства того, что при $\rho > 0$ имеет место формула преобразования:

$$\sqrt{\rho}\left\{2^{r_1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right)\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\rho}}\left\{2^{r_1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, X_{r_1, r_2}\left(\frac{n}{A\rho}\right)\right\}, \tag{4.1}$$

где $X_{r_1, r_2}(x)$ обозначает функцию, определяемую интегральным соотношением

$$\int_0^{\infty} X_{r_1, r_2}(xt)\, t^{s-1}\, dt = \frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}{x^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad x > 0. \tag{4.2}$$

Для доказательства этой формулы заметим прежде всего, что

$$\left.\begin{aligned} &X_{1,0}(x) = 2e^{-x^2} \text{ для рационального поля;}\\ &X_{0,1}(x) = e^{-x} \text{ для мнимого квадратичного поля;}\\ &X_{2,0}(x) = 4K_0(2x) \text{ для вещественного квадратичного поля.}\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

Отсюда ясно, что в силу оценки (2.7) интеграл (4.2) будет абсолютно сходящимся в полуплоскости $\operatorname{Re}(s) > 0$, вследствие чего его можно обратить по формуле Меллина и написать, что

$$X_{r_1, r_2}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\frac{ds}{x^s}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0. \tag{4.4}$$

Выберем $\alpha > 1$; тогда получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s)\frac{ds}{\rho^s}, \quad \alpha > 1, \quad \rho > 0; \tag{4.5}$$

если теперь проинтегрировать функцию

$$\omega(s) = \frac{A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s)}{\rho^s}$$

по обводу четырехугольника $ABCD\,(\alpha > 1, -1 < \beta < 0)$, то в пределе при $T \to \infty$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = R_0 + R_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s)\frac{ds}{\rho^s}, \tag{4.6}$$

где R_0 и R_1 обозначают вычеты функции $\omega(s)$ относительно ее полюсов $s = 0$ и $s = 1$.

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части (4.6), сначала при помощи функционального уравнения (3.2), а затем при помощи подстановки $s = 1 - \sigma$; тогда мы найдем, что этот интеграл будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\zeta_\Omega(1-s)\frac{ds}{\rho^s} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{2\pi i}\int_{1-\beta - i\infty}^{1-\beta + i\infty} A^\sigma\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)\frac{d\sigma}{\left(\frac{1}{\rho}\right)},$$

вследствие чего формула (4.6) получает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right) = R_0 + R_1 + \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} F(n) X_{r_1, r_2}\left(\frac{n}{A\rho}\right). \tag{4.7}$$

Принимая во внимание, что

$$R_0 = 2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0), \quad R_1 = -2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{1}{\rho},$$

мы из соотношения (4.7) выведем формулу (4.1).

Для рационального поля эта формула переходит в соотношение, известное из теории тэта-функций Якоби:

$$\sqrt{\rho}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2\rho^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2\frac{1}{\rho^2}}\right\}, \quad \rho > 0. \tag{4.8}$$

Для мнимого квадратичного поля получается формула Розенгайна:

$$\sqrt{\rho}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-\frac{2\pi n\rho}{\sqrt{|\Delta|}}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-\frac{2\pi n}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{\rho}}\right\}, \quad \rho > 0, \tag{4.9}$$

а для вещественного квадратичного поля мы получаем соотношение:

$$\sqrt{\rho}\left\{\zeta'_\Omega(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_0\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\rho\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{\zeta'_\Omega(0) - \sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_0\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\frac{1}{\rho}\right)\right\},$$
$$\rho > 0, \tag{4.10}$$

установленное нами другим способом в работе ([1]).

5°. Покажем, как из формулы (4.1) получается функциональное уравнение (3.2).

Введем для краткости обозначение

$$\varphi_{r_1, r_2}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, X_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A}\right), \quad x > 0, \tag{5.1}$$

где $X_{r_1, r_2}(x)$ определяются формулами (4.3). Пользуясь интегралом (4.2), найдем, что

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\, \zeta_\Omega(s) = \int_0^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1} dx = \int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1} dx + \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1} dx, \quad s > 0.$$

Будем считать, что $0 < s < 1$, и преобразуем интеграл

$$\int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1} dx,$$

на основании формулы (4.1), следующим образом:

$$\int_0^1 \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{s-1} dx = \int_0^1 \left\{ 2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0) - 2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)\, \frac{1}{x} + \varphi_{r_1, r_2}\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} \right\} x^{s-1} dx = \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s} + \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{1-s} + \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x)\, x^{-s} dx;$$

тогда мы получим:

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\, \zeta_\Omega(s) = \frac{2^{s_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s} + \frac{2^{r_1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{1-s} + \int_1^\infty \varphi_{r_1, r_2}(x) \{x^{s-1} + x^{-s}\} dx. \tag{5.2}$$

Так как правая часть этого равенства инвариантна при замене s на $1-s$, то должна быть инвариантной и левая часть, т. е. мы можем написать:

$$A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\, \zeta_\Omega(s) = A^{1-s} \Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(1-s)\, \zeta_\Omega(1-s). \tag{5.3}$$

Ограничительное предположение $0 < s < 1$ может быть, очевидно, снято, и мы, таким образом, получаем функциональное уравнение (3.2).

В дальнейшем исследовании нам понадобится еще одна функция, которую, подобно функциям $K_{r_1, r_2}(x)$ и $X_{r_1, r_2}(x)$, мы выразим посредством определенного интеграла

$$\int_0^\infty Y_{r_1, r_2}(xt)\, t^{s-1} dt = \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi s}{2}\, \Gamma^{r_1}\left(\frac{2-s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(2-s)\, x^s}, \quad x > 0, \tag{5.4}$$

сходящегося в области, заданной неравенствами

$$0 < \mathrm{Re}(s) < \frac{r_2 + 3}{\chi(\chi - 1)}, \tag{5.5}$$

как это видно из равенств:

$$\left.\begin{aligned} &Y_{1,0}(x)=e^{-x^2} \quad \text{для рационального поля;}\\ &Y_{0,1}(x)=\frac{\sin x}{x} \quad \text{для мнимого квадратичного поля;}\\ &Y_{2,0}(x)=J_0(2x) \quad \text{для вещественного квадратичного поля.}\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Здесь через $J_0(x)$ обозначена бесселева функция нулевого порядка, причем принята во внимание формула Вебера:

$$\int\limits_0^\infty J_0(xt)\,t^{s-1}dt=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)x^s}, \quad 0<\operatorname{Re}(s)<\frac{3}{2}, \quad x>0. \tag{5.7}$$

Отметим, что между тремя функциями $X_{r_1,r_2}(x)$, $Y_{r_1,r_2}(x)$ и $K_{r_1,r_2}(x)$ существует интегральное соотношение, выражаемое формулой

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{a}{x}\right)Y_{r_1,r_2}(bx)\,dx=\frac{1}{b}\,K_{r_1,r_2}(ab), \quad a>0, \quad b>0. \tag{5.8}$$

Действительно, из формулы

$$X_{r_1r_2}\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\frac{x^s ds}{a^s}, \quad a>0,$$

интегрированием по параметру найдем, что

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{a}{x}\right)\,Y_{r_1,r_2}(bx)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,\frac{G(1-s)\,ds}{b^{s+1}a^s},$$

откуда, в силу соотношения (2.8), и вытекает формула (5.8).

Укажем еще на формулу

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty Y_{r_1,r_2}(ax)\,\frac{K_{r_1,r_2}(-ibx)-K_{r_1,r_2}(ibx)}{2i}\,x\,dx=\\ =\frac{\pi}{2}\,\frac{b}{a^3}\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{b}{a}\right), \quad a>0, \quad b>0,\end{aligned} \tag{5.9}$$

которой мы воспользуемся в дальнейшем.

Для ее доказательства достаточно взять соотношение

$$\frac{K_{r_1,r_2}(-ibx)-K_{r_1,r_2}(ibx)}{2i}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}\,\frac{G(1-s)\,ds}{b^s x^s}, \quad b>0,$$

и затем интегрированием по параметру установить, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty Y_{r_1,r_2}(ax)\,\frac{K_{r_1,r_2}(-ibx)-K_{r_1,r_2}(ibx)}{2i}\,x\,dx=\\ =\frac{\pi}{2}\,\frac{b}{a^3}\int\limits_{\alpha+1-i\infty}^{\alpha+1+i\infty}\frac{\pi d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{2-\sigma}{2}\right)(\Gamma^{r_2}(2-\sigma)\left(\frac{b}{a}\right)^\sigma},\end{aligned}$$

откуда, в силу формулы (5.4), и будет вытекать равенство (5.9).

В дальнейшем, во избежание излишней пестроты формул, мы часто будем опускать индексы r_1 и r_2 у букв X, Y и т. д.

В заключение настоящего параграфа приведем таблицу обозначений основных параметров и функций, которые постоянно будут встречаться в дальнейшем изложении:

I. Рациональное поле.

$$\chi = 1, \quad r = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{e^{2\pi x} - 1}, \quad X(x) = 2e^{-x^2}, \quad Y(x) = e^{-x^2}, \quad K(x) = \sqrt{\pi} e^{-2x},$$

$$L(x) = \sqrt{\pi}\cos 2x, \quad M(x) = \sqrt{\pi}\sin 2x, \quad N(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}.$$

II. Мнимое квадратичное поле.

$$\chi = 2, \quad r = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}, \quad \zeta(0) = -1,$$

$$X(x) = e^{-x}, \quad Y(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad K(x) = \frac{K_0(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - K_0(2\varepsilon\sqrt{x})}{i},$$

$$L(x) = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{x}), \quad M(x) = K_0(2\sqrt{x}) + \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{x}),$$

$$N(x) = \sqrt{x}\,\frac{\varepsilon K_1(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - \bar{\varepsilon} K_1(2\varepsilon\sqrt{x})}{i}, \quad \varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

III. Вещественное квадратичное поле.

$$\chi = 2, \quad r = 1, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0, \quad A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}, \quad \zeta(0) = 0,$$

$$X(x) = 4K_0(2x), \quad Y(x) = J_0(2x), \quad K(x) = 2\{K_0(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + K_0(4\varepsilon\sqrt{x})\},$$

$$L(x) = 2\left\{K_0(4\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} Y_0(4\sqrt{x})\right\}, \quad M(x) = \pi J_0(4\sqrt{x}),$$

$$N(x) = \sqrt{x}\{\varepsilon K_1(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + \bar{\varepsilon} K_1(4\varepsilon\sqrt{x})\}.$$

§ 2. О различных интегральных представлениях функции $\zeta_\Omega(s)$

6°. В настоящем параграфе мы займемся вопросом о представлении дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ и ее производных $\zeta'_\Omega(0)$ и $\zeta''_\Omega(0)$ через определенные интегралы.

В n° 2 мы доказали, что при $\alpha > 1$ и $\operatorname{Re}(x) > 0$ имеет место формула

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{1}{2\cos\frac{\pi s}{2}} A^{2s-1} G(1-s)\,\zeta_\Omega(s)\,\frac{ds}{x^s}. \tag{6.1}$$

Интеграл, стоящий здесь справа, сходится абсолютно, а подинтегральная функция голоморфна при $\alpha > 1$ и стремится равномерно относительно $\tau > 1$ к нулю, когда $|t|$ растет неограниченно, как это следует из оценки (3.9).

Известно, что при таких условиях мы можем обратить интеграл (6.1) по формуле Меллина и написать, что

$$\zeta_\Omega(s) = 2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{6.2}$$

Эта формула доказана нами в предположении, что $\mathrm{Re}(s)>1$; но разложение (3.4) показывает, что для вещественного квадратичного поля, когда $\zeta_\Omega(0)=0$, точка $x=0$ не является полюсом функции $\sigma(x)$; поэтому для вещественного квадратичного поля формула (6.2) справедлива и при $s=1$. Отсюда ясно, что в соотношении (6.2) мы можем считать, что

$$\mathrm{Re}(s) > 1 - r, \tag{6.3}$$

где $r = r_1 + r_2 - 1$.

Если принять во внимание функциональное уравнение

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s}G(s)\,\zeta_\Omega(1-s),$$

то интеграл (6.2) может быть переписан так:

$$\zeta_\Omega(s) = 2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty \frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx, \quad \mathrm{Re}(s) < r. \tag{6.4}$$

Формула (6.2) для случая рационального поля переходит в классическую формулу Римана:

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1. \tag{6.5}$$

Для квадратичного поля эта формула дает равенства:

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{\pi\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^{2s-1}}{\Gamma^2(s)\sin\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \tag{6.6}$$

для мнимого квадратичного поля,

$$\zeta_\Omega(s) = \frac{\pi\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2s-1}}{\Gamma^2(s)\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}dx, \quad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{6.7}$$

для вещественного квадратичного поля.

Из последних формул видно, что

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{2p-1}\,dx = 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \text{ для мнимого квадратичного поля}, \tag{6.8}$$

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{2p}\,dx = 0, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \text{ для вещественного квадратичного поля}. \tag{6.9}$$

Кроме того, из соотношения (6.4) видно, что если в случае вещественного квадратичного поля продифференцировать обе части этого равенства по s и затем положить $s=0$, то получатся следующие интегральные представления производных $\zeta'_\Omega(0)$ и $\zeta''_\Omega(0)$:

$$\zeta'_{\Omega}(0) = \pi \int_0^{\infty} \sigma(x)\,dx, \tag{6.10}$$

$$\zeta''_{\Omega}(0) = -2\pi \int_0^{\infty} \sigma(x) \log x\,dx. \tag{6.11}$$

Если обратиться к формуле (6.1) и проинтегрировать подинтегральную функцию по обводу прямоугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad A(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT), \quad 0 < \beta < 1,$$

то, рассуждая так же, как в n^0 3, мы придем к равенству:

$$\sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{A^{2s-1} G(1-s) \zeta_{\Omega}(s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{ds}{x^s}, \quad 0 < \beta < 1, \tag{6.12}$$

откуда вытекает формула:

$$\zeta_{\Omega}(s) = 2A^{1-2s} \cos\frac{\pi s}{2}\, G(s) \int_0^{\infty} \left\{ \sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi x} \right\} x^{s-1} dx, \quad 0 < \mathrm{Re}(s) < 1. \tag{6.13}$$

7°. Обратимся к функциональному уравнению

$$\zeta_{\Omega}(s) = A^{1-2s} G(s) \zeta_{\Omega}(1-s) \tag{7.1}$$

и развернем его правую часть в ряд, расположенный по степеням разности $s-1$; тогда, принимая во внимание, что

$$A^{1-2s} = \frac{1}{A} - \frac{2}{A} \log A \cdot (s-1) + \cdots,$$

$$G(s) = \frac{2^{r_1}}{\pi^{r_1/2}} \frac{1}{(1-s)^{r+1}} - \frac{\chi C + r_1 \log 2}{\pi^{r_1/2}} \frac{2^{r_1}}{(1-s)^r} + \cdots,$$

$$\zeta_{\Omega}(1-s) = \zeta_{\Omega}(0) - \zeta'_{\Omega}(0)(s-1) + \frac{1}{2} \zeta''_{\Omega}(0)(s-1)^2 + \cdots,$$

найдем, что

$$\lim_{s\to 1} \left\{ \zeta_{\Omega}(s) + \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{s-1} \right\} =$$
$$= \frac{2^{r+1} \pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_{\Omega}^{(r+1)}(0)}{r+1} - \left[\chi C + \log \frac{(2\pi)^{\chi}}{|\Delta|} \right] \zeta_{\Omega}^{(r)}(0) \right\}, \tag{7.2}$$

где через C обозначена постоянная Эйлера.

Выражение, стоящее здесь справа, может быть представлено через определенные интегралы, содержащие функцию $\sigma(x)$.

Чтобы показать это, обратимся к формуле (6.12), которую на основании уравнения (7.1) можно представить так:

$$\sigma(t) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{1}{2\sin\frac{\pi s}{2}} A^{1-2s} G(s) \zeta_{\Omega}(1-s) \frac{ds}{t^{1-s}}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{7.3}$$

Интегрируя по параметру t и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} K(xt)\, t^{\sigma-1} dt = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{G(1-\sigma)}{x^{\sigma}}, \quad \mathrm{Re}(\sigma) > 0, \quad x > 0,$$

убедимся, что

$$\int_0^\infty \left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\} K\left(\frac{xt}{A^2}\right) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{A\pi\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin \pi s} \frac{ds}{x^s}, \quad 0<\beta<1. \quad (7.4)$$

Докажем, что, несмотря на наличие бесконечных пределов интегрирования, произведенная здесь перестановка порядков интегрирования оказывается законной. Для этой цели покажем, что здесь выполняются все условия, позволяющие применить известную теорему Жордана, устанавливающую возможность такой перестановки.

Положим для краткости

$$g(x, t, a) = \frac{\zeta_\Omega(a+it)\, x^{-a-it}}{\sin \frac{\pi}{2}(a+it)} + \frac{\zeta_\Omega(a-it)\, x^{-a+it}}{\sin \frac{\pi}{2}(a-it)}$$

и воспользуемся асимптотическими оценками функции $\zeta_\Omega(a+it)$ при большом $|t|$ и функции $K\left(\frac{xy}{A^2}\right)$ при большом y; тогда мы найдем, что

$$\left|\int_{A_0}^\infty g(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy\right| < \varepsilon_{A_0} \varphi(t),$$

где

$$\varepsilon_{A_0} = L_0 e^{-pA_0} A_0^\lambda, \quad p>0; \ \varphi(t) = e^{-\frac{\pi}{2}t} t^\mu, \quad t>0,$$

причем постоянное число L_0 от A_0 не зависит.

Равным образом

$$\left|\int_{B_0}^\infty g(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dt\right| < \varepsilon_{B_0} \psi(y),$$

где

$$\varepsilon_{B_0} = L_1 e^{-\frac{\pi}{2}B_0} B_0^\nu, \quad \psi(y) = e^{-qy} y^k, \quad q>0,$$

причем постоянное число L_1 от B_0 не зависит.

Так как функции $\varphi(t)$ и $\psi(y)$ конечны и интегрируемы в пределах $(t_0, +\infty)$ и $(y_0, +\infty)$, где через t_0 и y_0 обозначены достаточно большие величины, то мы вправе утверждать, что

$$\int_{t_0}^{+\infty} dt \int_{y_0}^{+\infty} G(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy = \int_{y_0}^{+\infty} dy \int_{t_0}^{+\infty} G(y, t, \beta) K\left(\frac{xy}{A^2}\right) dt,$$

откуда, в силу теоремы Жордана, вытекает законность произведенной перестановки порядков бесконечного интегрирования.

Возвратимся к формуле (7.4) и будем считать, что

$$0<x<1. \quad (7.5)$$

Проинтегрируем при этом условии функцию

$$\omega(s) = \frac{A\pi\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin \pi s x^s}$$

по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta - iT), \quad B(\beta + iT), \quad C(-h+iT), \quad D(-h-iT),$$

где через h обозначено произвольно взятое положительное нецелое число.

Применяя теорему Коши, найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds = R_0+\sum_p R_p+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\omega(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-h+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta+iT}^{-h-iT}\omega(s)\,ds, \qquad (7.6)$$

где R_0 обозначает вычет функции $\omega(s)$ относительно полюса $s=0$, а через $\sum\limits_p R_p$ обозначена сумма вычетов той же функции относительно тех ее полюсов $s=-p$ $(p=1, 2, 3\ldots)$, которые заключены внутри контура $ABCD$.

На стороне DC, где $s=-h+it$, в силу оценки $\frac{1}{\sin\pi s}=O\,(e^{-\pi|t|})$, имеем:

$$\left|\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\right| < A_1 x^h\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi|t|}\,dt,$$

где A_1 — постоянное число, не зависящее от h. Так как, по условию, $0<x<1$, то отсюда следует, что

$$\lim_{h\to\infty}\int\limits_{-h-iT}^{-h+iT}\omega(s)\,ds=0.$$

На отрезке CB вещественная часть переменной s изменяется в пределах $-h<\tau<\beta$, поэтому мы можем написать, что

$$\left|\int\limits_{-\infty+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds\right| < B_1 e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\xi}\int\limits_{-\infty}^{\beta}\frac{d\tau}{x^{\tau}},$$

где постоянная величина B_1 от x не зависит. Так как $0<x<1$, то интеграл, стоящий здесь справа, сходится, вследствие чего

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{-\infty+iT}^{\beta+iT}\omega(s)\,ds=0.$$

Совершенно аналогично доказывается, что и

$$\lim_{T\to+\infty}\int\limits_{\beta+iT}^{-\infty-iT}\omega(s)\,ds=0,$$

после чего формула (7.6) переходит в следующую:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{A\pi\zeta_{\mathfrak{Q}}(1-s)}{2\sin\pi s}\,\frac{ds}{x^s}=R_0+\sum_p R_p. \qquad (7.7)$$

Если ввести обозначение

$$C_{\mathfrak{Q}}=\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r+1)}(0)}{r+1}-\left[\chi C+\log\frac{(2\pi)^{\chi}}{|\Delta|}\right]\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0)\right\}, \qquad (7.8)$$

так что

$$\lim_{s\to1}\zeta_{\mathfrak{Q}}(s)+\left\{\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{s-1}\right\}=C_{\mathfrak{Q}}, \qquad (7.9)$$

то мы будем иметь:

$$R_0=\frac{\pi A}{2}D_s\left\{s\zeta_{\mathfrak{Q}}(1-s)\frac{s}{\sin\pi s}\,\frac{1}{x^s}\right\}_{s=0}=\frac{A}{2}\left\{C_{\mathfrak{Q}}-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r+1)}(0)\log x\right\}$$

Аналогично, при $0<x<1$ получаем:

$$\sum_{p=0}^{\infty} R_p = \frac{A}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \zeta_{\mathfrak{Q}}(p+1)x^p = \frac{A}{2}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right\}.$$

Внося найденные значения вычетов в формулу (7.7), мы можем привести соотношение (7.4) к такому виду:

$$C_{\mathfrak{Q}} = -\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right\} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x +$$

$$+\frac{2}{A}\int_0^{\infty}\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}(0)}{\pi t}\right\}K\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt. \qquad (7.10)$$

Применяя принцип аналитического продолжения функций, мы без труда докажем, что разложение (7.10), доказанное нами в предположении, что $0<x<1$, оказывается справедливым и при комплексных значениях x таких, что $-\frac{\pi}{2}<\arg x<\frac{\pi}{2}$. Впоследствии мы свяжем формулу (7.10) с изучением некоторой аналитической функции, которую можно рассматривать как обобщение функции $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, а сейчас укажем на некоторые следствия этой формулы.

Если ввести обозначения

$$L(x) = L_{r_1, r_2}(x) = \frac{K_{r_1, r_2}(-ix)+K_{r_1, r_2}(ix)}{2}, \qquad (7.11)$$

$$M(x) = M_{r_1, r_2}(x) = \frac{K_{r_1, r_2}(-ix)-K_{r_1, r_2}(ix)}{2i},$$

то из формулы (7.10) получается следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\pi}{2}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0) = \frac{x}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2} - \frac{2}{AB}\int_0^{\infty}\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}(0)}{\pi t}\right\}M\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt, \quad x>0, \ (7.12)$$

где

$$B = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}. \qquad (7.13)$$

Если принять во внимание, что

$$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2+n^2} = \pi\sigma(x) + \frac{2^r\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0) + \zeta_{\mathfrak{Q}}(0)\frac{1}{x}, \quad \mathrm{Re}(x)>0,$$

то соотношение (7.12) может быть переписано в следующей форме:

$$\int_0^{\infty} M\left(\frac{xt}{A^2}\right)\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}(0)}{\pi t}\right\}dt = \frac{A\pi}{2}\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}(0)}{\pi x}\right\}, \quad x>0. \quad (7.14)$$

Для рационального поля эта формула переходит в интеграл Пуассона-Лежандра:

$$\int_0^{\infty}\sin 2\pi xt\left\{\frac{1}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{2\pi t}\right\}dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}, \quad x>0. \quad (7.15)$$

Для мнимого квадратичного поля получается соотношение:

$$\int_0^{\infty}\left\{\frac{2}{\pi}K_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{|\Delta|}}\right)+Y_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{|\Delta|}}\right)\right\}\sigma(t)\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\left\{\sigma(x) - \frac{1}{\pi x} + \frac{\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right\},\ x > 0, \tag{7.16}$$

где $K_0(x)$ и $Y_0(x)$ обозначают макдональдову и бесселеву функции нулевого порядка.

Чтобы развернуть формулу (7.14) для случая вещественного квадратичного поля, будем рассматривать ее левую часть как сумму

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)\sigma(t)\,dt + \left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{\pi}\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt\right\}_{s\to 0}.$$

Из формулы (7.3) видно, что

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt = \frac{A^{2s}\pi}{2}G(1-s)\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1}{x^s},$$

вследствие чего

$$\left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{\pi}\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)t^{s-1}\,dt\right\}_{s\to 0} = \frac{\zeta_\Omega'(0)}{\pi}.$$

Отсюда получится значение интеграла (7.14) для случая вещественного квадратичного поля, а именно:

$$\int_0^\infty J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{\Delta}}\right)\sigma(t)\,dt = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left\{\sigma(x) - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\zeta_\Omega'(0)\right\},\quad x > 0. \tag{7.17}$$

Выведем еще одно интегральное соотношение, содержащее функцию $L\left(\frac{x}{A^2}\right)$ и функции $\zeta_\Omega(0)$, $\zeta_\Omega'(0)$ для случаев рационального и мнимого квадратичного поля.

Для этой цели составим определенный интеграл

$$I = \pi\int_0^\infty\left\{\sigma(x) + (-1)^{r_2+1}\frac{\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x}\right\}dx$$

и будем считать, что

$$I = \lim_{s\to 1} I_s,$$

где

$$I_s = \pi\int_0^\infty\left\{\sigma(x)\,x^{s-1} + (-1)^{r_2+1}\frac{\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x^s}\right\}dx.$$

Но из равенства (6.4) следует, что

$$\int_0^\infty \sigma(x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{\zeta_\Omega(s)}{2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)},$$

а соотношение (2.1) дает:

$$\int_0^\infty L\left(\frac{x}{A^2}\right)\frac{dx}{x^s} = \frac{\pi}{2}\frac{G(s)}{\left(\frac{x}{A^2}\right)^{1-s}}.$$

Отсюда без труда найдем, что в рассматриваемых случаях

$$\lim_{s\to 1} I_s = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2^{r+1}\pi^{r_2}} \lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) + \frac{x^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{s-1}\right\}.$$

Принимая во внимание равенство (7.2), получим искомое интегральное соотношение:

$$\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} = \chi\left(C + \log\frac{2\pi}{\frac{\chi}{\sqrt{|\Delta|}}}\right)\zeta_\Omega^{(r)}(0) +$$

$$+\pi\int_0^\infty\left\{\frac{(-1)^{r_2+1}\pi^{\frac{r_1}{2}-2}}{2^{2r_1-1}}\,\frac{L\left(\frac{x}{A^2}\right)}{x} - \sigma(x)\right\}dx, \tag{7.18}$$

переходящее в формулу Дирихле

$$C = \int_0^\infty\left\{\frac{1}{e^x-1} - \frac{\cos x}{x}\right\}dx \tag{7.19}$$

в случае рационального поля, и в соотношение

$$\zeta_\Omega'(0) = -2\left(C + \log\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + \pi\int_0^\infty\left\{\sigma(x) + \frac{J_0\left(4\pi\sqrt{\frac{x}{|\Delta|}}\right)}{\pi x}\right\}dx \tag{7.20}$$

— в случае мнимого квадратичного поля.

Для вещественного квадратичного поля, когда $\zeta_\Omega(0)=0$, изложенный здесь метод приводит к интегральному соотношению

$$\zeta_\Omega''(0) = 4\left\{C + \log\left(2\pi\sqrt{\frac{x}{\Delta}}\right\}\zeta_\Omega'(0) -\right.$$

$$-4\left\{C + \log 2\pi\sqrt{\frac{x}{\Delta}}\right\}\pi\int_0^\infty\sigma(t)\,dt - 2\pi\int_0^\infty\sigma(t)\log t\,dt,$$

которое приводится к тождеству $0\equiv 0$, если воспользоваться ранее доказанными равенствами (6.10) и (6.11).

8°. Докажем, что уравнение для дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ может быть выведено и из интеграла (7.14).

В самом деле, умножим обе части равенства (7.14) на x^{s-1}, где $0<\mathrm{Re}(s)<1$, и проинтегрируем затем по x от $x=0$ до $x=\infty$; тогда, принимая во внимание равенства

$$\int_0^\infty M\left(\frac{xt}{A^2}\right)x^{s-1}\,dx = \frac{A^{2s}\pi}{2}G(1-s)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{t^s},\quad \mathrm{Re}(s)>0,$$

$$\zeta_\Omega(s) = 2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}\,G(s)\int_0^\infty\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}x^{s-1}\,dx,\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1, \tag{8.1}$$

найдем, что

$$\zeta_\Omega(s) = 2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty\left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}\frac{dt}{t^s},\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1,$$

откуда, в силу соотношения (8.1), получается функциональное уравнение

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s}G(s)\,\zeta_\Omega(1-s),$$

причем принятое ограничение $0<\mathrm{Re}(s)<1$ может быть, очевидно, снято.

В работе (2) нами дано одно интегральное представление римановой функции $\zeta(s)$. Это представление может быть распространено и на квадратичное поле. Чтобы показать это, обратимся к формуле

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{d\sigma}{x^\sigma},\quad x>0,\quad 0<\alpha<2,$$

при помощи которой найдем, что

$$\frac{1}{y^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-s}}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_\Omega(\sigma-s+1)}{y^{s-\sigma}}\,d\sigma,$$

$$y>0,\quad 1<\alpha<2,\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1.$$

Если проинтегрировать функцию, стоящую здесь под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha-iT),\quad B(\alpha+iT),\quad C(\beta+iT),\quad D(\beta-iT),$$

где $0<\beta<\mathrm{Re}(s)$, то в пределе при $T\to+\infty$ получится равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-s}}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{\pi}{2}\frac{y^s}{\sin\frac{\pi s}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_\Omega(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}\,d\sigma. \tag{8.2}$$

Обозначим через $\Phi_s(y)$ левую часть этого равенства и произведем оценку функции $\Phi_s(y)$ при больших и малых значениях y. С этой целью проинтегрируем функцию, стоящую под знаком интеграла в соотношении

$$\Phi_s(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_\Omega(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}\,d\sigma,\quad 0<\beta<\mathrm{Re}(s), \tag{8.3}$$

по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta-iT),\quad B(\beta+iT),\quad C(\gamma+iT),\quad D(\gamma-iT),$$

где $-\frac{1}{2}<\gamma<0$, и увеличим затем T до бесконечности; тогда мы придем к формуле

$$\Phi_s(y)=R_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\frac{\zeta_\Omega(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}\,d\sigma,\quad -\frac{1}{2}<\gamma<0,$$

где через R_0 обозначен вычет подинтегральной функции относительно полюса $\sigma=0$. Очевидно, что величина R_0 от y не зависит.

Из последнего равенства следует, что при больших значениях y

$$\Phi_s(y)=R_0+O\left(\frac{1}{y^{-\gamma}}\right),$$

откуда вытекает искомая оценка

$$\Phi_s(y)=O(1). \tag{8.4}$$

Далее, из равенства (8.3) вытекает, что при малых значениях y имеет место оценка

$$\Phi_s(y)=O(y^\beta),\quad 0<\beta<\mathrm{Re}(s). \tag{8.5}$$

Примем во внимание, что

$$L_{1,0}(x) = \sqrt{\pi}\cos 2x, \quad L_{0,1}(x) = \frac{\pi}{2} J_0(2\sqrt{x}),$$
$$L_{2,0}(x) = 2\left\{K_0(4\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2} Y_0(4\sqrt{x})\right\}, \tag{8.6}$$

и заметим, что при больших значениях x имеют место известные асимптотические оценки

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$
$$Y(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{8.7}$$

Тогда, учитывая оценки (8.4) и (8.5), мы убедимся, что определенный интеграл

$$I = \frac{2}{A\pi} x^{1-s} \int_0^\infty \Phi_s(y) L\left(\frac{xy}{A^2}\right)\frac{dy}{y^s} \tag{8.8}$$

будет сходящимся в полосе

$$\frac{\chi - 1}{2\chi} < \operatorname{Re}(s) < 1.$$

Заменим здесь функцию $\Phi_s(y)$ интегралом (8.3) и переставим порядки интегрирования, что является операцией законной; тогда, в силу соотношения

$$\int_0^\infty L(xt)\, t^{s-1}\, dt = \frac{\pi}{2}\frac{G(1-s)}{x^s}, \quad x > 0, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \tag{8.9}$$

найдем, что

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\zeta_Q(s-\sigma)\frac{d\sigma}{x^\sigma}.$$

Если проинтегрировать функцию, стоящую здесь под знаком интеграла по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta - iT), \quad B(\beta + iT), \quad C(-\beta + iT), \quad D(-\beta - iT),$$

то в пределе при $T \to \infty$ получится равенство

$$I = \zeta_Q(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\zeta_Q(s-\sigma)\frac{d\sigma}{x^\sigma} =$$
$$= \zeta_Q(s) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\zeta_Q(s+\sigma)\frac{d\sigma}{x^{-\sigma}} = \zeta_Q(s) - \Phi_{1-s}(y). \tag{8.10}$$

Из соотношений (8.8) и (8.10) вытекает следующее интегральное представление функции $\zeta_Q(s)$:

$$\zeta_Q(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{F(n)}{n^s}\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_Q^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{\pi}{2}\frac{x^{1-s}}{\sin\frac{\pi}{2}(1-s)} +$$
$$+ \frac{2}{A\pi} x^{1-s}\int_1^\infty \left\{\sum_{n=1}^\infty \frac{F(n)}{n^{1-s}}\frac{1}{1 + \left(\frac{n}{y}\right)^2} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_Q^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{\pi}{2}\frac{y^s}{\sin\frac{\pi s}{2}}\right\} L\left(\frac{xy}{A^2}\right) dy, \tag{8.11}$$

где

$$x>0, \quad \frac{\chi-1}{2\chi}<\operatorname{Re}(s)<1.$$

Для рационального поля это представление переходит в формулу для римановой функции $\zeta(s)$:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^2}-\frac{\pi}{2}\frac{x^{1-s}}{\sin\frac{\pi}{2}(1-s)}+$$

$$+2x^{1-s}\int_0^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-s}}\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}-\frac{\pi}{2}\frac{y^s}{\sin\frac{\pi s}{2}}\right\}\frac{\cos 2\pi xy}{y^s}\,dy, \quad x>0, \quad 0<\operatorname{Re}(s)<1, \tag{8.12}$$

приведенную нами в работе (²).

9°. В 1932 году Зигель восстановил по черновикам Римана следующее интегральное представление функции $\rho(s)=\pi^{s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$:

$$\rho(s)=\pi^{-s/2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\int\limits_{0\swarrow 1}\frac{e^{\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\frac{dx}{x^s}+\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\int\limits_{0\nwarrow 1}\frac{e^{-\pi i x^2}}{e^{\pi i x}-e^{-\pi i x}}\frac{dx}{x^{1-s}}. \tag{9.1}$$

Здесь символами $0\swarrow 1$ и $0\nwarrow 1$ обозначено то обстоятельство, что интегрирование производится по прямым, параллельным биссектрисам координатных углов и пересекающим вещественную ось в точках, лежащих между 0 и 1.

Докажем, что аналогичное интегральное представление имеет место и для функции

$$\rho_\Omega(s)=A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta_\Omega(s). \tag{9.2}$$

Для доказательства возьмем интеграл

$$X\left(\frac{nx}{A}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}A^\sigma\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)\frac{d\sigma}{(nx)^\sigma}, \quad \operatorname{Re}(x)>0, \quad 1<\alpha<2,$$

и составим при помощи этого интеграла соотношение

$$\varepsilon^s\sum_{n=0}^{\infty}F(n)\int_1^{\infty}X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}A^\sigma\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)\,\zeta_\Omega(\sigma)\,\frac{\varepsilon^{s-\sigma}\,d\sigma}{\sigma-s}, \tag{9.3}$$

где

$$0<\operatorname{Re}(s)<1, \quad \varepsilon=e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon}=e^{-\frac{i\pi}{4}}.$$

Функция, стоящая здесь под знаком интеграла, имеет внутри прямоугольника

$$A(\alpha-iT), \quad B(\alpha+iT), \quad C(-\beta+iT), \quad D(-\beta-iT),$$

где $\beta=1-\alpha$, три простых полюса: $\sigma=0$, $\sigma=s$ и $\sigma=1$ с вычетами, соответственно равными

$$R_0=-2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{\varepsilon^s}{s}, \quad R_s=A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta_\Omega(s), \quad R_1=-2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{\varepsilon^{-1-s}}{1-s}.$$

Принимая во внимание, с одной стороны, функциональное уравнение

$$\rho_{\Omega}(1-s)=\rho_{\Omega}(s),$$

а с другой стороны, то обстоятельство, что в пределе при $T\to+\infty$ интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, обращаются в нуль, мы придем к формуле

$$\rho_{\Omega}(s)=\Phi_{\Omega}(\varepsilon, s)+\Phi_{\Omega}(\bar{\varepsilon},\ 1-s), \tag{9.4}$$

где

$$\Phi_{\Omega}(\varepsilon, s)=2^{r_1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)\frac{\varepsilon^s}{s}+\varepsilon^s\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\int_1^{\infty}X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}\,dx. \tag{9.5}$$

Для преобразования входящего сюда интеграла обратимся к формуле (5.4), написав ее в виде:

$$x^{s-1}=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\int_0^{\infty}Y(xt)\,xt^{1-s}\,dt, \qquad 1-\frac{r_2+3}{\chi(\chi-1)}<s<1. \tag{9.6}$$

При помощи этого интеграла найдем, что

$$\int_1^{\infty}X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}\,dx=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\int_0^{\infty}\int_1^{\infty}X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)Y(xt)\,x\,dx\,t^{1-s}dt, \tag{9.7}$$

причем совершенная здесь перестановка порядков интегрирования имеет законное основание, так как тут выполняются все условия, позволяющие применить теорему Жордана.

Введем для краткости обозначение

$$\{\rho^{\alpha}f(x\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} \quad (\chi=1,\ 2), \tag{9.8}$$

понимая под ним, что

$$\{\rho^{\alpha}f(x\rho)\}_{\rho=1}^{(0)}=f(x), \quad \{\rho^{\alpha}f(x\rho\}_{\rho=1}^{(1)}=\left.\frac{d\,[\rho^{\alpha}f(x\rho)]}{d\rho}\right|_{\rho=1}; \tag{9.9}$$

тогда легко убедиться, что внутреннее интегрирование в формуле (9.7) выполняется в силу равенства

$$\int_1^{\infty}X(ax)\,Y(bx)\,x\,dx=\frac{Z(a,\ b)}{a^2+b^2}, \quad a>0, \quad b>0, \tag{9.10}$$

где

$$Z(a,\ b)=\frac{X(a)}{2^{2-2r_2}}\{\rho^{r_2}Y(b\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)}+\frac{Y(b)}{2^{2-2r_2}}\{(-1)^{\chi-1}X(a\rho)\}_{\rho=1}^{(\chi-1)}. \tag{9.11}$$

Таким образом, формула (9.10) может быть переписана в виде:

$$\int_1^{\infty}X\left(\frac{n\varepsilon x}{A}\right)x^{s-1}\,dx=\frac{2}{\pi}A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^{\infty}\frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A},\ \frac{t}{A}\right)}{t^2+in^2}\,\frac{dt}{t^{s-1}}, \tag{9.12}$$

где $0<\operatorname{Re}(s)<1$. Проинтегрируем входящую сюда функцию

$$\frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A},\ \frac{u}{A}\right)}{u^2+in^2}$$

по обводу четырехугольника с вершинами (рис. 2):

$$A(T-i\xi), \quad B(-T+i\xi), \quad C(-T), \quad D(+T), \quad 0<\xi<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

причем точка $u=0$ выделена из контура посредством полуокружности весьма малого радиуса δ.

Так как по условию $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$, то интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, равно как и интеграл, взятый по полуокружности, в пределе при $T \to +\infty$ и $\delta \to 0$ обратятся в нуль, вследствие чего мы получаем соотношение

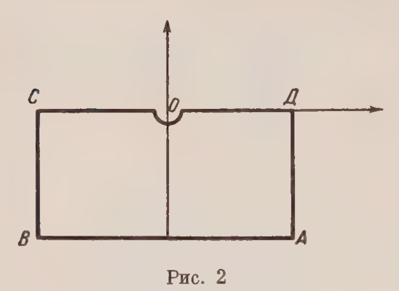


Рис. 2

$$\int_{+\infty - i\xi}^{-\infty - i\xi} \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{u}{A}\right)}{u^2 + in^2} \frac{du}{u^{s-1}} = \\ = 2ie^{\frac{i\pi s}{2}} \sin\frac{\pi s}{2} \int_0^\infty \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{t}{A}\right)}{t^2 + in^2} t^{1-s}\,dt, \tag{9.13}$$

где $0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ Положим в левой его части $u = \bar{\varepsilon} x$, что равносильно повороту прямой, по которой производится интегрирование, на угол 45° против часовой стрелки; тогда мы придем к равенству

$$\varepsilon^s \int_1^\infty X\left(\frac{n\bar{\varepsilon}x}{A}\right) x^{s-1}\,dx = \frac{1}{\pi i} A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s) \int_{0\swarrow 1} \frac{Z\left(\frac{n\varepsilon}{A}, \frac{tx}{A}\right)}{x^2 - n^2} x^{1-s}\,dx. \tag{9.14}$$

Возвратимся к формуле (9.12) и преобразуем первый член, находящийся в правой ее части. Полагая $x = \varepsilon u$, найдем, что

$$\int_{0\swarrow 1} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon}x\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} x^{-1-s}\,dx = \frac{1}{\varepsilon^s} \int_{+\infty - i\xi}^{-\infty - i\xi} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{u\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} u^{-1-s}\,du = \\ = \frac{1}{\varepsilon^s} 2i \sin\frac{\pi s}{2} e^{\frac{i\pi s}{2}} \int_0^\infty \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{t\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} t^{-1-s}\,dt.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что при всякой комбинации чисел

$$\chi = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0,$$
$$\chi = 2, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 1,$$
$$\chi = 2, \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 0,$$

имеет место соотношение

$$-\frac{\varepsilon^s}{s} = \frac{A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}{2^{r_1}\pi i} \int_{0\swarrow 1} \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon}x\rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} x^{-1-s}\,dx. \tag{9.15}$$

Внесем выражения (9.14) и (9.15) в соотношение (9.5); тогда мы придем к формуле, аналогичной формуле Римана-Зигеля, дающей представление функции

$$\rho_\Omega(s) = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\Omega(s)$$

в форме следующих интегралов:

$$\rho_\Omega(s) = A^s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s) \int_{0\swarrow 1} \omega_\Omega(\bar{\varepsilon}, x)\frac{dx}{x^s} + A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2} \int_{0\nwarrow 1} \omega_\Omega(\varepsilon, x)\frac{dx}{x^{1-s}}, \tag{9.16}$$

где

$$\omega_{\mathfrak{Q}}(\bar{\varepsilon}, x) = \left\{\rho^{r_2} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} \varphi_{\rho=1}(x, \varepsilon) + \left\{(-1)^{\chi-1} Y\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1} \psi_{\rho=1}(x, \varepsilon) \quad (9.17)$$

и

$$\varphi_\rho(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i}\left\{-\frac{\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0)}{x} + \frac{1}{2^{2-2r_2}} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2-n^2} X\left(\frac{n\varepsilon\rho}{A}\right)\right\}, \quad (9.18)$$

$$\psi_\rho(x, \varepsilon) = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{2^{2-2r_2}} x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2-n^2} X^{(\chi-1)}\left(\frac{n\varepsilon\rho}{A}\right). \quad (9.19)$$

Здесь при $\chi = 2$ надо произвести дифференцирование по ρ и после положить $\rho = 1$.

Для рационального поля

$$\chi = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad r = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad X_{1,0}(x) = 2e^{-x^2}, \quad Y_{1,0}(x) = e^{-x^2}$$

и, следовательно,

$$\left\{\rho^{r_2} Y_{1,0}\left(\frac{\bar{\varepsilon} x \rho}{A}\right)\right\}_{\rho=1}^{(\chi-1)} = Y_{1,0}\left(\frac{\bar{\varepsilon} x}{A}\right) = e^{i\pi x^2}, \quad X_{1,0}\left(\frac{n\varepsilon}{A}\right) = (-1)^n.$$

Так как

$$\varphi_{\rho=1}(x, \varepsilon) + \psi_{\rho=1}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{x^2-n^2}\right\} = \frac{1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}},$$

то формула (9.16) для этого частного случая дает формулу Римана-Зигеля (9.1).

Для мнимого квадратичного поля

$$\chi = 2, \; r_1 = 0, \; r_2 = 1, \; r = 0, \; A = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}, \quad X_{0,1}(x) = e^{-x}, \quad Y_{0,1}(x) = \frac{\sin x}{x},$$

и мы получаем формулу

$$\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta_{\mathfrak{Q}}(s) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \int_{0 \swarrow 1} \omega_{\mathfrak{Q}}(\bar{\varepsilon}, x) \frac{dx}{x^s} + \left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \int_{0 \nwarrow 1} \omega_{\mathfrak{Q}}(\varepsilon, x) \frac{dx}{x^{1-s}}, \quad (9.20)$$

где

$$\omega_{\mathfrak{Q}}(\bar{\varepsilon}, x) = \frac{1}{\pi i}\left\{\frac{\cos \bar{\tau} x}{x} + x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{x^2-n^2} \Phi_{\mathfrak{Q}}(x, \rho)\right\}_{\rho=1},$$

$$\Phi_{\mathfrak{Q}}(x, \rho) = \begin{vmatrix} e^{-n\tau\rho} & \dfrac{\sin \bar{\tau} x}{\bar{\tau} x} \\ (e^{-n\tau\rho})'_\rho & \left(\dfrac{\sin \bar{\tau} x \rho}{\bar{\tau} x}\right)'_\rho \end{vmatrix}, \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad \bar{\tau} = \frac{2\pi\bar{\varepsilon}}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Для вещественного квадратичного поля

$$\chi = 2, \; r_1 = 2, \; r_2 = 0, \; r = 1, \; A = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}, \; X_{2,0}(x) = 4K_0(2x), \; Y_{2,0}(x) = J_0(2x),$$

и формула (9.16) приводит нас к соотношению

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_{\mathfrak{Q}}(s) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \int\limits_{0\swarrow 1} \omega_{\mathfrak{Q}}(\bar{\varepsilon}, x)\frac{dx}{x^s} + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) \int\limits_{0\nwarrow 1} \omega_{\mathfrak{Q}}(\varepsilon, x)\frac{dx}{x^{1-s}}, \quad (9.21)$$

где

$$\omega_{\mathfrak{Q}}(\bar{\varepsilon}, x) = \frac{1}{\pi i}\left\{-\zeta'_{\mathfrak{Q}}(0)\frac{J'_0(\bar{\tau}x\rho)}{x} + x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{x^2-n^2}\Phi_{\mathfrak{Q}}(x, \rho)\right\}_{\rho=1},$$

$$\Phi_{\mathfrak{Q}}(x, \rho) = \begin{vmatrix} K_0(n\tau\rho) & J_0(\bar{\tau}x\rho) \\ K'_0(n\tau\rho) & J'_0(\bar{\tau}x\rho)\end{vmatrix}, \quad \tau = \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{\Delta}}, \quad \bar{\tau} = \frac{2\pi\bar{\varepsilon}}{\sqrt{\Delta}},$$

причем дифференцирование цилиндрических функций надо производить по ρ и затем полагать $\rho = 1$.

10°. В n^0 7 мы нашли, что

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_{\mathfrak{Q}}(s) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\mathfrak{Q}}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{s-1}\right\} = C_{\mathfrak{Q}}, \quad (10.1)$$

где постоянная $C_{\mathfrak{Q}}$ определяется посредством формулы (7.8).

Кронекером было показано, что для мнимого квадратичного поля эта постоянная может быть выражена через тэта-функции.

Выведем формулу Кронекера, применив следующий способ рассуждений.

Выражение для дедекиндовой функции $\zeta_{\mathfrak{Q}}(s)$ может быть написано в форме

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(s) = \sum_x\sum_y \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad (10.2)$$

где суммирование распространяется на все целые значения x и y, исключая одновременную комбинацию $x=0$, $y=0$.

Введя обозначения

$$\omega = \frac{b+i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \tilde{\omega} = \frac{b-i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \Delta_1 = 4ac-b^2, \quad \sqrt{\Delta_1} > 0, \quad (10.3)$$

найдем, что

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(s) = \frac{2}{a^s}\zeta(2s) + \frac{2}{c^s}\zeta(2s) + S, \quad (10.4)$$

где

$$S = \frac{2}{a^s}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty}{}' \frac{1}{(x+\omega y)^s(x+\tilde{\omega}y)^s}; \quad (10.5)$$

здесь через $\zeta(s)$ обозначена обыкновенная функция Римана, а знак указывает на то, что при суммировании следует пропустить член, соответствующий значению $x=0$.

Выразим сумму S через определенный интеграл, для чего рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int \frac{z^{p-1}dz}{(z+\alpha)^s(z+\beta)^s}, \quad 0 < \arg\alpha < \pi, \quad 0 < \arg\beta < \pi,$$

распространенный по контуру, состоящему из двух концентрических окружностей, описанных из точки $z=0$ радиусами δ и R, и отрезком вещественной оси от точки $x=\delta$ до точки $x=R$.

Если считать s числом целым и положительным и выбрать p таким, что $0<p<2s$, то, интегрируя по вышеуказанному контуру, найдем в пределе при $\delta\to 0$ и $R\to+\infty$ следующую формулу:

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}dx}{(x+\alpha)^s(x+\beta)^s}=$$

$$=(-1)^{s-1}\frac{\pi}{\sin\pi p}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(s)\Gamma(p-s+1)}\left\{\frac{\alpha^{p-s}\beta^{s-1}}{(\beta-\alpha)^{2s-1}}F_p^{(s)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{\beta^{p-s}\alpha^{s-1}}{(\alpha-\beta)^{2s-1}}F_p^{(s)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right\}, \tag{10.6}$$

где для краткости положено

$$F_p^{(s)}(x)=\frac{\Gamma(p-s+1)}{\Gamma(p)}x^{s-p}(1-x)^{2s-1}\frac{d^{s-1}x^{p-1}(1-x)^{-s}}{dx^{s-1}}. \tag{10.7}$$

Обращая интеграл (10.6) по формуле Меллина, найдем, что

$$\frac{1}{(x+\alpha)^s(x+\beta)^s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\frac{\Gamma(\sigma)\Phi_{\alpha,\beta}(\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)}\frac{d\sigma}{x^\sigma},\quad 1<\tau<2s-1, \tag{10.8}$$

где

$$\Phi_{\alpha,\beta}(\sigma)=(-1)^{s-1}\frac{\alpha^{\sigma-s}\beta^{s-1}}{(\beta-\alpha)^{2s-1}}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+(-1)^{s-1}\frac{\beta^{\sigma-s}\alpha^{s-1}}{(\alpha-\beta)^{2s-1}}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{10.9}$$

При помощи интеграла (10.8) выражение (10.5) может быть представлено так:

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}R_\sigma^{(s)}d\sigma, \tag{10.10}$$

где

$$R_\sigma^{(s)}=\left(\frac{\omega}{i}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{\tilde\omega}{\omega}\right)^{s-1}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\omega}{\tilde\omega}\right)+\left(\frac{\tilde\omega}{-i}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{\omega}{\tilde\omega}\right)^{s-1}F_\sigma^{(s)}\left(\frac{\tilde\omega}{\omega}\right). \tag{10.11}$$

Рассмотрим в качестве контура интегрирования прямоугольник с вершинами

$$A(\tau+iT),\quad B(\tau-iT),\quad C(\rho+iT),\quad D(\rho-iT),$$

где $1<\tau<2s-1$, $-1<\rho<0$.

Так как на отрезках, параллельных вещественной оси при больших значениях $|t|$, имеет место оценка подинтегральной функции порядка

$$O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^\xi\right),$$

то в пределе при $T=+\infty$ после интегрирования по прямоугольнику найдем, что

$$S=R_0+R_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}R_\sigma^{(s)}d\sigma, \tag{10.12}$$

где R_0 и R_1 обозначают вычеты подинтегральной функции относительно полюсов $\sigma=0$ и $\sigma=1$.

Так как

$$R_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\left\{\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(2s-\sigma)}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)}\frac{\sigma R_\sigma^{(s)}}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\right\}_{\sigma=0} = -\frac{\pi^2}{3a}+\alpha_0(s-1)+\cdots$$

и

$$R_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\left(\frac{a}{\Delta_1}\right)^{s-1}\left\{\frac{\Gamma(\sigma)\zeta(2s-\sigma)\cdot R_\sigma^{(s)}}{\Gamma(s)\Gamma(\sigma-s+1)\sin\frac{\pi\sigma}{2}}(\sigma-1)\zeta(\sigma)\right\}_{\sigma=1} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{a_1}+\alpha_1(s-1)+\cdots,$$

то

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_Q(s)-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{s-1}\right\} = \frac{\pi^2}{3a}+\frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{\Delta_1}+S_1,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{\zeta(\sigma)\zeta(2-\sigma)}{|\omega|^{1-\sigma}\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cos\left\{(\sigma-1)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\Delta_1}}{b}\right)\right\}d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)}{(2\pi)^s}$$

и

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n^s}, \quad \operatorname{Re}(s)>1,$$

где через $S(n)$ обозначена сумма делителей n, найдем, что

$$S_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^\delta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^\delta}\right\},$$

где

$$\omega_1 = \frac{b+i\sqrt{\Delta_1}}{2a}, \quad \omega_2 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta_1}}{2a}. \tag{10.13}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\Gamma(z)}{z^x}dz = e^{-x}, \quad \alpha>0, \quad \operatorname{Re}(x)>0,$$

то

$$S_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_1}+\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_2}.$$

Отсюда вытекает формула:

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_Q(s)-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{s-1}\right\} = \frac{\pi^2}{3a}+\frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\log\frac{a}{a_1}+$$

$$+\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_1}+\frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S(n)}{n}e^{2\pi i n\omega_2}. \tag{10.14}$$

Обратимся к известной формуле Лиувилля, согласно которой

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b(n)}{e^{ns}-1}, \quad \operatorname{Re}(s)>0, \tag{10.15}$$

где арифметические функции $a(n)$ и $b(n)$ связаны между собою соотношением

$$a(n) = \sum_{n=d\delta} b(d),$$

причем суммирование распространено на все делители n.

Если здесь положить $b(d) = d$, то будем иметь $a(n) = S(n)$ — сумме делителей n, после чего формула (10.15) даст:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n) e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{ns}-1}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \tag{10.16}$$

Интегрируя это равенство по s, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n} e^{-ns} = \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 - e^{-ns}), \quad \mathrm{Re}(s) > 0,$$

а так как

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i \omega\nu}) = e^{-\frac{\pi i \omega}{12}} \eta(\omega)$$

и

$$\eta^3(\omega) = \frac{1}{4} \vartheta_1'(0, e^{2\pi i \omega}),$$

где $\vartheta_1(z, q)$ выражается рядом

$$\vartheta_1(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2p^{\frac{25}{4}} \sin 5z + \ldots,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(n)}{n} e^{2\pi i n\omega} = \frac{\pi i \omega}{12} + \log \eta(\omega).$$

Поэтому соотношение (10.14) приводит к формуле Кронекера [см. ([3])]:

$$\lim_{s\to 1} \left\{ \zeta_\Omega(s) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \frac{1}{s-1} \right\} = \frac{4\pi C}{\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \log \frac{a}{\Delta_1} - \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \log \{\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)\}. \tag{10.17}$$

Сравнивая правые части формул (10.1) и (10.17), найдем значение производной $\zeta_\Omega'(0)$ для случая мнимого квадратичного поля, а именно:

$$\zeta_\Omega'(0) = 2 \log \frac{2\pi\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)}{\sqrt{a}}, \tag{10.18}$$

где числа ω_1 и ω_2 определяются равенствами (10.13).

Из формул (10.4) и (10.12) можно найти и значения функций $\zeta_\Omega(2)$ $\zeta_\Omega(3)$ и т. д. Так, например,

$$\zeta_\Omega(2) = \frac{2}{a^2} \zeta(4) + \frac{2}{c^2} \zeta(4) + R_0 + R_1 +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\rho - i\infty}^{\rho + i\infty} \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta_1}} \left(\frac{a}{\Delta_1}\right) \frac{(\sigma - 1)\zeta(\sigma)\zeta(4-\sigma)}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}} R_\sigma^{(2)} d\sigma,$$

где

$$R_0 = -\frac{2\zeta(4)}{c^2}, \quad R_1 = \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}.$$

Правую часть этого соотношения можно преобразовать к виду

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(2)=\frac{2}{a^2}\zeta(4)+\frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}+$$

$$+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta+1)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^{\delta+1}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta+1)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^{\delta+1}}\right\}+$$

$$+\frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_1)^{\delta}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\rho-i\infty}^{1-\rho+i\infty}\frac{\Gamma(\delta)\,d\delta}{(-2\pi i n\omega_2)^{\delta}}\right\},\qquad(10.19)$$

где через $S_3(n)$ обозначена сумма третьих степеней делителей числа n.

Последнее обстоятельство следует из равенства

$$\zeta(s)\zeta(s-3)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^s},\quad \operatorname{Re}(s)>1.$$

Отсюда вытекает формула, аналогичная соотношению (10.14), а именно:

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(2)=\frac{2}{a^2}\zeta(4)+\frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i\omega_1 n}+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i\omega_2 n}+$$

$$+\frac{8a\pi}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i\omega_1 n}+\frac{8a\pi}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i\omega_2 n}.\qquad(10.20)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\xi(x)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i\nu x})^{\nu^3},\quad 2\pi i x=\alpha+i\beta,\quad \alpha<0,\qquad(10.21)$$

и примем во внимание соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_3(n)e^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{nx}-1},\quad \operatorname{Re}(x)>0,$$

получаемое из формулы Лиувилля (10.16) при $b(d)=d^3$; тогда мы без труда найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^2}e^{2\pi i n x}=-2\pi i\int\limits_0^x\log\xi(t)\,dt-\frac{\pi^2}{72},\qquad(10.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}e^{2\pi i n x}=4\pi^2\int\limits_0^x(x-t)\log\xi(t)\,dt-\frac{i\pi^3}{36}x-\frac{\zeta(3)}{2}.\qquad(10.23)$$

В результате выражение (10.20) примет следующую форму:

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(2)=\frac{\pi^2}{45a^2}-\frac{16\pi^3}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\int\limits_0^{\omega_1}(2at-b)\log\xi(t)\,dt-\frac{16\pi^3}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\int\limits_0^{\omega_2}(2at+b)\log\xi(t)\,dt,\qquad(10.24)$$

где числа ω_1 и ω_2 выражаются при помощи равенств (10.13). Формула (10.24) упрощается в частном случае, когда $a=c=1$, $b=0$, т. е. когда $F(n)$ представляет собою число разложений n на сумму двух квадратов.

Действительно, в этом случае $\omega_1 = \omega_2 = i$, и формула (10.20) дает соотношение

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(2) = 2\zeta(4) + \pi\,\zeta(3) + 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n}. \quad (10.25)$$

Вторую из сумм, входящих в правую часть последнего соотношения, можно исключить, для чего рассмотрим формулу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n\rho} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)\frac{ds}{(2\pi\rho)^s}, \qquad \alpha > 1.$$

Проинтегрируем функцию, стоящую здесь под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT), \quad -4 < \beta < 3$$

и перейдем затем к пределу при $T \to +\infty$: тогда мы придем к равенству

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s}\, ds =$$

$$= R_1 + R_0 + R_{-2} + R_{-3} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s}\, ds, \quad (10.26)$$

где через R_1, R_0, R_{-2} и R_{-3} обозначены вычеты подинтегральной функции, которые оказываются равными

$$R_0 = \frac{\pi^3}{72\rho}, \quad R_1 = -\frac{1}{2}\zeta(3), \quad R_{-2} = -\frac{1}{2}\zeta(3)\rho^2, \quad R_{-3} = \frac{\pi^3}{72}\rho^3.$$

Преобразовывая правый из входящих в формулу (10.26) интегралов посредством подстановки $s = -2 - \sigma$, найдем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{\Gamma(s)\zeta(s)\zeta(s+3)}{(2\pi\rho)^s}\, ds = -\rho^2 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-2-\beta-i\infty}^{-2-\beta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\zeta(\sigma)\zeta(\sigma+3)}{\left(\frac{2\pi}{\rho}\right)^{\sigma}}\, d\sigma,$$

после чего соотношение (10.26) примет форму

$$\frac{1}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^3}{72}\frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n\rho} =$$

$$= -\rho^2 \left\{ \frac{1}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^3}{72}\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-\frac{2\pi n}{\rho}} \right\}. \quad (10.27)$$

Полагая здесь $\rho = 1$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^3} e^{-2\pi n} = -\frac{1}{2}\zeta(3) + \frac{\pi^3}{72}$$

и, следовательно,

$$\zeta_{\mathfrak{Q}}(2) = \frac{\pi^4}{20} + 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n}. \quad (10.28)$$

Но по формуле (10.22)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_3(n)}{n^2} e^{-2\pi n} = -2\pi i \int\limits_0^i \log \xi(t)\, dt - \frac{\pi^2}{72},$$

и окончательно получаем:

$$\zeta_\Omega(2) = -\frac{\pi^4}{180} + 8\pi^3 \int_0^1 \log \xi(it)\,dt. \tag{10.29}$$

11°. Формула (10.20) может быть выведена и без помощи интеграла (10.6). Чтобы показать это, обратимся к формуле

$$\zeta_\Omega(2) = \frac{2}{a^2}\zeta(4) + \frac{2}{a^2}\zeta(4) + S, \tag{11.1}$$

где

$$S = \frac{1}{a^2} \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{(x+\omega y)^2\,(x+\tilde\omega y)^2}.$$

Напишем равенство

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2(x+\tilde\omega y)^2} = -\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{y^2}\frac{1}{(x+\omega y)^2} + \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{y^3}\left\{\frac{1}{x+\omega y} - \frac{1}{x}\right\} -$$
$$-\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{y^2}\frac{1}{(x+\tilde\omega y)^2} - \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{y^3}\left\{\frac{1}{x+\tilde\omega y} - \frac{1}{x}\right\}$$

и на основании соотношений

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\omega^{2-s}y^{4-s}x^s},$$

$$\frac{1}{x+\omega y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{ds}{\omega^{1-s}y^{4-s}x^s}, \quad 0<\alpha<2,$$

преобразуем его к следующему виду:

$$\frac{1}{(x+\omega y)^2(x+\tilde\omega y)^2} = -\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\omega^{2-s}y^{4-s}x^s} -$$
$$-\frac{a^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{(1-s)\,ds}{\tilde\omega^{2-s}y^{4-s}x^s} + \frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{ds}{\omega^{1-s}y^{4-s}x^s} -$$
$$-\frac{2a^3 i}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{ds}{\tilde\omega^{1-s}y^{4-s}x^s}.$$

Из этого равенства вытекает, что

$$S = -\frac{4}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,e^{-\frac{\pi i s}{2}}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1-s}{\omega^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds -$$
$$-\frac{4}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,e^{\frac{\pi i s}{2}}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\frac{1-s}{\tilde\omega^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$
$$+\frac{8ai}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,e^{-\frac{\pi i s}{2}}\cos\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{\omega^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds -$$
$$-\frac{8ai}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\,e^{\frac{\pi i s}{2}}\cos\frac{\pi s}{2}\,\frac{1}{\tilde\omega^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds.$$

Если проинтегрировать входящие сюда подинтегральные функции по обводу четырехугольника с вершинами $A(\alpha - iT)$, $B(\alpha + iT)$, $C(\beta + iT)$, $D(\beta - iT)$, где $-1 < \beta < 0$, то в пределе при $T \to +\infty$ получится формула

$$S = -\frac{2}{c^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} + \frac{2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1-s}{(-i\omega)^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1-s}{(i\tilde{\omega})^{2-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{4}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1}{(-i\tilde{\omega})^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds +$$

$$+\frac{4}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\frac{1}{(i\tilde{\omega})^{1-s}}\zeta(s)\zeta(4-s)\,ds.$$

Преобразуем отдельные члены этого равенства посредством функционального уравнения

$$\zeta(1-s) = \frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s)}{(2\pi)^s};$$

тогда мы получаем равенство

$$S = -\frac{2}{c^2}\zeta(4) + \frac{8a\pi\zeta(3)}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}} +$$

$$+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(-2\pi i\omega)^\sigma}\zeta(\sigma+2)\zeta(\sigma-1)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi^2}{\Delta_1}\int\limits_{2-\beta-i\infty}^{2-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(2\pi i\tilde{\omega})^s}\zeta(\sigma+2)\zeta(\sigma-1)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(-2\pi i\omega)^s}\zeta(\sigma+3)\zeta(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\frac{8\pi a}{\Delta_1\sqrt{\Delta_1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-\beta-i\infty}^{1-\beta+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)}{(2\pi i\tilde{\omega})^\sigma}\zeta(\sigma+3)\zeta(\sigma)\,d\sigma).$$

Развернув здесь произведение римановых функций в ряд Дирихле по формуле

$$\zeta(s)\zeta(s-3) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_3(n)}{n^3}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

получим соотношение (10.19), из которого вытекают формулы (10.20) и (10.24).

Поступило
26. 1. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., О сумматорных формулах в квадратичных числовых областях, Матем. сб., XXXV, 2 (1928), 221—236.

[2] Кошляков Н. С., О некоторых формулах, относящихся к функциям $\zeta(s)$ и $\zeta_{\Omega}(s)$, Доклады Ак. наук СССР, XXV, № 7, 567—570.

[3] Кошляков Н. С., On Kronecker's fundamental limit in the theory of quadratic field, Изв. Научно-исслед. инст. математики и механики при Томском гос. унив. им. Куйбышева, т. 1, вып. 3 (1937), 237—241.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 145—158

А. И. ЛАПИН

К ТЕОРИИ СИМВОЛА ШАФАРЕВИЧА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Настоящая работа посвящена локальному построению локальной теории полей классов для абелевых расширений простого нечетного показателя l.

В работе строится локальная теория полей классов для абелевых расширений простого нечетного показателя l. Хотя эта задача и была решена в работе (6) для произвольных абелевых расширений, тем не менее целесообразно отдельно рассмотреть указанный в настоящей работе случай, во-первых, потому, что его удается исследовать особенно простым методом, который, к сожалению, не удается перенести на общий случай, а во-вторых, потому, что для приложения к интегральной теории полей классов рассмотренный в настоящей статье случай является единственно необходимым.

Пусть k' — произвольное поле алгебраических чисел, содержащее не равный единице корень l-й степени из единицы ζ, где l — фиксированное рациональное простое нечетное число, $\mathfrak{l}$ — простой делитель l из k' и k — поле, получаемое из k' $\mathfrak{l}$-адическим замыканием. Как известно, в этом случае корни степени $N\mathfrak{l}-1$ из единицы, где $N\mathfrak{l}$ — абсолютная норма идеала $\mathfrak{l}$, вместе с нулем образуют мультипликативную систему представителей R идеала (λ), где λ — простое число из k. Каждое число $\alpha \in k$ может быть однозначно представлено в виде:

$$\alpha = \sum \alpha_i \lambda^i,$$

где $\alpha_i \in R$. В частности,

$$l = \gamma_e \lambda^e + \ldots, \quad \zeta - 1 = \gamma_{e_1} \lambda^{e_1} + \ldots, \tag{1}$$

где e — показатель ветвления k, а $e_1 = \frac{e}{l-1}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — поле инерции k. Как известно, каждое число $\alpha \in \mathfrak{K}$ представимо в виде

$$\alpha = \sum \alpha_i l^i,$$

где $\alpha_i \in R$. Ввиду совершенности поля классов вычетов, соответствие $\alpha \rightarrow \alpha^L$ в поле $\mathfrak{K}$, определенное формулой

$$\alpha^L = \left(\sum \alpha_i l^i\right)^L = \sum \alpha_i^l l^i,$$

есть автоморфизм. В кольце формальных степенных рядов от неизвестной

x с коэффициентами из $\mathfrak{R}$ определим ряд

$$L(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} l^{-n} \alpha^{L^n} x^{l^n}.$$

$L(\alpha, x)$ обладает следующими свойствами:

$$L(\alpha_1 + \alpha_2, x) = L(\alpha_1, x) + L(\alpha_2, x), \quad L(a\alpha, x) = aL(\alpha, x),$$

где a — целое l-адическое число. Отсюда следует, что ряд $E(\alpha, x) = e^{L(\alpha, x)}$ обладает свойствами:

$$E(\alpha_1 + \alpha_2, x) = E(\alpha_1, x) E(\alpha_2, x),$$
$$E(a\alpha, x) = E(\alpha, x)^a. \tag{2}$$

В случае, когда $\alpha \in R$, имеет место тождество

$$E(\alpha, x) = \prod (1 - \alpha^m x^m)^{-\frac{\mu(m)}{m}}, \tag{3}$$

где $\mu(m)$ — функция Мебиуса, а m пробегает все натуральные значения, взаимно простые с l. Из этого тождества следует, что при $\alpha \in R$ $E(\alpha, x)$ имеет целые l-адические коэффициенты. Ввиду (1), это верно и для любого $\alpha \in \mathfrak{R}$. Поэтому. $E(\alpha, x)$ сходится для всех $x \equiv o(\lambda)$.

Пусть $\mathfrak{R}$ — неразветвленное поле, получающееся из $\mathfrak{R}$ алгебраическим замыканием поля классов вычетов. Если $A \in \mathfrak{R}$ — решение уравнения

$$A^L - A = \alpha,$$

где $\alpha \in \mathfrak{R}$, то обозначим $E(l^n A, \xi)$, где ξ определено уравнением $E(1, \xi) = \zeta$, через $E(\alpha)$:

$$E(l^n A, \xi) = E(\alpha).$$

Это обозначение имеет смысл, так как легко видеть, что все целые $A \in \overline{\mathfrak{R}}$, удовлетворяющие равенству

$$A^L - A = \alpha,$$

дают одно и то же $E(l^n A, \xi)$. Ясно, что $E(\alpha)$ удовлетворяет соотношениям:

$$E(\alpha_1 + \alpha_2) = E(\alpha_1) \cdot E(\alpha_2) \text{ и } E(a\alpha) = E(\alpha)^a,$$

где a — целое l-адическое число. В работе ([1]) доказано, что $E(\alpha)$ удовлетворяет сравнению

$$E(\alpha) \equiv 1 + \alpha \gamma_{e_1}^{e} \lambda^{le_1} (\lambda^{le_1+1}), \tag{4}$$

в котором e_1 определено из формулы (1). Значение функций $E(\alpha, \lambda^a)$ и $E(\alpha)$ уясняется из следующей, впервые сформулированной и доказанной в работе ([1]) теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Каждая главная единица* ε *из* k *может быть представлена в виде*

$$\varepsilon = E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i),$$

где α, α_i *— целые числа из* $\mathfrak{R}$, *а* i *пробегает все значения между* 1 *и* le_1, *не делящиеся на* l.

Так как каждое число μ из k представимо в виде $\mu = \lambda^a w \varepsilon$, где a — целое число, w — элемент из R, а ε — главная единица, то теорему 1 можно еще сформулировать так: *каждое число μ из k можно представить в виде*

$$\mu \approx \lambda^a E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i), \tag{5}$$

где значок $\approx$ показывает, что левая часть этого соотношения отличается от правой множителем, являющимся l-й степенью.

Представление (5) будем называть каноническим.

Определение и свойства символа Шафаревича (μ, ν). Пусть μ и ν — два числа из k и

$$\mu \approx \lambda^a E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i),$$

$$\nu \approx \lambda^b E(\beta) \prod E(\beta_j \lambda^j)$$

— их канонические разложения; тогда символ (μ, ν) определяется равенством

$$(\mu, \nu) \approx E(a\beta - b\alpha + \gamma), \tag{6}$$

где

$$E(\gamma) \approx \delta \prod_{i,j} E(i\alpha_i \beta_j, \lambda^{i+j}). \tag{7}$$

Оператор δ определен на группе главных единиц ε равенством

$$\delta\varepsilon = \delta\,[E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i)] = E(\alpha).$$

Символ (μ, ν) обладает следующими четырьмя свойствами, из которых мы докажем только последнее (доказательства первых трех см. в работе ([1])):

1. Билинейность:

$$(\mu_1\mu_2, \nu) = (\mu_1, \nu)(\mu_2, \nu),$$

$$(\mu, \nu_1\nu_2) = (\mu, \nu_1)(\mu, \nu_2).$$

2. Кососимметричность:

$$(\mu, \nu) = (\nu, \mu)^{-1}.$$

3. Невырожденность:

из $(\mu, \nu) = 1$ для всех ν следует $\mu \approx 1$,

из $(\mu, \nu) = 1$ для всех μ следует $\nu \approx 1$.

Можно даже утверждать больше, а именно, имеет место

ЛЕММА 1. *Какова бы ни была единица $\mu \not\approx 1$, найдется простое число λ такое, что $(\mu, \lambda) \neq 1$.*

Доказательство. Пусть λ — какое угодно простое число. Если $(\mu, \lambda_1) \neq 1$, то лемма доказана. Если же $(\mu, \lambda_1) = 1$, то по теореме о невырожденности символа (μ, ν) существует $\nu_1 = \lambda_1^a \varepsilon$ такое, что

$$(\mu, \nu_1) = (\mu, \lambda_1)^a (\mu, \varepsilon) = (\mu, \varepsilon) \neq 1.$$

Простое число $\lambda = \lambda_1 \varepsilon$ и будет искомым.

4. Инвариантность. Символ (μ, ν) зависит только от чисел μ и ν и не зависит от простого числа λ, фигурирующего в его определении. Для доказательства свойства 4 нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mu \not\approx 1$ *и* $\nu \not\approx 1$ — *два числа из* k. *Тогда каждое число* α *из* k, *являющееся нормой чисел из* $K_\mu = k(\sqrt[l]{\mu})$ *и* $K_\nu = k(\sqrt[l]{\nu})$, *будет также нормой некоторого числа из* $K_{\mu\nu} = k(\sqrt[l]{\mu\nu})$.

Доказательство элементарно и приведено в работе ([5]).

ЛЕММА 3. *Число* $\nu = E(\alpha, \lambda^a)$ *есть норма числа* $E(\alpha^{L-1}, \Lambda^a)$ *из поля* $K = k(\Lambda)$, *где* $\Lambda = \sqrt[l]{\lambda}$.

Доказательство см. в ([1]), стр. 128.

Определение. Свойство символа (μ, ν), состоящее в том, что равенство $(\mu, \nu) = 1$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы ν было нормой в $K_\mu = k(\sqrt[l]{\mu})$, называется норменным свойством символа (μ, ν).

ЛЕММА 4. *Инвариантность символа* (μ, ν) *и норменное свойство эквивалентны.*

Доказательство. Пусть инвариантность символа (μ, ν) доказана. Докажем норменное свойство. Если $\mu = \lambda^a E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i)$, то будем различать два случая: первый, когда $a \not\equiv o(l)$, и второй, когда $a \equiv o(l)$.

1°. Если $a \not\equiv o(l)$, то существует целое a' такое, что

$$aa' \equiv 1 \ (l).$$

Вводя обозначения:

$$\mu^{a'} = \mu', \quad a'\alpha = \alpha', \quad a'\alpha_i = \alpha'_i,$$

будем иметь:

$$\mu' \approx \lambda E(\alpha') \prod E(\alpha'_i \lambda^i).$$

Так как $k(\sqrt[l]{\mu'}) = k(\sqrt[l]{\mu})$, то число ν, являющееся нормой некоторого числа из $k(\sqrt[l]{\lambda})$, будет, очевидно, и нормой числа из $k(\sqrt[l]{\mu})$, и из равенства $(\mu', \nu) = 1$ следует равенство $(\mu, \nu) = 1$, и обратно. Из всего этого следует, что в случае 1° норменное свойство достаточно доказать только для простых чисел μ, но для таких чисел оно следует из леммы 3.

2°. $a \equiv o(l)$ и, значит, $\mu \approx E(\alpha) \prod E(\alpha_i \lambda^i)$. Докажем сначала вторую часть утверждения. Пусть $\nu = N_\mu A$, где A — число из $K_\mu = k(\sqrt[l]{\mu})$; нужно доказать, что $(\mu, \nu) = 1$. Если бы $(\mu, \nu) \neq 1$, то по лемме 1 нашлось бы простое число λ такое, что

$$(\lambda, \nu) \neq 1. \tag{8}$$

Так как $(\mu, \nu) \neq 1$ и $(\lambda, \nu) \neq 1$, то существует $n \not\equiv o(l)$ такое, что

$$(\mu^n \lambda, \nu) = 1, \tag{9}$$

где $\mu^n\lambda$ — простое число. Из предположенной инвариантности символа (μ, ν) относительно выбора λ и в силу сказанного в n^o 1 из равенства (9) следует, что

$$\nu = N_{\mu^n \lambda} B, \tag{10}$$

где B — число из $k(\sqrt[l]{\mu^n \lambda})$. Так как, кроме того, по предположению ν есть норма в $K_\mu = k(\sqrt[l]{\mu})$, а значит, и в $k(\sqrt[l]{\mu^n})$, то, по лемме 2, отсюда следует,

что ν есть норма в $k(\sqrt[l]{\lambda})$ и, значит, по доказанному в $n^\circ 1$, $(\lambda, \nu) = 1$. Это, однако, противоречит неравенству (8). Пусть, наоборот,

$$(\mu, \nu) = 1; \tag{11}$$

докажем, что ν есть норма в $K_\mu = k(\sqrt[l]{\mu})$. Действительно, по лемме 1, существует простое число λ такое, что

$$(\lambda, \nu) = 1 \tag{12}$$

и, значит, ν есть норма в $k(\sqrt[l]{\lambda})$:

$$\nu = N_\lambda A, \quad A \in k(\sqrt[l]{\lambda}). \tag{13}$$

Перемножая равенства (11) и (12), получаем $(\lambda\mu, \nu) = 1$, откуда, по доказанному в $n^\circ 1$, следует, что ν есть норма в $k(\sqrt[l]{\lambda\mu})$:

$$\nu = N_{\lambda\mu} B, \quad B \in k(\sqrt[l]{\lambda\mu}). \tag{14}$$

Из (13) и (14), по лемме 1, получаем

$$\nu = N_\mu B_\mu,$$

где $B_\mu \in k(\sqrt[l]{\mu})$.

Итак, норменное свойство есть следствие инвариантности. Докажем обратное. Пусть λ и λ_1 — два простых числа. Докажем, что для любых μ и ν

$$(\mu, \lambda)_\lambda = (\mu, \lambda)_{\lambda_1},$$

где значок λ в правом нижнем углу указывает на то простое число, при помощи которого вычисляется символ (μ, ν). Действительно, если $(\mu, \nu)_\lambda = 1$, то, по доказанному, ν есть норма в $k(\sqrt[l]{\mu})$, а значит, $(\mu, \nu)_{\lambda_1} = 1$. Так как значения символа (μ, ν) берутся из фактор-группы группы примарных чисел ω по подгруппе l-х степеней, ω / α^l, которая есть циклическая l-й степени, то, обозначая через ω_0 образующую этой группы, можно написать:

$$(\mu, \nu)_\lambda = \omega_0^{f_\lambda(\mu, \nu)}.$$

$f_\lambda(\mu, \nu)$ есть кососимметрическая билинейная форма. Так как, по доказанному, $f_\lambda(\mu, \nu)$ и $f_{\lambda_1}(\mu, \nu)$ имеют общее нулевое многообразие, то

$$f_{\lambda_1}(\mu, \nu) = c f_\lambda(\mu, \nu),$$

где c — не зависящая от μ и ν константа, и, значит,

$$(\mu, \nu)_{\lambda_1} = (\mu, \nu)^c_{\lambda_1}. \tag{15}$$

Докажем, что $c \equiv 1\,(e)$. Положим для этого $\mu = \lambda$, $\nu = E(\alpha)$. Тогда

$$(\mu, \nu)_\lambda = \omega_0^{s(\alpha)} \doteq (\mu, \nu)_{\lambda_1},$$

откуда через сравнение с равенством (15) получаем $c \equiv 1\,(e)$.

ЛЕММА 5. *Имеют место формулы:*

$$E(\alpha, \lambda^{la}) \approx e^{-l\alpha L^{-1}} \lambda^a, \tag{16}$$

$$e^{\alpha\lambda^a} \approx E(\alpha, \lambda^a) \text{ } \textit{при } a > e. \tag{17}$$

Доказательство см. в ([1]), стр. 131.

ЛЕММА 6. *Если* $\mu\equiv 1\,(\lambda^{e+1})$, *то*

$$(\mu,\nu)_\lambda^{-1}=\delta_\lambda \exp(\lg\mu\cdot\nu^{-1}d_\lambda\nu), \tag{18}$$

где $d_\lambda\nu=\sum i\beta_i\lambda^i$, *если* $\nu=\sum\beta_i\lambda^i$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что равенство (18) имеет смысл, так как $\delta_\lambda\exp(\lg\mu,\nu^{-1}d_\lambda\nu)$ не меняется при переходе к другой записи ν. Если $\nu=\lambda$, то $(\mu,\nu)_\lambda^{-1}=\delta_\lambda\mu$ и

$$\delta_\lambda\exp(\lg\mu,\nu^{-1}d_\lambda\nu)=\delta_\lambda\mu,$$

и равенство (18) в этом случае доказано. Пусть $\nu=E(\beta,\lambda^b)$, где $b\not\equiv o(l)$. Будем различать два случая:

а) Если $\mu=E(\alpha,\lambda^a)$, $a\not\equiv o(l)$, $a>l$, то

$$\lg\mu=L(\alpha,\lambda^a)\equiv\alpha\lambda^a\,(\lambda^{le_1+1}),$$

а

$$\nu^{-1}d_\lambda\nu=d_\lambda\lg\nu=d_\lambda L(\beta,\lambda^b)=b\sum_{m=0}^{\infty}\beta^{L^m}\lambda^{l^m b};$$

отсюда

$$\lg\mu\cdot\nu^{-1}d_\lambda\nu\equiv\sum_{m=0}^{\infty}b\alpha\beta^{L^m}\lambda^{l^m b+a}\,(\lambda^{le_1+1}). \tag{19}$$

Так как $a+b>e$, а $l^m b+a\not\equiv o(l)$ при $m>0$, то, по лемме 5,

$$\delta_\lambda\exp(b\alpha\beta,\lambda^{a+b})=\delta_\lambda E(b\alpha\beta,\lambda^{a+b})=(\mu,\nu)_\lambda^{-1}, \tag{20}$$

$$\delta_\lambda\exp(b\alpha\beta^{L^m},\lambda^{l^m b+a})=\delta_\lambda E(b\alpha\beta^{L^m},\lambda^{l^m b+a})=1. \tag{21}$$

Равенства (19), (20), (21) и доказывают формулу (18) для случая а).

б) $\mu=E(l\alpha,\lambda^a)$, $la>e$. В этом случае

$$\lg\mu\equiv l\alpha\lambda^a+\alpha^L\lambda^{la}\,(\lambda^{le_1}+1)$$

и

$$\lg\mu\cdot\nu^{-1}d_\lambda\nu=b\sum_{m=0}^{\infty}(l\alpha\beta^{L^m}\lambda^{l^m b+a}+\alpha^L\beta^{L^{m+1}}\lambda^{l^{m+1}b+la})+b\alpha^L\beta\lambda^{la+b}. \tag{22}$$

Так как $la+l^{m+1}b>e$, то, по формулам (17) и (16),

$$\exp\,\alpha^L\beta^{L^{m+1}}\lambda^{l^{m+1}b+la})\approx$$

$$\approx E(\alpha^L\beta^{L^{m+1}}\,\lambda^{l^{m+1}}b+la)\approx\exp(-l\alpha\beta^{L^m}\lambda^{l^m b-a}), \tag{23}$$

$$\delta_\lambda\exp(b\alpha^L\beta,\lambda^{la+b})=\delta_\lambda E(b\alpha^L\beta,\lambda^{la+b})=1. \tag{24}$$

Из (22), (23) и (24) получаем:

$$\delta_\lambda\exp(\lg\mu\cdot\nu^{-1}d_\lambda\nu)=1,$$

но в этом случае и $(\mu,\nu)_\lambda=1$. Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Если* $\mu\equiv 1\,(\lambda^{e+1})$, *то значение* (μ,ν) *не зависит от выбора простого числа* λ, *при помощи которого этот символ определен.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon\equiv 1\,(\lambda^{e+1})$ — главная единица и

$$\varepsilon=E(\alpha)\prod_{i>e}E(\alpha_i,\lambda^i)\prod_{lj>e}E(l\alpha_j,\lambda^j) \tag{25}$$

— ее каноническое разложение. Согласно (4),

$$E(\alpha) \approx E(\alpha\gamma^e e_1, \lambda^{le_1}) = E(\alpha_0, \lambda^{le_1}),$$

поэтому, логарифмируя (25), мы получаем, как и при доказательстве предыдущей леммы:

$$\lg \varepsilon \equiv \sum \alpha_i \lambda^i + l \sum \alpha_j \lambda^j + \sum \alpha_j^l \lambda^l \; + \alpha_0 \lambda^{le_1} (\lambda^{le_1+1}).$$

Представляя в таком виде $\lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\lambda \nu$, получаем:

$$\lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\lambda \nu \equiv \sum \alpha_i \lambda^i + x^L + lx + \alpha_0 \lambda^{le_1} (\lambda^{le_1+1}), \tag{26}$$

где для краткости положено $\sum \alpha_j \lambda^j = x$, и, значит,

$$(\mu, \nu)_\lambda^{-1} = \delta_\lambda \exp(\alpha_0 \lambda^{le_1}). \tag{27}$$

Пусть τ — другое простое число. Вычислим $(\mu, \nu)_\tau$. По той же формуле (19) находим:

$$(\mu, \nu)_\tau^{-1} = \delta_\tau \exp(\lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\tau \nu). \tag{28}$$

Но

$$\lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\tau \nu = \lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\lambda \nu \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda},$$

откуда

$$\lg \mu \cdot \nu^{-1} d_\tau \nu \equiv \sum \alpha_i \lambda^{i-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \tau + (x^L + lx) \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda} + \alpha_0 \lambda^{le_1} \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda} (\lambda^{le_1+1}). \tag{29}$$

Так как

$$\alpha_i \lambda^{i-1} \frac{d\lambda}{d\tau} \tau = d_\tau (i^{-1} \alpha_i \lambda^i) \equiv \sum \gamma_k \tau^k (\tau^{le_1+1}),$$

то

$$\delta_\tau \exp\left(\alpha_i \lambda^i \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda}\right) = 1. \tag{30}$$

Исследуем второй член сравнения (29). Пусть $\lambda = \tau\varepsilon$; тогда

$$(x^L + lx) \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda} = (x^L + lx) + (x^L + lx) \varepsilon^{-1} d_\tau \varepsilon. \tag{31}$$

Как и выше, получаем:

$$\delta_\tau \exp(x^L + lx) = 1, \tag{32}$$

откуда

$$\delta_\tau \exp(x^L + lx) \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\tau}{\lambda} = \delta_\tau \exp(x^L + lx) \varepsilon^{-1} d_\tau \varepsilon. \tag{33}$$

При помощи формулы (19) и соотношения

$$\lg E^l(x) \equiv \lg \prod E(\alpha_j, \lambda^j)^l \equiv \sum \alpha_j^L \lambda^{lj} + l \sum \alpha_j \lambda^j \equiv x^L + lx \;\; (\lambda^{le_1+1})$$

получаем

$$\delta_\tau \exp(x^L + lx) \frac{d\lambda}{d\tau} \cdot \frac{\lambda}{\tau} = \delta_\tau \exp(x^L + lx) \varepsilon^{-1} d_\tau \varepsilon = (E^l(x), \varepsilon) = 1. \tag{34}$$

Наконец,

$$\alpha_0 \lambda^{e+e_1} (1 + \varepsilon^{-1} d_\tau \varepsilon) \equiv \alpha_0 \lambda^{le_1} (\lambda^{le_1+1}),$$

откуда

$$\delta_\tau \exp \alpha_0 \lambda^{le_1} = \delta_\lambda \exp \alpha_0 \lambda^{le_1}. \tag{35}$$

Из формул (27) — (35) выводим:

$$(\mu, \nu)_\lambda = (\mu, \nu)_\tau.$$

ЛЕММА 8. *Если* $A = \Lambda^a \prod E(\alpha_i^{L^{-1}}, \Lambda^i)$ *и* $\nu = N_{k_{\lambda}/k}(A)$, *где* $\Lambda = \sqrt[l]{\lambda}$, *то*

$$(\mu, \nu)_\lambda = (\mu, A)_\Lambda. \tag{36}$$

Рассмотрим два случая:

а) Пусть $A = \Lambda$. Доказательство формулы (36) в этом случае сводится к доказательству равенства $\delta_\lambda \nu = \delta_\Lambda \nu$. Докажем его. Если $\nu = E(\beta, \lambda^b)$, $b \not\equiv o(l)$, то для этого достаточно доказать, что

$$\delta_\lambda E(\beta, \Lambda^{lb}) = 1.$$

В силу формулы (17),

$$E(\beta, \Lambda^{lb}) \approx \exp(-l\beta^{L^{-1}} \Lambda^b) = 1.$$

По формуле же (1)

$$-l\beta^{L^{-1}} = \sum \rho_k \lambda^k = \sum \rho_k \Lambda^{lk}, \quad k > e.$$

Поэтому

$$-l\beta^{L^{-1}} \Lambda^b = \sum \rho_k \Lambda^{lk+b}.$$

А так как $lk + b > le$ и $b \not\equiv o(l)$, то, по формуле (18),

$$\delta_\Lambda \exp(-l\beta^{L^{-1}} \Lambda^b) = \delta_\Lambda \prod E(\rho_k \Lambda^{lk+b}) = 1.$$

Но это как раз совпадает с $\delta_\lambda \nu = \delta_\lambda E(\beta, \lambda^b)$.

б) Пусть $A = E(\alpha, \Lambda^a)$, $a \not\equiv o(l)$, $\mu = E(\alpha^L, \lambda^a)$; тогда

$$(\mu, \nu)_\lambda = \delta_\lambda E(a\alpha^L \beta, \lambda^{a+b}) = \begin{cases} 1, & \text{если } a + b \not\equiv o(l), \\ \delta_\lambda \exp(-l\alpha\beta^{L^{-1}} \lambda^k), & \text{если } a + b = lk, \end{cases} \tag{37}$$

$$(A, \nu)_\Lambda = \big(E(\alpha, \Lambda^a), E(\beta, \Lambda^{lb})\big) = \big(E(\alpha, \Lambda^a), \exp(-l\beta^{L^{-1}} \Lambda^b)\big), \tag{37'}$$

а это, по формуле (19), дает:

$$(A, \nu)_\Lambda = \delta_\Lambda \exp(-l\beta^{L^{-1}} \Lambda^b dL(\alpha, \Lambda^a)) = \delta_\Lambda \exp(-al\beta^{L^{-1}} \Lambda^b \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{L^m} \Lambda^{l^m a}).$$

Так как при $m > 0$ получаются члены с показателями $\equiv o(l)$ (ввиду того что $b \not\equiv o(l)$, а l состоит из членов с делящимися на l показателями), то последнее равенство может быть переписано в виде

$$(A, \nu)_\Lambda = \delta_\Lambda \exp(-la\beta^{L^{-1}} \alpha \Lambda^{a+b}),$$

что, по доказанному в пункте а), равносильно условию:

$$(A, \nu)_\Lambda = \begin{cases} 1, & \text{если } a + b \not\equiv o(l), \\ \delta_\lambda \exp(-l\alpha\beta^{L^{-1}} \Lambda^{lk}) = \delta_\lambda \exp(-l\alpha\beta^{L^{-1}} \lambda^k); & \text{если } a + b = lk. \end{cases} \tag{36'}$$

Сравнение этого равенства с равенством (37) и доказывает формулу сдвига.

ЛЕММА 9. *Если* ω — *примарное число и* $\tau = \lambda\omega$, *то* $(\mu, \nu)_\lambda = (\mu, \nu)_\tau$.

Доказательство этой леммы следует из сравнения

$$E(\alpha, \lambda^a) \equiv E(\alpha, \tau^a)\,(\lambda^{le_1+1}),$$

так как $\tau \equiv \lambda\,(\lambda^{le_1+1})$.

Если $\mu \not\approx 1$, то условимся поле $k(\sqrt[l]{\mu})$ обозначать через k_μ, а поле $k(\sqrt[l]{\mu}, \sqrt[l]{\nu})$, где ν также $\not\approx 1$, — через $k_{\mu,\nu}$. Соответственно числа из k_μ будем обозначать большими латинскими буквами с индексом μ:

$$N_{k_\mu/k}(A_\mu) = N_\mu A_\mu, \quad N_{k_{\mu,\nu}/k}(A_{\mu,\nu}) = N_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}.$$

ЛЕММА 10. *Если* $\mu, \nu \not\approx 1$ *и* ν *есть норма в* k_μ, *то и* μ *есть норма в* k_ν.

Доказательство. По условию, $\nu = N_\mu A_\mu$. Так как $\mu = N_\mu M$, где $M = \sqrt[l]{\mu}$, то $\nu\mu = N_\mu (A_\mu M)$. Но $\nu\mu = N_{\mu\nu}(\Gamma_{\mu\nu})$, где $\Gamma_{\nu\mu} = \sqrt[l]{\mu\nu}$. Из двух последних равенств, по лемме 2, следует, что $\mu\nu = N_\nu A_\nu$. Так как, кроме того, $\nu = N_\nu(N)$, где $N = \sqrt[l]{\nu}$, то $\mu = N_\nu (A_\nu N^{-1})$.

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы* ν *было нормой в* k_μ, *является равенство единице символа* (μ, ν).

Если $\mu \approx$ некоторой единице из k, то будем коротко писать $\mu \sim 1$.

Доказательство достаточности. Пусть λ — произвольное простое число и

$$(\mu, \nu)_\lambda = 1. \tag{38}$$

Докажем, что ν есть норма в k_μ. Рассмотрим три случая:

1) Или $\mu \not\sim 1$, или $\nu \not\sim 1$. Ввиду симметрии μ и ν, достаточно рассмотреть один случай, например, $\nu \not\sim 1$. Если $\nu = \lambda^a \varepsilon$, то $\nu' = \nu^{a'}$, где a' определено из сравнения $aa' \equiv 1\,(l)$, будет $\approx$ простому числу. При этом равенство (38) сохраняется и для ν'. Следовательно, можно сразу принять в этом случае, что ν — простое число. Если $(\lambda, \nu)_\lambda \neq 1$, то можно найти такое примарное число ω, что $\tau = \lambda\omega$ удовлетворяет условию

$$(\tau, \nu)_\tau = 1. \tag{39}$$

Действительно, если $(\lambda, \nu)_\lambda = \delta_\lambda \omega$, то $\tau = \lambda\omega$ будет искомым простым числом, так как, по лемме 10,

$$(\tau, \nu)_\tau = (\tau, \nu)_\lambda = (\lambda\omega, \nu)_\lambda = (\lambda, \nu)(\omega, \nu) = \delta_\lambda \omega \delta_\lambda \omega^{-1} = 1.$$

По той же лемме,

$$(\mu, \nu)_\tau = (\mu, \nu)_\lambda = 1. \tag{40}$$

Из равенства (38) следует, что $\nu = N_\tau A_\tau$. По формуле сдвига

$$(\mu, \nu)_\tau = (\mu, A_\tau)_T = 1 \quad (T = \sqrt[l]{\tau}). \tag{41}$$

Если

$$\mu = \tau^a E(\alpha) \prod E(\alpha_i \tau^i) = T^{la} \prod E(\alpha) E(\alpha_i T^{lj}),$$

то по формуле (17), в k_τ

$$\mu \approx E(\alpha) \exp(-l\alpha_j^{L^{-1}} T^i) \equiv 1 \ \ (T^{le+1}).$$

Но для таких чисел инвариантность, а значит, и норменное свойство нами уже были доказаны. Поэтому из равенства (41) следует, что

$$A_\tau = N_{k_{\tau,\mu}/k_\tau}(A_{\tau,\mu})$$

и, значит,

$$\nu = N_\tau A_\tau = N_{\tau,\mu} A_{\tau,\mu} = N_\mu B_\mu,$$

где B_μ — число из k_μ.

2) $\mu \sim 1$, $\nu \sim 1$, причем или $\delta_\lambda \mu = 1$, или $\delta_\lambda \nu = 1$. Доказательство остается прежним; в этом случае даже не нужно переходить к другому простому числу τ.

3) $\mu \sim 1$, $\nu \sim 1$, $\delta_\lambda \mu \not\approx 1$, $\delta_\lambda \nu \not\approx 1$. Заметим, что каждая единица ε

из k есть норма в k_ω, где ω — произвольное примарное число. Действительно, так как $(\omega, E(\alpha, \lambda^a)) \approx 1$, то, по доказанному в 2), $E(\alpha, \lambda^a)$ есть норма в k_ω. Пусть

$$E(\alpha, \lambda^a) = NE(\bar{\alpha}, \lambda^a) = E(S_p\, \mathfrak{R}_\omega / \mathfrak{R}(\bar{\alpha}), \lambda^a),$$

откуда

$$\alpha \equiv S_p\, \mathfrak{R}_\omega /_{\mathfrak{R}} (\bar{\alpha}) \ (l). \tag{42}$$

Из (42) следует, что и

$$E(\alpha) = E(S_p(\bar{\alpha})) = NE(\bar{\alpha}),$$

а значит, и каждая единица ε есть норма в k_ω. Пусть $\mu = \mu'\omega$, где ω — примарное число, а $\delta_\lambda \mu' = 1$, тогда $(\mu, \nu)_\lambda = (\mu', \nu)_\lambda (\omega, \nu)_\lambda = (\mu', \nu)_\lambda = 1$ и, по доказанному в 2), ν есть норма в $k_{\mu'}$. А так как, в силу 3), ν есть норма в k_ω, то, по лемме 2, ν есть норма в $k_{\omega\mu'} = k_\mu$.

Доказательство необходимости. Пусть ν есть норма в k_ω. Докажем, что $(\mu, \nu)_\lambda = 1$. Рассмотрим два случая.

1. $\mu \sim 1$, $\nu \not\sim 1$. Опять, как и выше, можно принять, что ν — простое число. В этом случае найдется такое примарное число ω, что $\tau = \lambda\omega$ будет удовлетворять равенству

$$(\tau, \nu)_\tau = (\mu, \nu)_\tau^{-1}, \tag{43}$$

откуда

$$(\tau\mu, \nu)_\tau = 1.$$

По ранее доказанному отсюда следует, что ν есть норма в $k_{\mu\tau}$, а так как, кроме того, ν есть, по условию, норма в k_μ, то, по лемме 2, ν есть норма в k_τ и, значит, $(\tau, \nu)_\tau = 1$. Из равенства (43), по лемме 10, получаем:

$$(\mu, \nu)_\tau = (\mu, \nu)_\lambda = 1.$$

2. $\mu \sim 1$, $\nu \sim 1$. Возьмем простое число λ' такое, что $(\mu, \lambda')_\lambda = 1$. Тогда

$$(\mu, \nu)_\lambda = (\mu, \nu\lambda')_\lambda. \tag{44}$$

Так как $(\mu, \lambda')_\lambda = 1$, то, по доказанному, λ' есть норма в k_μ, а так как и ν есть норма в k_μ, то и $\lambda'\nu$ есть норма в k_μ и, значит, в силу доказанного в случае 1,

$$(\mu, \lambda'\nu)_\lambda = (\mu, \nu)_\lambda = 1.$$

Следствие. *По лемме 1, отсюда следует инвариантность символа* (μ, ν).

ЛЕММА 11. *Если* σ — *автоморфизм поля* k, *то* $(\mu, \nu) = (\mu^\sigma, \nu^\sigma)$.

Доказательство непосредственно вытекает из построения символа (μ, ν).

Следствие I. *Если* $\mu^{1-\sigma} = 1$, *то* $(\mu, \nu^{1-\sigma}) = 1$ *и, значит,*

$$\nu^{1-\sigma} = N_\mu A_\mu.$$

Следствие II. *Если* $\mu = N_\lambda M$, *где* M — *число из* k_λ, *то*

$$(\mu, \nu)_\lambda = (M, \nu)_\lambda.$$

Доказательство. Ввиду леммы 8, $\mu = N_\lambda M = N_\lambda A$, откуда

$$M = AB^{1-\sigma}.$$

По предыдущему следствию и лемме 8, отсюда получаем:

$$(M, \nu)_\Lambda = (A, \nu)_\Lambda (B^{1-\sigma}, \nu)_\Lambda = (A, \nu)_\Lambda = (\mu, \nu)_\lambda.$$

ТЕОРЕМА 2 (общая формула сдвига). *Пусть K — абелево расширение k показателя l и $\mu \not\approx 1$, $\nu \not\approx 1$ — два числа из k. Тогда, если ν есть норма некоторого числа A из K, то*

$$(\mu, \nu) = (\mu, A). \tag{45}$$

Доказательство. Если $(K:k) = l^n$, то $K = k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_n}$, где μ_i — числа из k. Доказательство формулы (45) будем вести индукцией по n.

1. $n = 1$, $K = k(\sqrt[l]{\mu_1}$. Будем различать два случая:

a) $\mu = \lambda$ — простое число из k. Формула (45) в этом случае уже была нами доказана в лемме 8.

b) $\mu = \varepsilon$ — единица из k. Введем следующее обозначение: если $\alpha \not\approx 1$ и $k_\alpha = k\ (\sqrt[l]{\alpha})$, то $(\mu, A_\alpha)_\alpha$ обозначает, что символ (μ, A_α) вычисляется в поле k_α.

Если $\nu = N_\varepsilon B_\varepsilon$, то докажем сначала, что

$$(\mu, \nu) = (\mu, B_\varepsilon)_\varepsilon^f, \tag{46}$$

где f — не зависящее от μ и ν натуральное число $\not\equiv o(l)$. С этой целью покажем, что из равенства $(\mu, \nu) = 1$ следует $(\mu, B_\varepsilon) = 1$ и, наоборот, из равенства $(\mu, B_\varepsilon) = 1$ следует равенство $(\mu, \nu) = 1$. Пусть $(\mu, B_\varepsilon) = 1$. По теореме 1, отсюда следует, что

$$B_\varepsilon = N_{K_{\varepsilon,\mu}/k_\varepsilon}\ (B_{\mu,\varepsilon})$$

и, значит,

$$\nu = N_\varepsilon B_\varepsilon = N_{\varepsilon,\mu} B_{\varepsilon,\mu} = N_\mu \Gamma_\mu,$$

т. е. $(\mu, \nu) = 1$. Пусть, наоборот, $(\mu, \nu) = 1$. Выберем в k простое число λ так, чтобы

$$(\lambda, \nu) = 1. \tag{47}$$

Если $\mu \approx \lambda^a \xi$, то

$$(\lambda\xi, \nu) = 1. \tag{48}$$

Из (47) и (48), по теореме 1, следует, что

$$\nu = N_\lambda B_\lambda = N_{\lambda\xi} B_{\lambda\xi},$$

откуда, по доказанному в п. 1 теоремы 2,

$$(\varepsilon, \nu) = (\varepsilon, B_\lambda)_\lambda = (\varepsilon, B_{\lambda\xi})_{\lambda\xi} = 1,$$

так как $\nu = N_\varepsilon B_\varepsilon$. Из этих равенств следует, что

$$B_\lambda = N_\varepsilon B_{\lambda,\varepsilon} \text{ и } B_{\lambda\xi} = N_\varepsilon B_{\lambda,\xi,\varepsilon},$$

а значит, и

$$\nu = N_\lambda B_\lambda = N_\lambda N_\varepsilon B_{\lambda,\varepsilon} = N_\varepsilon N_\lambda B_{\lambda,\varepsilon} = N_\varepsilon (N_{\lambda\varepsilon}(B_{\lambda\xi,\varepsilon})) = N_\varepsilon B_\varepsilon.$$

Отсюда, по теореме Гильберта, находим:

$$B_\varepsilon = \Gamma_\lambda^{1-\sigma} N_\lambda B_{\lambda,\varepsilon} = \Gamma_{\lambda\xi}^{1-\tau} N_{\lambda\xi}(B_{\lambda\xi,\varepsilon}),$$

где σ — автоморфизм $k_\lambda(\sqrt[l]{\varepsilon})/k_\lambda$, а τ — автоморфизм $k_{\lambda\xi}(\sqrt[l]{\varepsilon})/k_{\lambda\xi}$. По

теореме 1 и лемме 11, отсюда следует:

$$(\lambda, B_\varepsilon)_\varepsilon = (\lambda, \Gamma_\lambda^{1-\sigma} N_\lambda B_{\lambda, \varepsilon}) = 1 \tag{49}$$

и, аналогично,

$$(\lambda\xi, B_\varepsilon)_\varepsilon = 1. \tag{50}$$

Из (49) и (50) окончательно находим:

$$(\lambda^a\xi, B_\varepsilon)_\varepsilon = (\mu, B_\varepsilon)_\varepsilon = 1.$$

Рассмотрим две билинейные кососимметрические формы $F_1(\mu, B_\varepsilon)$ и $F_2(\mu, B_\varepsilon)$, определенные равенствами

$$(\mu, \nu) = (\mu, NB_\varepsilon) = \omega_0^{F_1(\mu, B_\varepsilon)},$$

$$(\mu, B_\varepsilon)_\varepsilon = \omega_0^{F_2(\mu, B_\varepsilon)}.$$

Билинейная форма в поле классов вычетов $\bmod l$ определяется своим нулевым многообразием с точностью до постоянного множителя. Согласно доказанному, отсюда следует, что $F_2 \equiv fF_1 \pmod l$, и, значит, равенство (46). Докажем, что $f \equiv 1\,(l)$. Пусть $\varepsilon = E(\alpha_0)\,E(\alpha_1, \lambda^a)$ — каноническое представление ε, тогда

$$\varepsilon \equiv 1 + \alpha\lambda^a\,(\lambda^{a+1}),$$

откуда

$$N_\varepsilon\left(\frac{\sqrt[l]{\varepsilon-1}}{\alpha^{l^{-1}}}\right) = \frac{\varepsilon-1}{\alpha} \equiv \lambda^a\,(\lambda^{a+1}).$$

Так как $a \not\equiv o\,(l)$, то уравнение $x^a = \beta$ разрешимо и потому за простое в k_ε число можно принять

$$\Lambda = \left(\frac{\sqrt[l]{\varepsilon-1}}{\alpha^{l^{-1}}}\right)^{\frac{1}{a}}.$$

Беря в (46)

$$\mu = E(1, \lambda^r), \quad B_\varepsilon = 1 + \Lambda^s,$$

где $s = le_1 - r$, а $r > a$ и взаимно просто с l, будем иметь, согласно (²), стр. 81,

$$\nu = NB_\varepsilon = N(1 + \Lambda^s) \equiv 1 + \lambda^s\,(\lambda^{s+1}) = E(1, \lambda^s) \prod_{i>s} E(\alpha_i\lambda^i).$$

Вычисляя $(\mu, B_\varepsilon)_\varepsilon$ и (μ, ν), получим:

$$(\mu, \nu) = \big(E(1, \lambda^r),\ E(1, \lambda^s)\big) = \delta_\lambda E(s, \lambda^{le_1}). \tag{51}$$

Так как

$$E(1, \lambda^r) \equiv 1 + \lambda^r + \dots = 1 + \Lambda^{lr} + \dots = E(1, \Lambda^{lr}) \dots \approx \lambda^{-l\Lambda^r} \dots,$$

где точки обозначают не интересующие нас множители, то, применяя к числам

$$\mu = E(1, \lambda^r) \approx e^{-l\Lambda^r} \dots \text{ и } B_\varepsilon = E(1, \Lambda^s) \dots$$

формулу (19), а затем (17), получим:

$$(\mu, B_\varepsilon) = \delta_\Lambda \exp(-ls,\ \Lambda^{r+s}) = \delta_\lambda E(s, \lambda^{r+s}), \tag{51'}$$

т. е.

$$(\mu, \nu) = (\mu, B_\varepsilon).$$

Сравнение этого равенства с равенством (46) и доказывает, что $f \equiv 1\,(l)$, а значит, и теорему 2 для $n = 1$.

2. Пусть теорема 2 уже доказана для всех полей K степени l^{n-1}; докажем ее для поля K степени l^n. Если $K = k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_n})$, то обозначим $k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_{n-1}})$ через k'. Так как

$$\nu = N_{K/k}(B) = N_{k'/k}(N_{K/k'}(B)),$$

то, по индуктивному предположению,

$$(\mu, \nu) = (\mu, N_{K/k'}(B))_{k'}. \qquad (52)$$

Так как $K = k'(\sqrt[l]{\mu_n})$, то, по доказанному в пункте 1,

$$(\mu, N_{K/k'}(B))_{k'} = (\mu, B)_K. \qquad (53)$$

Из равенств (52) и (53) и следует формула (45).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G — группа чисел из k^* (мультипликативная группа не равных нулю чисел из k), содержащая k^{*l} и такая, что $(K : k^{*l}) < \infty$, K — соответствующее ей абелево расширение k показателя l и $N(K/k)$ — группа чисел из k^*, являющихся нормами чисел из K. Тогда G и $N(K/k)$ образуют в смысле скалярного произведения (μ, ν) ортогональную пару.*

Доказательство. Пусть $(G : k^{*l}) = l^n$ и, значит, $(K : k) = l^n$. Будем доказывать эту теорему индукцией по n. Для $n = 1$ она следует из теоремы 1. Пусть она уже доказана для всех полей K степени l^{n-1} над k; докажем ее для поля K степени l^n. Если $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — числа из базисных классов группы G/k^{*l}, то

$$K = k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_n}).$$

Пусть

$$k' = k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_{n-1}}).$$

То, что нормы чисел из K ортогональны по всем μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ следует из теоремы 1. Пусть, наоборот, ν — число из k, ортогональное ко всем μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. По индуктивному предположению, отсюда следует, что ν есть норма в $k'/k : \nu = N_{k'/k}(B_{n-1})$, где $B_{n-1} \in k'$.

По формуле (45),

$$1 = (\mu_n, \nu) = (\mu_n, B_{n-1})_{k'},$$

откуда, по теореме 1,

$$B_{n-1} = N_{K/k'}(B), \quad B \in K,$$

и, значит,

$$\nu = N_{k'/k}(B_{n-1}) = N_{k'/k}(N_{K/k'}(B) = N_{K/k}(B)).$$

Определение. Подгруппу k^* назовем допустимой, если она имеет в k^* конечный индекс.

Пусть K — абелево расширение k показателя l. Подгруппу чисел из k^*, являющихся нормами чисел из K, будем обозначать через NK.

ТЕОРЕМА 4. *Соответствие $K \to NK$ есть взаимно однозначное соответствие между абелевыми расширениями k показателя l и допустимыми подгруппами k^*. При этом группа k^*/NK изоморфна группе Галуа K/k. Если $K_1 \subset K_2$, то $NK_1 \supset NK_2$, и, наоборот, если $NK_1 \subset NK_2$, то $K_1 \supset K_2$.*

Доказательство. Обозначим через $G(K)$ подгруппу k^*, состоящую из всех чисел, становящихся в K l-ми степенями. Из элементарных соображений теории Галуа получаются следующие утверждения [доказательство их см. в (3)].

Соответствие $K \to G(K)$ есть взаимно однозначное соответствие между абелевыми полями K/k показателя l и конечными подгруппами k^*/k^{*l}. При этом группа $G(K)/k^{*l}$ изоморфна группе характеров группы Галуа K/k. Если $K_1 \subset K_2$, то $G(K_1) \subset G(K_2)_2$, и, наоборот, если $G(K_1) \subset G(K_2)$, то $K_1 \subset K_2$.

Так как, согласно теореме 3, ортогональным дополнением группы $G(K)$ является группа NK, то теорема 4 следует из только что сформулированных утверждений и теорем об ортогональных дополнениях.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть k — произвольное поле алгебраических чисел, содержащее не равный единице корень l-й степени из 1, и $\mathfrak{l}/l$ — простой идеал из k. Если K — абелево расширение k показателя l и*

$$\nu = N_{K(\mathfrak{l})/k(\mathfrak{l})}(B),$$

где B — число из K, $k(\mathfrak{l})$ — $\mathfrak{l}$-адическое замыкание k и $K(\mathfrak{l})$ — кольцо $\mathfrak{l}$-адических чисел над K, то

$$(\mu, \nu) = \prod_{\mathfrak{L}/\mathfrak{l}} (\mu, B)_{K(\mathfrak{L})},$$

где произведение берется по всем простым делителям $\mathfrak{l}$ из K.

Доказательство. По теореме III 7 C из (4), $K(\mathfrak{l})$ распадается в прямую сумму полей $K(\mathfrak{L})$. Если

$$B = \{B_{\mathfrak{L}}\},$$

где $B_{\mathfrak{L}}$ — компоненты B в $K(\mathfrak{L})$, то по формуле 7.5 из работы (4),

$$\nu = N_{K(\mathfrak{l})/k(\mathfrak{l})}(B) = \prod_{\mathfrak{L}/\mathfrak{l}} N_{K(\mathfrak{L})/k(\mathfrak{l})}(B_{\mathfrak{L}}) = \prod_{\mathfrak{L}/\mathfrak{l}} N_{K(\mathfrak{L})/k(\mathfrak{l})}(B).$$

Применяя формулу (45), получим:

$$(\mu, \nu) = \prod_{\mathfrak{L}/\mathfrak{l}} (\mu, N_{K(\mathfrak{L})/k(\mathfrak{l})}(B)) = \prod_{\mathfrak{L}/\mathfrak{l}} (\mu, B)_{K(\mathfrak{L})}.$$

Считаю своим долгом принести глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу, который прочитал эту работу в рукописи и дал ряд ценных указаний и советов.

Поступило
13.X.1952

ЛИТЕРАТУРА

1 Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Мат. сб. 26 (68) : 1 (1950), 114—146.

2 Hasse H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. Deutsch. Math. Ver. 35 (1927), 1—134.

3 Witt E., Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper, J. reine und angew. Math., 173 (1935), 43—51.

4 Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М.— Л., 1949.

5 Chevalley C., Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, II, v. 9 (1933), 365—476.

6 Лапин А. И., Теория символа Шафаревича, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 31—50.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 159—176

Н. К. БАРИ

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА и А. А. МАРКОВА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье доказывается, что некоторые хорошо известные неравенства, связывающие максимум модуля тригонометрического полинома и максимум модуля его производной, сохраняют силу, если вместо нормы в пространстве C рассматривать норму в пространстве L^p $(p \geqslant 1)$.

Введение. Хорошо известно замечательное неравенство С. Н. Бернштейна ([1]), ([2]) для тригонометрических полиномов порядка n:

$$\max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |T'_n(t)| \leqslant n \max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |T_n(t)| \tag{0.1}$$

Это неравенство играет основную роль при решении вопросов, касающихся связи между дифференциальными свойствами функции $f(x)$ и быстротой, с которой стремятся к нулю ее наилучшие приближения $E_n(f)$ при помощи тригонометрических полиномов порядка n.

Им пользуются также при изучении сходимости рядов Фурье и рядов, сопряженных к ним.

А. Зигмунд ([8]) перенес неравенство С. Н. Бернштейна на пространства L^p $(p \geqslant 1)$, т. е. доказал, что

$$\| T'_n \|_{L^p(-\pi,\,\pi)} \leqslant n \| T_n \|_{L^p(-\pi,\,\pi)}, \tag{0.2}$$

где

$$\| f \|_{L^p(a,\,b)} = \left[\int_a^b |f|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство (0.2) также неоднократно было использовано и самим Зигмундом и другими авторами.

Кроме вышеуказанного неравенства С. Н. Бернштейна (0.1), известно также следующее его неравенство, которое, в отличие от предыдущего, условимся называть «леммой С. Н. Бернштейна» ([3]):

Если $T_{n-1}(t)$ — тригонометрический полином порядка $n-1$, то

$$\max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |T_{n-1}(t)| \leqslant n \max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |T_{n-1}\sin t|. \tag{0.3}$$

В § 2 будет доказано, что эту лемму можно перенести на пространства L^p (правда, с точностью до некоторого постоянного множителя [(см. (2.1)]).

Как известно, И. И. Привалов ([11]) изучал возможность переноса неравенства С. Н. Бернштейна (0.1) на случай, когда рассматривается не весь отрезок $[-\pi, \pi]$, а лишь некоторый отрезок $[a, b]$ меньшей длины*.

* См. также Д. Джексон ([4]). Джексон не заметил теоремы И. И. Привалова и передоказал ее, а затем дал ряд ее приложений.

Он доказал, что тогда для всякого отрезка $[a', b']$, целиком лежащего внутри (a, b), имеем

$$\max_{a'\leqslant t\leqslant b'} |T'_n(\theta)| \leqslant Cn \max_{a\leqslant t\leqslant b} |T_n(\theta)|, \tag{0.4}$$

где C — постоянная, зависящая только от a, a', b' и b.

В § 3 мы переносим этот результат на пространства L^p $(p \geqslant 1)$. Целесообразность рассмотрений такого рода следует из того, что, благодаря им, можно, зная характер приближения функции на некотором отрезке $[a, b]$, заключать о дифференциальных свойствах функции на любом отрезке $[a', b']$ внутри (a, b).

Если надо оценивать производную $T'_n(\theta)$ не на $[a', b']$, а на всем $[a, b]$, то приходится обращаться к неравенству, аналогичному неравенству А. А. Маркова. Классическая теорема А. А. Маркова ([9]) звучит так:

Если $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, то

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |P'_n(x)| \leqslant \frac{2}{b-a} n^2 \max_{a\leqslant x\leqslant b} |P_n(x)|. \tag{0.5}$$

Сам А. А. Марков не переносил своего неравенства на тригонометрические полиномы, однако это может быть сделано. Сделал это Д. Джексон ([5]), ([7]); мы доказываем в § 4 формулу

$$\| T'_n(\theta) \|_{L^p(a, b)} \leqslant C(a, b)\, n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a, b)} \tag{0.6}$$

для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (в частности, отсюда другим способом получается и результат Джексона). При доказательстве мы пользуемся вышеуказанным переносом на L^p леммы С. Н. Бернштейна.

В § 5 из формулы (0.6) выводим для многочленов степени n неравенство

$$\| P'_n(x) \|_{L^p(a, b)} \leqslant C(a, b)\, n^2 \| P_n(x) \|_{L^p(a, b)}, \tag{0.7}$$

которое следует рассматривать как перенос на L^p классического неравенства А. А. Маркова.

Наконец, С. М. Никольский ([10]) нашел замечательную формулу *, позволяющую по норме тригонометрического полинома в пространстве L^p судить о его норме в пространстве L^q для $q > p$: если $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то

$$\| T_n \|_{L^q(-\pi, \pi)} \leqslant 2n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| T_n \|_{L^p(-\pi, \pi)}. \tag{0.8}$$

Здесь речь идет о норме на отрезке $[-\pi, \pi]$; если же рассматривать отрезок $[a, b]$, то мы докажем (см. § 6), что при $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$ имеет место:

$$\| T_n \|_{L^q(a, b)} \leqslant C(a, b)\, n^{2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)} \| T_n \|_{L^p(a, b)}. \tag{0.9}$$

Кроме того, для всякого $[a', b']$, целиком лежащего внутри (a, b), имеем:

---

* Мы здесь формулируем результат С. М. Никольского не полностью, а лишь для случая полиномов от одного независимого переменного.

$$\| T_n \|_{L^q(a',\, b')} \leqslant C(a,\, a',\, b',\, b)\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \| T_n \|_{L^p(a,\, b)} . \tag{0.10}$$

В § 7 мы доказываем, что во всех полученных неравенствах оценки *в смысле порядка* точны. Относительно входящих в них констант я ничего сказать не могу.

Ввиду и без того значительного объема этой статьи, возможные приложения полученных теорем к проблемам аппроксимации функций тригонометрическими полиномами и к сходимости тригонометрических рядов будут изложены мною в другой работе.

§ 1. Начнем с доказательства нескольких лемм.

ЛЕММА 1. *Если $T_n(t)$ — тригонометрический полином порядка n и если $\alpha \geqslant 0$, а $p \geqslant 1$, то, полагая*

$$J_{\alpha p} = \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^\alpha \, dt, \tag{1.0}$$

имеем

$$\max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |T_n| \leqslant A n^{\frac{\alpha+1}{p}} J_{\alpha p}^{\frac{1}{p}},$$

где A — константа, зависящая от α, но если $\alpha \leqslant p$, то $A \leqslant 8\pi$.

Положим

$$\mu = \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |T_n(t)| . \tag{1.1}$$

Пусть t_0 — точка, где максимум достигается, т. е.

$$|T_n(t_0)| = \mu. \tag{1.2}$$

Так как при любом h

$$\Big| |T_n(t_0+h)| - |T_n(t_0)| \Big| \leqslant |T_n(t_0+h) - T_n(t_0)| = |h|\, |T_n'(t_0+\theta h)| ,$$

где $0 < \theta < 1$, и, в силу неравенства С. Н. Бернштейна (0.1), из (1.1) следует $|T_n'(t)| \leqslant n\mu \quad (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$, то $\Big| |T_n(t_0+h)| - |T_n(t_0)| \Big| \leqslant n\mu |h|$.

Поэтому при $|h| \leqslant \frac{1}{2n}$ получим

$$\Big| |T_n(t)| - |T_n(t_0)| \Big| \leqslant \frac{\mu}{2} \text{ при } t_0 - \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{2n} \tag{1.3}$$

и, в силу (1.2) и (1.3),

$$|T_n(t)| \geqslant \frac{\mu}{2} \text{ для } t_0 - \frac{1}{2n} \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{1}{2n} .$$

Итак, существует интервал Δ длины $\frac{1}{n}$, на котором $|T_n(t)| \geqslant \frac{\mu}{2}$. Имеем:

$$\int_\Delta |T_n|^p |\sin t|^\alpha dt \leqslant \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^\alpha dt = J_{\alpha p},$$

а потому

$$\left(\frac{\mu}{2}\right)^p \int_\Delta |\sin t|^\alpha dt \leqslant J_{\alpha p} . \tag{1.4}$$

Чтобы оценить интеграл в левой части, заметим, что $|\sin t|$ — четная функция и имеет период π; поэтому, не нарушая общности, можно считать центр Δ лежащим на $\left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда найдется интервал Δ' длины не

менее $\frac{\Delta}{2}=\frac{1}{2n}$, который лежит целиком на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и на Δ, а потому

$$\int_{\Delta} |\sin t|^{\alpha} dt \geqslant \int_{\Delta'} |\sin t|^{\alpha} dt \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha} \int_{\Delta'} t^{\alpha} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}),$$

где $\Delta'=(a, b)$. Так как $b-a \geqslant \frac{1}{2n}$, то

$$b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1} \geqslant \left(a+\frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1}-a^{\alpha+1},$$

и так как $\alpha \geqslant 0$, то минимум этого выражения равен $\left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1}$, откуда

$$\int_{\Delta} |\sin t|^{\alpha} dt \geqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{\alpha+1} = \frac{1}{2(\alpha+1)\pi^{\alpha} n^{\alpha+1}}.$$

Из (1.4) и (1.5) находим

$$\left(\frac{\mu}{2}\right)^{p} \leqslant 2(\alpha+1)\pi^{\alpha} n^{\alpha+1} J_{\alpha p}, \tag{1.5}$$

откуда

$$\mu \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}} (\alpha+1)^{\frac{1}{p}} \pi^{\frac{\alpha}{p}} n^{\frac{\alpha+1}{p}} J_{\alpha p}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

Так как $p \geqslant 1$, то при $\alpha \leqslant p$, замечая, что $(p+1)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2$, выводим:

$$\mu \leqslant 8\pi n^{\frac{\alpha+1}{p}} J_{\alpha p}^{\frac{1}{p}},$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Полагая* $\alpha=0$, *получаем из* (1.6):

$$\max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |T_n(t)| \leqslant 2^{1+\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |T_n|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Этот результат (даже с заменой $2^{1+\frac{1}{p}}$ на 2) был получен Джексоном ([8]). Метод, которым он доказал свое неравенство, положен в основу только что доказанной леммы.

ЛЕММА 2. *Если* $T_n(t)$ — *тригонометрический полином порядка* n, $p \geqslant 1$ *и* $\alpha \geqslant 0$, *то*

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |T_n(t)|^p dt \leqslant C^p n^{\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^{\alpha} dt,$$

где C — *константа, зависящая от* α, *и абсолютная константа, если* $\alpha \leqslant p$.

Для доказательства заметим, что если $\frac{\pi}{2n} \leqslant |t| \leqslant \pi-\frac{\pi}{2n}$, то $|\sin t| \geqslant \sin\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{1}{n}$, поэтому

$$\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\pi-\frac{\pi}{2n}} |T_n|^p dt \leqslant n^{\alpha} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\pi-\frac{\pi}{2n}} |T_n|^p |\sin t|^{\alpha} dt \leqslant n^{\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^{\alpha} dt; \tag{1.8}$$

аналогично,

$$\int_{-\pi+\frac{\pi}{2n}}^{-\frac{\pi}{2n}} |T_n|^p dt \leqslant n^{\alpha} \int_{-\pi+\frac{\pi}{2n}}^{-\frac{\pi}{2n}} |T_n|^p |\sin t|^{\alpha} dt \leqslant n^{\alpha} \int_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^{\alpha} dt. \tag{1.9}$$

Далее, обозначая через Δ любой из интервалов $\left(-\pi, -\pi+\frac{\pi}{2n}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2n}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$ или $\left(\pi-\frac{\pi}{2n}, \pi\right)$, каждый из которых имеет длину $\frac{\pi}{2n}$, имеем

$$\int\limits_{\Delta} |T_n|^p\,dt \leqslant \mu^p \frac{\pi}{2n}, \tag{1.10}$$

где $\mu = \max\limits_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |T_n(t)|$. Но, по лемме 1,

$$\mu \leqslant A n^{\frac{\alpha+1}{p}} J_{\alpha p}^{\frac{1}{p}}, \tag{1.11}$$

где $J_{\alpha p}$ определено формулой (1.0). Поэтому из (1.10) и (1.11) находим:

$$\int\limits_{\Delta} |T_n|^p\,dt \leqslant A^p n^{1+\alpha} J_{\alpha p}\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} A^p n^\alpha \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^\alpha\,dt. \tag{1.12}$$

Но так как интеграл от $|T_n|^p$ по всему отрезку $[-\pi, \pi]$ получается от сложения двух интегралов, стоящих в левых частях формул (1.8) и (1.9), и четырех интегралов по интервалам, обозначенным нами через Δ, то из (1.8), (1.9) и (1.12) находим:

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p\,dt \leqslant (2n^\alpha + 2\pi A^p n^\alpha) \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^\alpha\,dt \leqslant$$

$$\leqslant C^p n^\alpha \int\limits_{-\pi}^{+\pi} |T_n|^p |\sin t|^\alpha\,dt,$$

если C выбрать так, чтобы $C^p \geqslant 2 + 2\pi A^p$, и лемма доказана.

§ 2. В качестве следствия лемм, доказанных в § 1, мы получим теорему, которая должна рассматриваться как перенос леммы С. Н. Бернштейна (см. введение, формула (0.3)) на пространства L^p.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого тригонометрического полинома порядка* $n-1$ *имеем*

$$\| T_{n-1} \|_{L^p(-\pi,\pi)} \leqslant Cn \| T_{n-1} \sin t \|_{L^p(-\pi,\pi)},$$

где C — абсолютная константа.

Действительно, если в лемме 2 положить $\alpha = p$ и извлечь из обеих частей полученного неравенства корень степени p, то мы получим утверждение теоремы 1.

§ 3. Перенесем на пространства L^p теорему И. И. Привалова [см. введение, формула (0.4)], а именно, докажем теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если $T_n(\theta)$ — тригонометрический полином порядка n и если для некоторого $[a, b]$, лежащего на $[-\pi, \pi]$, имеем*

$$\| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)} = M \quad (p \geqslant 1), \tag{3.1}$$

то для любого $[a', b']$, целиком лежащего внутри (a, b), найдется такая константа $C(a, a', b', b)$, что

$$\| T_n'(\theta) \|_{L^p(a',b')} \leqslant C(a, a', b', b)\, nM. \tag{3.2}$$

Мы рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного полиномов, а потом сведем общий случай к частным.

а) Пусть $\pi_n(u)$ — четный тригонометрический полином порядка n и $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$. Докажем, что

$$\| \pi_n'(u) \|_{L^p(\alpha', \beta')} \leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, n \, \| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha, \beta)}. \tag{3.3}$$

Пусть

$$\| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha, \beta)} = M. \tag{3.4}$$

Для каждого u на $[\alpha, \beta]$ из формулы

$$\cos u = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2}\cos t + \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} \tag{3.5}$$

найдем единственное число t на $[0, \pi]$, для которого (3.5) имеет место; в частности, при $t = 0$ имеем $u = \alpha$ и при $t = \pi$ имеем $u = \beta$. Пусть числам α' и β' отвечают значения t, равные соответственно h_1 и h_2, причем ясно, что $0 < h_1 < h_2 < \pi$, а потому

$$\sin t \geqslant \delta > 0 \text{ на } [h_1, h_2]. \tag{3.6}$$

Из (3.5) имеем

$$\sin u\, du = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2}\sin t\, dt, \tag{3.7}$$

а потому

$$\frac{dt}{du} \leqslant \frac{2}{\delta(\cos\alpha - \cos\beta)} \text{ на } [h_1, h_2]. \tag{3.8}$$

При замене переменного по формуле (3.5) получим

$$\pi_n(u) = Q_n(t), \tag{3.9}$$

где $Q_n(t)$ — четный тригонометрический полином порядка n, определенный на $[0, \pi]$.

Для доказательства неравенства (3.3) заметим, прежде всего, что, в силу (3.9) и (3.8),

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} | \pi_n'(u) |^p du = \int_{h_1}^{h_2} \left| Q_n'(t)\frac{dt}{du} \right|^p \frac{du}{dt}\, dt \leqslant \left[\frac{2}{\delta(\cos\alpha - \cos\beta)}\right]^{p-1} \int_{h_1}^{h_2} | Q_n' |^p dt. \tag{3.10}$$

Положим

$$\tau_{n+1}(t) = Q_n(t)\sin t. \tag{3.11}$$

Ясно, что $\tau_{n+1}(t)$ — нечетный тригонометрический полином порядка $n+1$. Так как $p \geqslant 1$, то в силу (3.11) и (3.4) имеем:

$$\int_0^{\pi} | \tau_{n+1}(t) |^p dt \leqslant \int_0^{\pi} | Q_n |^p \sin t\, dt =$$

$$= \frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta}\int_{\alpha}^{\beta} | \pi_n(u) |^p \sin u\, du \leqslant \frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta} M^p, \tag{3.12}$$

откуда, ввиду четности $| \tau_{n+1}(t) |$,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} | \tau_{n+1}(t) |^p dt \leqslant \frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} M^p \tag{3.13}$$

Отсюда, в силу теоремы 1 и (3.11),

$$\int_{-\pi}^{+\pi} | Q_n |^p dt \leqslant C^p (n+1)^p \frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} M^p, \tag{3.14}$$

где C — абсолютная константа, и, в силу четности $Q_n(t)$,

$$\int_0^{\pi} | Q_n |^p dt \leqslant C^p (n+1)^p \frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta} M^p. \tag{3.15}$$

Далее, по теореме Зигмунда (0.2), из (3.13) следует

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\tau'_{n+1}(t)|^p\,dt \leqslant \frac{4}{\cos\alpha-\cos\beta}(n+1)^p M^p,$$

откуда

$$\int_{0}^{\pi} |\tau'_{n+1}(t)|^p\,dt \leqslant \frac{2}{\cos\alpha-\cos\beta}(n+1)^p M^p. \tag{3.16}$$

Но

$$\tau'_{n+1}(t) = Q'_n(t)\sin t + Q_n\cos t,$$

поэтому

$$|Q'_n \sin t|^p \leqslant 2^p\left[|\tau'_{n+1}|^p + |Q_n|^p\right],$$

значит, на основании (3.6),

$$|Q'_n|^p \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^p\left[|\tau'_{n+1}|^p + Q_n|^p\right] \text{ для } h_1 \leqslant t \leqslant h_2.$$

Поэтому из (3.15) и (3.16) следует:

$$\int_{h_1}^{h_2} |Q'_n|^p\,dt \leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^p\left[\int_{h_1}^{h_2} |\tau'_{n+1}|^p\,dt + \int_{h_1}^{h_2} |Q_n|^p\,dt\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^p \frac{2}{\cos\alpha-\cos\beta} M^p (n+1)^p\left[C^p+1\right]. \tag{3.17}$$

Замечая, что $n \geqslant 1$ и соединяя (3.10) и (3.17), можно написать:

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} |\pi'_n(u)|^p\,du \leqslant B^p\left[\frac{1}{\delta^2(\cos\alpha-\cos\beta)}\right]^p n^p M^p, \tag{3.18}$$

если выбрать константу B так, чтобы $B^p > (C^p+1)\,2^{3p}$, что возможно, ибо C — абсолютная константа. Замечая, что δ зависит только от h_1 и h_2, т. е. только от α' и β', полагая

$$C(\alpha, \alpha', \beta', \beta) = B\frac{1}{\delta^2(\cos\alpha-\cos\beta)}$$

и извлекая корень степени p из обеих частей неравенства (3.18), мы найдем:

$$\|\pi'_n(u)\|_{L^p[\alpha', \beta']} \leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, nM,$$

т. е. формула (3.3) доказана.

б) Пусть теперь $\tau_n(u)$ — нечетный тригонометрический полином порядка n и $0<\alpha<\beta<\pi$ (в противоположность случаю а), неравенства $0<\alpha$ и $\beta<\pi$ здесь существенны, но это не отразится на окончательной теореме). Докажем, что

$$\|\tau'_n\|_{L^p(\alpha', \beta')} \leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, n\,\|\tau_n\|_{L^p(\alpha, \beta)}. \tag{3.19}$$

С этой целью заметим, что

$$\tau_n(u) = \sin u\ \pi_{n-1}(u), \tag{3.20}$$

где $\pi_{n-1}(u)$ — четный тригонометрический полином порядка $n-1$. Отсюда

$$\tau'_n(u) = \sin u\,\pi'_{n-1}(u) + \cos u\,\pi_{n-1}(u). \tag{3.21}$$

Так как мы предположили, что $0<\alpha<\beta<\pi$, то

$$\sin u \geqslant \omega > 0 \quad \text{на} \quad \alpha \leqslant u \leqslant \beta, \tag{3.22}$$

поэтому из (3.20) следует

$$\|\pi_{n-1}(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant \frac{1}{\omega}\|\tau_n(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)}. \tag{3.23}$$

На основании уже разобранного случая четных тригонометрических полиномов отсюда получаем

$$\|\pi'_{n-1}(u)\|_{L^p(\alpha',\beta')} \leqslant K(\alpha, \alpha', \beta', \beta)(n-1)\frac{1}{\omega}\|\tau_n\|_{L^p(\alpha,\beta)}, \tag{3.24}$$

где K зависит только от α, α', β', β. Тогда из (3.21), (3.23) и (3.24) получаем

$$\|\tau'_n(u)\|_{L^p(\alpha',\beta')} \leqslant \left[K(\alpha,\alpha',\beta',\beta)(n-1)\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\right]\|\tau_n\|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha,\alpha',\beta',\beta)\,n\|\tau_n\|_{L^p(\alpha,\beta)},$$

так как ω зависит только от α и β, и неравенство (3.19) доказано.

в) Пусть теперь $T_n(\theta)$ — произвольный тригонометрический полином порядка n и $[a, b]$ — любой отрезок на $[-\pi, \pi]$. Пусть $[a', b']$ — любой отрезок, целиком лежащий внутри (a, b). Положим $\varepsilon = \min(a'-a,\ b-b')$ и разобьем отрезок $[a', b']$ на k равных частей, где k выберем так, чтобы

$$\eta = \frac{b'-a'}{k} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.25}$$

Докажем сначала, что если (θ_i, θ_{i+1}) $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ есть один из отрезков длины η, которые получились после разбиения (a', b') на k частей $(\theta_0 = a',\ \theta_k = b')$, то

$$\|T'_n(\theta)\|_{L^p(\theta_i,\theta_{i+1})} \leqslant A(\eta)\,n\|T_n(\theta)\|_{L^p(a,b)}, \tag{3.26}$$

где $A(\eta)$ — константа, зависящая только от η. Чтобы убедиться в этом, возьмем любое θ', $a'-\eta \leqslant \theta' \leqslant b'$, и заметим, что $\theta' \pm 3\eta$ содержится в (a, b) [в силу (3.25)], а потому, полагая для краткости $\|T_n(\theta)\|_{L^p(a,b)} = M$, имеем:

$$\|T_n(\theta)\|_{L^p(\theta'-3\eta,\theta')} \leqslant M \quad \text{и} \quad \|T_n(\theta)\|_{L^p(\theta',\theta'+3\eta)} \leqslant M,$$

т. е.

$$\int_{\theta'-3\eta}^{\theta'} |T_n(\theta)|^p\,d\theta \leqslant M^p \quad \text{и} \quad \int_{\theta}^{\theta'+3\eta} |T_n(\theta)|^p\,d\theta \leqslant M^p.$$

Полагая $\theta = \theta' - u$ в первом и $\theta = \theta' + u$ во втором интеграле, находим

$$\int_0^{3\eta} |T_n(\theta'+u)|^p\,du \leqslant M^p \quad \text{и} \quad \int_0^{3\eta} |T_n(\theta'-u)|^p\,du \leqslant M^p,$$

т. е.

$$\|T_n(\theta'+u)\|_{L^p(0,3\eta)} \leqslant M \quad \text{и} \quad \|T_n(\theta'-u)\|_{L^p(0,3\eta)} \leqslant M. \tag{3.27}$$

Полагая

$$\pi_n(u) = \frac{T_n(\theta'+u)+T_n(\theta'-u)}{2}, \quad \tau_n(u) = \frac{T_n(\theta'+u)-T_n(\theta'-u)}{2}, \tag{3.28}$$

мы видим, что $\pi_n(u)$ — четный, а $\tau_n(u)$ — нечетный тригонометрический полином порядка n, причем из (3.27) и (3.28) следует:

$$\|\pi_n(u)\|_{L^p(0,3\eta)} \leqslant M \text{ и } \|\tau_n(u)\|_{L^p(0,3\eta)} \leqslant M.$$

Если мы применим уже полученные результаты для четных и нечетных полиномов, принимая в формулах (3.3) и (3.19) за (α, β), например, интервал $\left(\frac{\eta}{2}, 3\eta\right)$, а за (α', β') — интервал $(\eta, 2\eta)$, то получим:

$$\|\pi_n'(u)\|_{L^p_{(\eta, 2\eta)}} \leqslant C(\eta)\, nM \text{ и } \|\tau_n'(u)\|_{L^p_{(\eta, 2\eta)}} \leqslant C(\eta)\, nM, \tag{3.29}$$

где $C(\eta)$ зависит только от η. Но из (3.28) находим

$$T_n(\theta' + u) = \pi_n(u) + \tau_n(u),$$

поэтому

$$T_n'(\theta' + u) = \pi_n'(u) + \tau_n'(u)$$

и, значит, из (3.29) следует $\|T_n'(\theta' + u)\|_{L^p(\eta, 2\eta)} \leqslant 2C(\eta)\, nM$, т. е.

$$\int_{\eta}^{2\eta} |T_n'(\theta' + u)|^p\, du \leqslant [2C(\eta)]^p n^p M^p \text{ или } \int_{\theta'+\eta}^{\theta'+2\eta} |T_n'(\theta)|^p\, d\theta \leqslant [2C(\eta)]^p n^p M^p.$$

Таким образом,

$$\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(\theta'+\eta,\, \theta'+2\eta)}} \leqslant [2C(\eta)]\, nM. \tag{3.30}$$

Пусть θ' принимает любое из значений $\theta_i - \eta$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$; тогда условие $a' - \eta \leqslant \theta' \leqslant b'$ удовлетворено, и мы получаем из (3.30)

$$\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(\theta_i,\, \theta_i+\eta)}} = \|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(\theta_i,\, \theta_{i+1})}} \leqslant 2\,[C(\eta)]\, nM,$$

а это и есть неравенство (3.26). Складывая все неравенства (3.26) при $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, находим $\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(a', b')}} \leqslant kA(\eta)\, nM$. Но так как k и η зависят только от a, b, a' и b', то $\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(a'; b)}} \leqslant C(a, a', b', b)\, nM$ и, вспоминая определение M, получаем:

$$\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(a', b')}} \leqslant C(a, a', b', b)\, n\, \|T_n(\theta)\|_{L^p_{(a, b)}},$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Если $T_n(\theta)$ — тригонометрический полином порядка n и (a, b) — любой интервал, то для $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ имеем*

$$\|T_n'(\theta)\|_{L^p_{(a, b)}} \leqslant C(a, b)\, n^2\, \|T_n(\theta)\|_{L^p_{(a, b)}}. \tag{4.1}$$

Это — неравенство, аналогичное неравенству А. А. Маркова, но для тригонометрических полиномов и в L^p.

Как и при переносе на L^p теоремы И. И. Привалова, рассмотрим три случая:

а) допустим, что $\pi_n(u)$ — четный тригонометрический полином порядка n и $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$. Докажем, что

$$\|\pi_n'(u)\|_{L^p_{(\alpha, \beta)}} \leqslant K(\alpha, \beta)\, n^2\, \|\pi_n(u)\|_{L^p_{(\alpha, \beta)}}. \tag{4.2}$$

Пусть снова (как в § 3)

$$\cos u = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2}\cos t + \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\pi_n(u)|^p \sin u\, du = \frac{\cos\alpha - \cos\beta}{2}\int_0^{\pi} |Q_n(t)|^p \sin t\, dt, \tag{4.4}$$

где через $Q_n(t)$ обозначен тот тригонометрический полином, в который превращается $\pi_n(u)$, когда мы совершаем замену переменного по формуле (4.3). Рассуждая, как в § 3 при доказательстве (3.10), находим:

$$\int_\alpha^\beta |\pi_n'(u)|^p du \leqslant \left(\frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta}\right)^{p-1} \int_0^\pi \left|\frac{Q_n'(t)}{\sin t}\right|^p \sin t\, dt. \tag{4.5}$$

Докажем неравенство

$$\int_0^\pi \left|\frac{Q_n'}{\sin t}\right|^p \sin t\, dt \leqslant B^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n(t)|^p \sin t\, dt, \tag{4.6}$$

где B — абсолютная константа.

Пусть сначала $p=1$; тогда наше неравенство справедливо, так как в силу четности $Q_n(t)$ и теоремы Зигмунда при $p=1$

$$\int_0^\pi |Q_n'|\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q_n'|\, dt \leqslant \frac{n}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q_n(t)|\, dt, \tag{4.7}$$

а на основании теоремы 1, примененной к случаю $p=1$, находим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |Q_n(t) dt \leqslant C(n+1)\int_{-\pi}^{+\pi} |Q_n(t)\sin t|\, dt \leqslant 4Cn \int_0^\pi |Q_n| \sin t\, dt. \tag{4.8}$$

Соединяя (4.7) и (4.8), мы видим, что при $p=1$ неравенство (4.6) доказано.

Для случая $p>1$ применим неравенство Гельдера. Имеем:

$$\int_0^\pi \left|\frac{Q_n}{\sin t}\right|^p \sin t\, dt = \int_0^\pi \left|\frac{Q_n'}{\sin t}\right|^{p-1} |Q_n'|\, dt \leqslant \left\{\int_0^\pi \left|\frac{Q_n'}{\sin t}\right|^p dt\right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{\int_0^\pi |Q_n'|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.9}$$

Так как $\dfrac{Q_n'(t)}{\sin t} = \psi_{n-2}(t)$ — четный тригонометрический полином порядка $n-2$, то, применяя к нему теорему 1, находим:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\psi_{n-2}|^p dt \leqslant C^p (n-1)^p \int_{-\pi}^{+\pi} |\psi_{n-2}\sin t|^p dt,$$

откуда

$$\int_0^\pi |\psi_{n-2}|^p dt \leqslant C^p (n-1)^p \int_0^\pi |\psi_{n-2}\sin t|^p dt$$

или

$$\int_0^\pi \left|\frac{Q_n'(t)}{\sin t}\right|^p dt \leqslant C^p (n-1)^p \int_0^\pi |Q_n'(t)|^p dt. \tag{4.10}$$

Но, в силу неравенства Зигмунда (и снова учитывая четность),

$$\int_0^\pi |Q_n'(t)|^p dt \leqslant n^p \int_0^\pi |Q_n(t)|^p dt. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и (4.11) находим

$$\int_0^\pi \left|\frac{Q_n'(t)}{\sin t}\right|^p dt \leqslant C^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n|^p dt. \tag{4.12}$$

Из (4.9), (4.11) и (4.12) получаем:

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q_n'(t)}{\sin t} \right|^p \sin t\, dt \leqslant \left\{ C^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n|^p dt \right\}^{\frac{p-1}{p}} \left\{ n^p \int_0^\pi |Q_n|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C^{p-1} n^{2p-1} \left\{ \int_0^\pi |Q_n|^p dt \right\}. \tag{4.13}$$

Но на основании леммы 2 при $\alpha = 1$ и в силу четности $Q_n(t)$.

$$\int_0^\pi |Q_n|^p dt \leqslant A^p n \int_0^\pi |Q_n|^p \sin t\, dt. \tag{4.14}$$

Поэтому из (4.13) и (4.14) следует:

$$\int_0^\pi \left| \frac{Q_n'(t)}{\sin t} \right|^p \sin t\, dt \leqslant C^{p-1} A^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n|^p \sin t\, dt \leqslant B^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n|^p \sin t\, dt, \tag{4.15}$$

а это и есть неравенство, которое мы хотели получить. Теперь из (4.4), (4.5) и (4.15) находим

$$\int_\alpha^\beta |\pi_n'(u)|^p du \leqslant \left(\frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta} \right)^{p-1} B^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n(t)|^p \sin t\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2}{\cos\alpha - \cos\beta} \right)^p B^p n^{2p} \int_\alpha^\beta |\pi_n(u)|^p \sin u\, du \leqslant [K(\alpha, \beta)]^p n^{2p} \int_\alpha^\beta |\pi_n(u)|^p du,$$

откуда

$$\| \pi_n'(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant K(\alpha, \beta) n^2 \| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)}, \tag{4.16}$$

что и требовалось доказать.

б) Пусть $\tau_n(u)$ — нечетный тригонометрический полином порядка n и $0 < \alpha < \beta < \pi$; докажем, что

$$\| \tau_n'(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant K(\alpha, \beta) n^2 \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)}. \tag{4.17}$$

Имеем:

$$\tau_n(u) = \sin u\, \pi_{n-1}(u), \tag{4.18}$$

где $\pi_{n-1}(u)$ — четный тригонометрический полином порядка $n-1$. Отсюда

$$\tau_n'(u) = \sin u\, \pi_{n-1}'(u) + \cos u\, \pi_{n-1}(u). \tag{4.19}$$

Так как $0 < \alpha < \beta < \pi$, то $\sin u \geqslant \omega > 0$ на (α, β), а потому из (4.18) следует:

$$\| \pi_{n-1}(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant \frac{1}{\omega} \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)}. \tag{4.20}$$

Так как случай четного полинома был уже нами разобран, то из (4.20) выводим:

$$\| \pi_{n-1}'(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant C(\alpha, \beta)(n-1)^2 \frac{1}{\omega} \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)}. \tag{4.21}$$

Из (4.19), (4.20) и (4.21) получаем:

$$\| \tau_n'(u) \| \leqslant \frac{1}{\omega} [C(\alpha, \beta)(n-1)^2 + 1] \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant$$

$$\leqslant K(\alpha, \beta) n^2 \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)},$$

где K зависит только от α и β, так как C и ω обладают этим свойством.

в) Пусть, наконец, $T_n(\theta)$ — произвольный тригонометрический полином порядка n и пусть (a, b) — произвольный отрезок, на котором он задан. Разделим $[a, b]$ на четыре равные части* точками C_1, C_2, C_3 и пусть A и B — середины отрезков $[C_1, C_2]$ и $[C_2, C_3]$. Положим

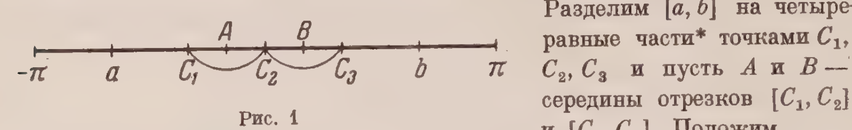


Рис. 1

$$\pi_n(u) = \frac{T_n(A+u) + T_n(A-u)}{2} \quad \text{и} \quad \tau_n(u) = \frac{T_n(A+u) - T_n(A-u)}{2}.$$

Ясно, что $\pi_n(u)$ и $\tau_n(u)$ — соответственно четный и нечетный тригонометрические полиномы порядка n, причем если $\frac{1}{8}(b-a) \leqslant u \leqslant \frac{3}{8}(b-a)$, то $A-u$ пробегает отрезок (a, C_1), а $A+u$ — отрезок (C_2, C_3); значит, полагая для краткости $\alpha = \frac{b-a}{8}$, $\beta = \frac{3}{8}(b-a)$, имеем:

$$\| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)} \quad \text{и} \quad \| \tau_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)}.$$

Принимая во внимание уже доказанное в пунктах а) и б), получаем отсюда

$$\| \pi'_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant C(\alpha, \beta) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)}$$

и

$$\| \tau'_n(u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant C(\alpha, \beta) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)}.$$

Но так как

$$T_n(A+u) = \pi_n(u) + \tau_n(u), \quad T_n(A-u) = \pi_n(u) - \tau_n(u),$$

а значит,

$$T'_n(A+u) = \pi'_n(u) + \tau'_n(u), \quad T'_n(A-u) = -\pi'_n(u) + \tau'_n(u),$$

то

$$\| T'_n(A+u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant 2C(\alpha, \beta) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)}$$

и совершенно так же

$$\| T'_n(A-u) \|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant 2C(\alpha,\beta) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)};$$

иначе говоря,

$$\| T'_n(\theta) \|_{L^p(a,C_1)} \leqslant 2C(\alpha,\beta) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)}$$

и совершенно так же для (C_2, C_3).

Заметим, что α и β зависят только от a и b, поэтому можно написать:

$$\| T'_n(\theta) \|_{L^p(\Delta)} \leqslant K(a, b) n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)},$$

где Δ — любой из отрезков $[a, C_1]$ или $[C_2, C_3]$. Но если положить

$$\pi^*_n(u) = \frac{T_n(B+u) + T_n(B-u)}{2} \quad \text{и} \quad \tau^*_n(u) = \frac{T_n(B+u) - T_n(B-u)}{2},$$

* Здесь я пользуюсь тем же методом, которым пользовался Джексон (7), когда доказывал для тригонометрических полиномов в пространстве C неравенство А. А. Маркова. Употреблявшийся мною до того, как я нашла указанную работу Джексона, метод был тот же, как для переноса теоремы И. И. Привалова на L^p и требовал несколько более длинных рассуждений. Из теоремы 3 случай пространства C получается при $p = +\infty$.

то теми же рассуждениями можно доказать, что предыдущее неравенство будет справедливо и в том случае, когда роль Δ играет $[C_1, C_2]$ или $[C_3, b]$. Отсюда, складывая все четыре полученных неравенства и заменяя $4K(a, b)$ новой константой $C(a, b)$, найдем:

$$\| T'_n(\theta) \|_{L^p(a,b)} \leqslant C(a, b)\, n^2 \| T_n(\theta) \|_{L^p(a,b)},$$

и теорема доказана.

§ 5. Из неравенства А. А. Маркова для тригонометрических полиномов в пространстве $L^p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ сразу получается справедливость неравенства А. А. Маркова для многочленов в $L^p(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$.

В самом деле, имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Если $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, то*

$$\| P'_n(x) \|_{L^p(a,b)} \leqslant Cn^2 \| P_n(x) \|_{L^p(a,b)},$$

где C — константа, зависящая только от a и b.

Пусть $0 < \alpha < \beta < \pi$, в остальном α и β произвольны. Для простоты выкладок предположим, что $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и $\beta = 2\frac{\pi}{3}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = -\frac{1}{2}$. Пусть

$$x = (b - a)\cos u + \frac{a + b}{2}.$$

Тогда при $u = \alpha$ имеем $x = b$, при $u = \beta$ имеем $x = a$; далее,

$$P_n(x) = \pi_n(x),$$

где $\pi_n(u)$ — четный тригонометрический полином порядка n. Имеем:

$$\int_a^b |P_n(x)|^p\, dx = (b - a) \int_\alpha^\beta |\pi_n(u)|^p \sin u\, du.$$

Так как на $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ имеем $\sin u \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$\int_\alpha^\beta |\pi_n(u)|^p\, du \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}(b - a)} \int_a^b |P_n(x)|^p\, dx.$$

Согласно неравенству А. А. Маркова для тригонометрических полиномов в L^p, отсюда следует:

$$\int_\alpha^\beta |\pi'_n(u)|^p\, du \leqslant C^p n^{2p} \frac{2}{\sqrt{3}(b - a)} \int_a^b |P_n(x)|^p\, dx, \tag{5.1}$$

где C зависит только от α и β, а поскольку они фиксированы, то C — абсолютная константа.

Далее, из (5.1) находим:

$$\int_a^b |P'_n(x)|^p\, dx = \int_\alpha^\beta |\pi'_n(u)|^p \left|\frac{du}{dx}\right|^{p-1} du =$$

$$= \int_\alpha^\beta |\pi'_n(u)| \left|\frac{1}{(b - a)\sin u}\right|^{p-1} du \leqslant \frac{1}{(b - a)^{p-1}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{p-1} \int_\alpha^\beta |\pi'_n(u)|^p\, du \leqslant$$

$$\leqslant C^p n^{2p} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^p \left(\frac{1}{(b - a)}\right)^p \int_a^b |P_n(x)|^p\, dx. \tag{5.2}$$

Полагая

$$K=\frac{2C}{\sqrt{3}}\frac{1}{b-a}$$

и извлекая корень степени p из обеих частей (5.2), получаем

$$\| P'_n(x) \|_{L^p(a,b)} \leqslant K(a,b)\, n^2 \| P_n(x) \|_{L^p(a,b)}.$$

Здесь K зависит только от a и b (точнее, только от длины $b-a$, как и в классическом неравенстве А. А. Маркова для пространства C).

Заметим, что перенос неравенства А. А. Маркова на пространство L^p для специального случая $p=2$ был сделан Е. Шмидтом ([12]), но его метод, основанный на приведении квадратичных форм к каноническому виду, не может быть применен к случаю $p \neq 2$.*

§ 6. Пользуясь неравенством А. А. Маркова для тригонометрических полиномов в пространстве C, мы можем получить для отрезка $[a, b]$ неравенство, аналогичное неравенству С. М. Никольского ([10]), доказанному им для отрезка $[-\pi, \pi]$ [см. (0.8)].

ТЕОРЕМА 5. *Если T_n — тригонометрический полином порядка n и $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, то*

$$\| T_n \|_{L^q(a,b)} \leqslant K(a,b)\, n^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \| T_n \|_{L^p(a,b)}. \tag{6.1}$$

Для доказательства этого предложения мы воспользуемся леммой Джексона ([7]):

если $\| T_n \|_{L^p(a,b)} = M$, *то* $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} | T_n(x) | \leqslant K n^{\frac{2}{p}} M$,

где K — константа, зависящая только от a и b. Другими словами, для случая $q=+\infty$ и любого $p \geqslant 1$ теорема 5 сводится к этой лемме.

С. Б. Стечкин сообщил мне свое доказательство неравенства С. М. Никольского, построенное на том, что если это неравенство доказано для любого $p \geqslant 1$ и для $q=+\infty$, то элементарными выкладками можно получить его в общем виде. Таким же методом из леммы Джексона выведем теорему 5. Имеем:

$$\int_a^b |T_n|^q\,dx = \int_a^b |T_n|^p |T_n|^{q-p}\,dx \leqslant \{\max_{a\leqslant x\leqslant b} |T_n|\}^{q-p} \int_a^b |T_n|^p\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \{K(a,b)\, n^{\frac{2}{p}} \| T_n \|_{L^p(a,b)}\}^{q-p} \{ \| T_n \|_{L^p(a,b)} \}^p \leqslant$$
$$\leqslant [K(a,b)]^{q-p}\, n^{\frac{2}{p}(q-p)} \| T_n \|^q_{L^p(a,b)}. \tag{6.2}$$

Извлекая из обеих частей этого неравенства корень степени q и замечая, что $1-\frac{p}{q}<1$, найдем

$$\| T_n \|_{L^q(a,b)} \leqslant K(a,b)\, n^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \| T_n \|_{L^p(a,b)},$$

что и требовалось доказать.

---

* В опубликованной в Реферативном журнале № 3, 1953, рецензии на мою заметку ([13]) С. М. Лозинский указал, что неравенство А. А. Маркова для алгебраических многочленов было известно (Szegö — Hille — Tamarkin, Duke Math. J., 3 (1937), 729—739). Прочитав эту статью, я хочу отметить, что метод доказательства, примененный ее авторами, не имеет ничего общего с моим.

Лемма Джексона, на которую мы здесь опирались, основана на применении неравенства А. А. Маркова в пространстве C. Если же пользоваться рассуждениями, аналогичными тем, которые позволили нам доказать неравенство И. И. Привалова, то можно получить такую теорему:

ТЕОРЕМА 6. *Если* $T_n(x)$ — *тригонометрический полином порядка* n *и* $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$, *то для любого* $[a', b']$, *целиком лежащего внутри* (a, b), *найдем*:

$$\| T_n \|_{L^q(a',b')} \leqslant C(a, a', b', b)\, n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \| T_n \|_{L^p(a,b)}. \tag{6.3}$$

Для доказательства заметим, что здесь, как и в случае теоремы 5, достаточно убедиться в справедливости неравенства (6.3) при любом p и при $q = +\infty$. Действительно, если мы докажем, что

$$\max_{[a',b']} |T_n| \leqslant C(a, a', b', b)\, n^{\frac{1}{p}} \| T_n \|_{L^p(a,b)}, \tag{6.4}$$

то, в точности повторяя выкладки, проделанные для получения неравенства (6.2), и замечая, что

$$\int_{a'}^{b'} |T_n|^p\, dx \leqslant \int_a^b |T_n|^p\, dx,$$

мы получим (6.3). Итак, все сводится к доказательству неравенства (6.4).

При доказательстве этого неравенства мы будем поступать совершенно так же, как при доказательстве теоремы 2. Мы начнем со случая четного тригонометрического полинома $\pi_n(u)$, заданного на $[\alpha, \beta]$, где $0 \leqslant \alpha < < \beta \leqslant \pi$. Сохраняя все обозначения § 3, мы видим, что

$$\max_{\alpha' \leqslant u \leqslant \beta'} |\pi_n(u)| = \max_{h_1 \leqslant t \leqslant h_2} |Q_n(t)| \leqslant \frac{1}{\delta} \max_{h_1 \leqslant t \leqslant h_2} |\tau_{n+1}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta} \max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |\tau_{n+1}(t)|. \tag{6.5}$$

Но, по следствию леммы 1, имеем:

$$\max_{-\pi \leqslant t \leqslant \pi} |\tau_{n+1}(t)| \leqslant C(n+1)^{\frac{1}{p}} \| \tau_{n+1}(t) \|_{L^p(-\pi, \pi)}. \tag{6.6}$$

Далее,

$$\| \tau_{n+1}(t) \|^p_{L^p(-\pi, \pi)} = 2\int_0^\pi |\tau_{n+1}|^p\, dt = 2\int_0^\pi |Q_n|^p |\sin t|^p\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\pi |Q_n|^p \sin t\, dt = \frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} \int_\alpha^\beta |\pi_n(u)|^p \sin u\, du \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} \| \pi_n(u) \|^p_{L^p(\alpha, \beta)},$$

значит,

$$\| \tau_{n+1}(t) \|_{L^p(-\pi, \pi)} \leqslant \left(\frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} \right)^{\frac{1}{p}} \| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha, \beta)}, \tag{6.7}$$

и окончательно из (6.5), (6.6) и (6.7) получаем:

$$\max_{\alpha' \leqslant u \leqslant \beta'} |\pi_n(u)| \leqslant \frac{1}{\delta} C \cdot 2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \left(\frac{4}{\cos\alpha - \cos\beta} \right)^{\frac{1}{p}} \| \pi_n(u) \|_{L^p(\alpha, \beta)},$$

т. е.

$$\max_{\alpha'\leqslant u\leqslant\beta'} |\pi_n(u)| \leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, n^{\frac{1}{p}} \|\pi_n(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)},$$

так как δ зависит лишь от α' и β'.

Итак, для случая четного полинома на $[\alpha, \beta]$, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$, неравенство (6.4) установлено.

Переходим к случаю нечетного полинома. Пусть $\tau_n(u)$ задан на $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < \pi$. Полагая $\tau_n(u) = \sin u\, \pi_{n-1}(u)$, мы видим, что $\max\limits_{\alpha'\leqslant u\leqslant\beta'} |\tau_n(u)| \leqslant \max\limits_{\alpha'\leqslant u\leqslant\beta'} |\pi_{n-1}(u)|$, и по уже разобранному случаю

$$\max_{\alpha'\leqslant u\leqslant\beta'} |\pi_{n-1}(u)| \leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)(n-1)^{\frac{1}{p}} \|\pi_{n-0}(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)} \leqslant$$
$$\leqslant C(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, n^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\omega} \|\tau_n(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)},$$

где $\omega = \min\limits_{\alpha\leqslant u\leqslant\beta} |\sin u|$. Отсюда

$$\max_{\alpha\leqslant u\leqslant\beta} |\tau_n(u)| \leqslant A(\alpha, \alpha', \beta', \beta)\, n^{\frac{1}{p}} \|\tau_n(u)\|_{L^p(\alpha,\beta)}.$$

Наконец, случай произвольного полинома $T_n(\theta)$, заданного на любом отрезке $a \leqslant \theta \leqslant b$, сводится к двум предыдущим в точности так, как это сделано в теореме 2; надо только доказать, что на каждом из кусочков (θ_i, θ_{i+1}) $(i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$

$$\max |T_n(\theta)| \leqslant A(\eta)\, n^{\frac{1}{p}} \|T_n\|_{L^p(a,b)},$$

где A зависит только от η (а это можно сделать, опираясь на уже доказанные случаи и пользуясь теми же формулами, что в § 3). Ясно тогда, что

$$\max_{a'\leqslant\theta\leqslant b'} |T_n(\theta)| \leqslant A(\eta)\, n^{\frac{1}{p}} \|T_n\|_{L^p(a,b)},$$

а так как η зависит только от a, a', b' и b, то неравенство (6.4) полностью доказано.

§ 7. Оставляя открытым вопрос о величине констант, входящих в доказанные нами неравенства, поставим себе целью показать для них точность оценки порядков. Начнем с оценки в лемме 1.

Пусть

$$Q_n(t) = \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4. \tag{7.1}$$

Ясно, что $\max\limits_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |Q_n(t)| = n^4$. С другой стороны, $Q_n(t)$ — тригонометрический полином порядка $4n-4$, а потому из леммы 1 мы должны получить при $\alpha \leqslant p$

$$n^4 = \max_{-\pi\leqslant t\leqslant\pi} |Q_n(t)| \leqslant A(4n-4)^{\frac{1+\alpha}{p}} I^{\frac{1}{p}}, \tag{7.2}$$

где

$$I = \int_{-\pi}^{+\pi} |Q_n(t)|^p |\sin t|^\alpha dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{4p} |\sin t|^\alpha dt. \tag{7.3}$$

Если мы убедимся, что $I \sim n^{4p-1-\alpha}$, то правая часть (7.2) имеет порядок $n^{\frac{1+\alpha}{p}} n^{4-\frac{1+\alpha}{n}} = n^4$, а левая равна n^4, т. е. оценка порядка точна*.

Чтобы оценить порядок I, заметим, что

$$I = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{4p} (\sin t)^{\alpha} \, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{4p} (\sin t)^{\alpha} \, dt,$$

так как подинтегральное выражение имеет период π. Но так как $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant 1$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, то порядок I тот же, что порядок I', где

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin nt)^{4p} \frac{dt}{t^{4p-\alpha}} = n^{4p-1-\alpha} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (\sin u)^{4p} \frac{du}{u^{4p-\alpha}}.$$

Наконец,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{4p}}{u^{4p-\alpha}} du \leqslant \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{4p}}{u^{4p-\alpha}} du < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin u)^{4p}}{u^{4p-\alpha}} du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{du}{u^{4p-\alpha}}.$$

Но $\alpha \leqslant p$, откуда ясно, что интегралы слева и справа конечны (и не равны нулю), а тогда

$$I' \sim n^{4p-1-\alpha},$$

а значит, и

$$I \sim n^{4p-1-\alpha}, \tag{7.4}$$

т. е. точность оценки порядка в лемме 1 доказана.

Тот же пример годится для доказательства точности оценки порядка в лемме 2. На основании этой леммы мы можем утверждать, что

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{(\sin nt)}{\sin t}\right)^{4p} dt \leqslant C^{4p} n^{\alpha} I, \tag{7.5}$$

где I определено формулой (7.3). На основании (7.4), правая часть формулы (7.5) имеет порядок n^{4p-1}. Покажем, что и левая имеет тот же порядок. Действительно,

$$J = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^{4p} dt \sim \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{4p} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{4p} dt + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{4p} dt = J_1 + J_2.$$

Но

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left(\frac{\sin nt}{t}\right)^{4p} dt = n^{4p-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin u}{u}\right)^{4p} du \sim n^{4p-1} \quad \text{и} \quad J_2 < \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{4p}} < An^{4p-1},$$

где A постоянно, значит, действительно $J \sim n^{4p-1}$. Теми же приемами оценки, полагая снова $T_n(t) = \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4$, убеждаемся в справедливости

* Мы будем писать $f(n) \backsim \varphi(n)$, если существуют две положительные константы A и B, для которых

$$A \leqslant \frac{f(n)}{\varphi(n)} \leqslant B \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

оценки в теореме 1 (оба выражения в левой и правой частях имеют порядок n^{4p-1}).

Для доказательства точности оценки в неравенстве А. А. Маркова можно положить

$$Q_n(t) = \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4$$

и обозначить через $\pi_n(u)$ полином, в который превращается $Q_n(t)$ при подстановке (4.3); при этом α и β выберем так, чтобы $0 < \alpha < \beta < \pi$; тогда $\sin u \geqslant \omega > 0$ на $[\alpha, \beta]$.

В этом случае вопрос сведется к доказательству точности оценки

$$\int_0^\pi \left|\frac{Q_n'(t)}{\sin t}\right|^p \sin t\,dt \leqslant B^p n^{2p} \int_0^\pi |Q_n|^p \sin t\,dt, \qquad (7.6)$$

где B — абсолютная константа. Опуская выкладки, укажем, что при выбранном нами $Q_n(t)$ выражения в правой и левой частях (7.6) оба имеют порядок n^{6p-2}.

Для того же полинома доказывается и точность оценки в неравенстве С. М. Никольского.

Поступило
22. VI. 1953

ЛИТЕРАТУРА

1 ернштейн, С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. Мат. о-ва, сер. 2, т. 13 (1912), 49—194.

2 Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Собр. соч., т. 1 (1952), 11—104.

3 Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, М. — Л., ОНТИ, 1937.

4 Jackson D., A generalized problem in weighted approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 26 (1924), 133—154.

5 Jackson D., On the application of Markoff's theorem to problems of approximation in the complex domain, Bull. Amer. Math. Soc., v. 37 (1931), 883—890.

6 Jackson D., Certain problems of closest approximation, Bull. Amer. Math. Soc., v. 39 (1933), 889—906.

7 Jackson D., Bernstein's theorem and trigonometric approximation, Trans. Amer. Math. Soc., v. 40 (1936), 225—251.

8 Zygmund A., A remark on conjugate series, Proc. Lond. Math. Soc., 34 (1952), 392—400.

9 Марков А. А., Об одном вопросе Д. И. Менделеева, СПб, Изв. АН, 62 (1889), 1—24.

10 Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Мат. инст. им В. А. Стеклова, т. XXXVIII (1951), 244—278.

11 Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Саратов, 1919.

12 Schmidt E., Über die nebst ihren Ableitungen orthogonalen Polynomsysteme und das zugehörige Extremum, Math. Ann., 119 (1944), 165—209.

13 Бари Н. К., Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова, Доклады Ак. наук СССР, т. 90, № 5 (1953), 701—702.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 177—184

М. Е. ГАГУА

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА *

(*Представлено академиком* **Н. И. Мусхелишвили**)

В работе даются некоторые обобщения одной теоремы И. И. Векуа (1), касающейся равномерной аппроксимации в замкнутых областях решений дифференциальных уравнений эллиптического типа.

§ 1. Некоторые вспомогательные формулы и предложения **

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$\Delta u + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = 0, \tag{E$_0$}$$

где Δ — оператор Лапласа, а $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ — заданные целые функции от действительных аргументов x, y, вообще говоря, комплексно-значные.

Если коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $c(x, y)$ аналитически продолжить для комплексных значений x, y и ввести новые переменные

$$z = x + iy, \quad \zeta = x - iy,$$

то уравнение (E_0) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \zeta} + A(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial z} + B(z, \zeta)\frac{\partial u}{\partial \zeta} + C(z, \zeta)u = 0, \tag{F$_0$}$$

где A, B и C являются, очевидно, целыми функциями переменных z, ζ.

Пусть T — некоторая конечная односвязная область с границей L. Зеркальное отображение области T относительно действительной оси обозначим через $\overline{T}$, а ее границу — через $\overline{L}$. Для замыкания областей T и $\overline{T}$ будем пользоваться соответственно обозначениями $T + L$ и $\overline{T} + \overline{L}$.

Не ограничивая общности, будем в дальнейшем предполагать, что начало координат, $z = 0$, принадлежит области T и что выполняется следующее условие:

$$A(0, \zeta) = 0, \quad B(z, 0).$$

---

* Эта работа выполнена в Тбилисском математическом институте по тематическому плану 1949 года под непосредственным руководством И. Н. Векуа.

** Формулы и предложения данного параграфа принадлежат И. Н. Векуа [см. (1), гл. I—III].

В этом случае всякое регулярное решение уравнения (E_0) в области T дается формулой:

$$u(x, y) = G(z, 0, z, \bar{z})\,\varphi(z) - \int_0^z \varphi(t)\,\frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z})\,dt +$$

$$+ G(0, \bar{z}, z, \bar{z})\,\varphi^*(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} \varphi^*(\tau)\,\frac{\partial}{\partial t} G(0, \tau, z\,\bar{z})\,d\tau, \qquad (1.1)$$

где $z = x + iy \in T$, $\bar{z} = x - iy \in \bar{T}$, $G(t, \tau, z, \zeta)$ — функция Римана уравнения (E_0), которая в нашем случае является целой функцией комплексных аргументов t, τ, z и ζ, а $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ — аналитические функции соответственно в областях T и $\bar{T}$, определяемые следующим образом:

$$\varphi(z) = U(z, 0) - \frac{1}{2}\,U(0, 0)\,G(0, 0, z, 0), \quad z = x + iy \in T, \qquad (1.2)$$

$$\varphi^*(\zeta) = U(0, \zeta) - \frac{1}{2}\,U(0, 0)\,G(0, 0, 0, \zeta), \quad \zeta = x - iy \in \bar{T}, \qquad (1.3)$$

где $U(z, \zeta) = u\left(\frac{z+\zeta}{2}, \frac{z-\zeta}{2i}\right)$ обозначает аналитическое продолжение решения $u(x, y)$ относительно переменных z и ζ. Обратно, при произвольных аналитических, соответственно в областях T и $\bar{T}$, функциях $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$ формула (1.1) дает регулярное решение уравнения (E_0) в области T.

Если a, b и c — целые действительные функции действительных переменных x и y, а $u(x, y)$ — действительное регулярное решение в области T, то в этом случае формула (1.1) принимает вид:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})\,\Phi_0(z) - \int_0^z \Phi_0(t)\,\frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z})\,dt\right], \qquad (1.4)$$

где

$$\Phi_0(z) = 2U(z, 0) - U(0, 0)\,G(0, 0, z, 0). \qquad (1.5)$$

Пусть T — область класса Ah, т. е. такая, что ее граница L — гладкая в смысле Ляпунова кривая, и пусть $u(x, y)$ — регулярное действительное решение уравнения (E_0) в области T, непрерывное в замкнутой области $T + L$. Тогда функцию $u(x, y)$ в области T можно представить в виде:

$$u(x, y) = \int_L \mu(t)\,M(z, t)\,ds, \quad z = x + iy \in T, \quad t \in L, \qquad (1.6)$$

где s — дуговая абсцисса линии L,

$$M(z, t) = \operatorname{Re}\left[\frac{G(z, 0, z, \bar{z})\,t'_s}{\pi i G(t, 0, t, \bar{t})(t - z)} + \frac{t'_s}{\pi i G(t, 0, t, \bar{t})} \int_0^z \frac{\frac{\partial}{\partial t_s} G(t_s, 0, z, \bar{z})}{t - t_s}\,dt_s\right], \qquad (1.7)$$

а $\mu(t)$ — заданная на L действительная функция, являющаяся решением интегрального уравнения Фредгольма:

$$u(t_0) = \mu(t_0) + \int_L M(t_0, t)\,\mu(t)\,dt, \qquad (1.8)$$

где $u(t_0) = u(t_0, t_0)$ — граничное значение решения $u(x, y)$.

Легко заметить, что всякой непрерывной на L функции $\mu(t)$ соответствует, по формуле (1.6), регулярное решение уравнения (E_0), являющееся непрерывным в $T+L$.

Наконец, сравнивая (1.4) и (1.6), непосредственно получаем:

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{G(t, 0, t, \bar{t})(t-z)}, \qquad z = x + iy \in T,\ t \in L. \tag{1.9}$$

§ 2. Приближение действительных решений уравнения (E_0) в случае действительных коэффициентов

В этом параграфе мы будем предполагать, что коэффициенты a, b и c уравнения (E_0) — действительные функции, а $u(x, y)$ — действительное регулярное решение данного уравнения в некоторой односвязной области T класса Ah.

Рассмотрим частные решения уравнения (E_0):

$$u_n(x, y) = \operatorname{Re}\left[G(z, 0, z, \bar{z})P_n(z) - \int\limits_0^z P_n(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t, 0, z, \bar{z})\right], \tag{2.1}$$

где $P_n(z)$ — произвольный полином n-й степени комплексного переменного z.

И. Н. Векуа принадлежит следующая теорема [см. ([1])]:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения* (E_0) *в области T, непрерывное в смысле Гельдера в $T+L$; тогда существует последовательность частных решений уравнения* (E_0) *вида* (2.1), *которая равномерно сходится к $u(x, y)$ в замкнутой области $T+L$.*

На основании этой теоремы можно доказать и более общее предложение:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $u(x, y)$ — регулярное решение уравнения* (E_0) *в области T, непрерывное в обычном смысле в $T+L$; тогда существует последовательность частных решений уравнения* (E_0) *вида* (2.1), *которая равномерно сходится к $u(x, y)$ в замкнутой области $T+L$.*

В самом деле, $u(x, y)$ можно представить по формуле (1.6), т. е.

$$u(x, y) = \int\limits_L \mu(t)M(z, t)\,ds, \qquad z = x + iy \in T, \tag{2.2}$$

где $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, определенная на L.

Пусть $P_{nm}(x, y)$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность целых рациональных функций (от действительных переменных x, y), равномерно сходящихся на L к $\mu(t)$. Пусть, далее,

$$v_{nm}(x, y) = \int\limits_L P_{nm}(t)M(z, t)\,ds, \quad z = x + iy \in T, \quad t \in L. \tag{2.3}$$

На основании (1.9) и теоремы Привалова [см. например, (2)], легко заметить, что $v_{nm}(x, y)$ являются регулярными решениями уравнения (E_0), непрерывными на L в смысле Гельдера. Следовательно, на основании теоремы 1, для доказательства сформулированного предложения достаточно установить равномерную сходимость последовательности $v_{nm}(x, y)$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ к $u(x, y)$ в замкнутой области $T + L$.

Для упрощения записи введем обозначения:

$$Q_{nm}(t) = \mu(t) - P_{nm}(t), \quad t = x + iy \in L,$$

$$H_0(z) = G(z, 0, z, \bar{z}), \quad H(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0 z, \bar{z});$$

тогда на основании (1.6) и (2.3) можем написать:

$$u(x, y) - v_{nm}(x, y) = \int_L Q_{nm}(t) M(z, t)\, ds =$$

$$= \int_L Q_{nm}(t) \operatorname{Re}\left[\frac{H_0(z)}{\pi i H_0(t)(t - z)} + \frac{t_s'}{\pi i H_0(t)} \int_0^z \frac{H(z, t_s)}{t - t_s} dt_s\right] ds =$$

$$= \int_L \left\{ Q_{nm}(t) \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{H_0(z) - H_0(t)}{\pi i H_0(t)(t - z)} + \frac{t_s'}{\pi i (t - z)} + \frac{t_s' H(z, t)}{\pi i} \lg\left(1 - \frac{z}{t}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{t_s'}{\pi i H_0(t)} \int_0^z \frac{H(z, t_s) - H(z, t)}{t - t_s} dt_s\right]\right\} ds, \quad z = x + iy \in T. \tag{2.4}$$

Далее,

$$\int_L Q_{nm}(t) \operatorname{Re}\left[\frac{t_s'}{\pi i (t - z)}\right] ds = \frac{1}{\pi} \int_L Q_{nm}(t) \frac{d}{dn} \lg \frac{1}{r}\, ds, \tag{2.5}$$

где $r = |t - z|$ $(t \in L,\ z = x + iy \in T)$, а n — внутренняя нормаль. Отсюда, на основании известных свойств [см., например, (2)] потенциала двойного слоя непосредственной оценкой получаем:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_L Q_{nm}(t) \frac{d}{dn} \lg \frac{1}{r}\, ds \right| \leqslant \left| Q_{nm}(t_0) + \frac{1}{\pi} \int_L Q_{nm}(t) \frac{d}{dn} \lg \frac{1}{|t - t_0|} ds \right|, \tag{2.6}$$

где t_0 — фиксированная на L точка, в которой левая часть неравенства (2.6) достигает своего максимального значения. Применяя известные преобразования, можем написать:

$$\frac{1}{\pi} \int_L Q_{nm}(t) \frac{d}{dn} \ln \frac{1}{|t - t_0|} ds = \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin \theta(t, t_0)}{|t - t_0|} Q_{nm}(t)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_L \frac{K(t_0, t) Q_{nm}(t)}{|t - t_0|^{\alpha}} ds, \tag{2.7}$$

где α — некоторое фиксированное число в интервале (0,1), $K(t_0, t)$ — функция переменных t_0, t, непрерывная на L в смысле Гельдера, а $\theta(t, t_0)$ — угол между вектором $\overrightarrow{t_0 t}$ и касательной к кривой L в точке t.

Легко заметить, что левая часть неравенства (2.6) равномерно стремится к нулю на L, когда $n, m \to \infty$. Следовательно, на основании принципа максимума гармонических функций, равномерно стремится к нулю и интеграл (2.5) в замкнутой области $T+L$, если $n, m \to \infty$.

Совершенно аналогично можно показать, что интеграл

$$\int_L Q_{nm}(t) \operatorname{Re}\left[\frac{t'_s H(z, t) \lg\left(1-\frac{z}{t}\right)}{\pi i}\right] ds$$

равномерно стремится к нулю в области $T+L$. Наконец, оценивая непосредственно (2.4) и учитывая вышесказанное, легко заметить, что разность $u(x, y) - v_{nm}(x, y)$ равномерно стремится к нулю в $T+L$, что и требовалось доказать.

§ 3. Исследование общего случая

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос приближения регулярных решений уравнения (E_0) для того случая, когда как коэффициенты, так и решения данного уравнения, вообще говоря, являются комплекснозначными функциями действительных аргументов x, y.

Рассмотрим функцию

$$F(z, \zeta) = \int_0^z G(t, z, \zeta) f(t)\, dt_0, \tag{3.1}$$

где $G(t, z, \zeta)$ — заданная аналитическая функция комплексных аргументов t, z и ζ в цилиндрической области (T, T, T^*) $(t \in T,\ z \in T,\ \zeta \in T^*)$. Предполагается, что T и T^* — произвольные конечные односвязные области. Не ограничивая общности, считаем также, что начало координат $z=0$ принадлежит области T.

Относительно функции $G(t, z, \zeta)$ будем в дальнейшем предполагать, что она непрерывна в замкнутой области $(T+L,\ T^*+L^*)$ и удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} G(t, z, \zeta)\right| \leqslant M, \quad (t, z, \zeta) \in (T, T, T^*), \tag{3.2}$$

где M — абсолютная постоянная.

Очевидно, что $F(z, \zeta)$ — однозначная аналитическая функция своих аргументов z, ζ в области (T, T^*) $(z \in T,\ \zeta \in T^*)$.

Обозначим через $z = z(w)$ функцию, конформно отображающую область T на круг $|w| < 1$ с условием $z(0) = 0$, и докажем следующее предложение:

ЛЕММА. *Функция* $F(z, \zeta)$ *непрерывна в замкнутой области* $(T+L,\ T^*+L^*)$ *и на этом множестве удовлетворяет неравенству*:

$$|F(z, \zeta)| \leqslant M \cdot R, \tag{3.3}$$

где

$$M = \max_{(t,z,\zeta)\in(T,T,T^*)} |G(t, z, \zeta)|,$$

а R — постоянная, зависящая только от области T и подинтегральной функции $f(z)$, если:

a) *функция $z = z(w)$ непрерывна на окружности $|w| = 1$ в смысле Гельдера с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, а $f(z)$ удовлетворяет неравенству:*

$$|f(z(w))| \leqslant M_1 (1 - r)^{-\beta}, \quad |w| = r < 1, \tag{3.4}$$

где M_1 и β — положительные постоянные, причем $\gamma = \alpha - \beta > 0$, или

b) *функция $z = z(w)$ на окружности $|w| = 1$ непрерывна в смысле $\Lambda_p (p < 1)$* [см. (3)], *а $f(z)$ удовлетворяет неравенству:*

$$|f(z(w))| \leqslant M \, [\lg 2\pi (1 - r)^{-s}]^{\beta}, \quad |w| = r < 1, \tag{3.5}$$

где M и β — постоянные, причем $\gamma = p - \beta > 0$.

Мы проведем доказательство только для случая a), так как для случая b) лемму можно доказать совершенно аналогично, учитывая соответствующие предложения работы (3).

Докажем сначала справедливость неравенства (3.3) Имеем;

$$F(z, \zeta) = \int_0^z G(t, z, \zeta) f(t) \, dt = \int_0^w G\big(t(\tau), z(w), \zeta\big) f(t(\tau)) \, t'(\tau) \, d\tau.$$

Отсюда, учитывая (3.4) и известную [см. (3), (4)] теорему Харди и Литтльвуда об оценке производных аналитических функций, непосредственно получаем:

$$|F(z, \zeta)| \leqslant \max |G(t, z, \zeta)| \cdot M_1^2 \int_0^r (1 - \tau)^{\gamma - 1} d\tau \leqslant M \cdot R, \quad (z, \zeta) \in (T, T^*),$$

где

$$R = M_1^2 \int_0^1 (1 - \tau)^{\gamma - 1} d\tau.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$\left| \frac{\partial F(z(w), \zeta)}{\partial w} \right| \leqslant K (1 - r)^{\gamma - 1}, \quad |w| = r < 1,$$

где K — абсолютная постоянная, не зависящая от z и ζ $(z \in T, \ \zeta \in T^*)$. Следовательно, на основании вышеупомянутой теоремы Харди и Литтльвуда заключаем, что функция $F(z, \zeta)$ равномерно непрерывна относительно z в области $T + L$. Так же легко доказать равномерную непрерывность

$F(z, \zeta)$ относительно ζ в области $T^* + L^*$, что полностью доказывает лемму для расматриваемого случая *.

Рассмотрим частные решения уравнения (E_0) вида:

$$u_{nm}(x, y) = G(z, 0, z, \bar{z}) P_n(z) - \int_0^z P_n(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, 0, z, \bar{z})\, dt +$$

$$+ G(0, z, z, \bar{z}) Q_m(\bar{z}) - \int_0^{\bar{z}} Q_m(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} G(0, \tau, \bar{z}, z)\, d\tau, \qquad (3.6)$$

где $P_n(z)$ и $Q_m(\zeta)$ — полиномы n-й и m-й степеней комплексных аргументов z и ζ.

Предположим, далее, что функция $z = z(w)$, конформно отображающая область T на круг $|w| < 1$, на окружности $|w| = 1$ непрерывна в смысле Λ_p $(p > 1)$; тогда, на основании вышедоказанной леммы, легко получается следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $u(x, y)$ — *регулярное решение уравнения* (E_0) *в области* T, *аналитическое продолжение которого* $U(z, \zeta)$ *относительно переменных* $z = x + iy$ *и* $\zeta = x - iy$ *удовлетворяет условиям*:

a) $U(z, 0)$ *непрерывна в области* $T + L$ *и*

b) $U(0, \zeta)$ *непрерывна в* $\bar{T} + \bar{L}$ (см. § 1).

Тогда решение $u(x, y)$ *непрерывно в* $T + L$ *и его можно равномерно аппроксимировать с произвольной точностью на этом множестве при помощи частных решений* (3.6).

В самом деле, учитывая (1.1), (1.2) и (1.3), на основании доказанной леммы получаем непрерывность функции $u(x, y)$ в $T + L$.

Пусть $\varphi(z)$ $(z \in T)$ и $\varphi^*(\zeta)$ $(\zeta \in \bar{T})$ — аналитические функции, соответствующие $u(x, y)$ по формулам (1.2) и (1.3). Тогда, как известно, существуют последовательности полиномов $P_n(z)$ и $Q_m(\zeta)$ $(n, m = 0, 1, 2 \ldots)$, равномерно сходящиеся в соответствующих замкнутых областях к функциям $\varphi(z)$ и $\varphi^*(\zeta)$. Используя лемму, легко проверить, что частные решения, соответствующие полиномам $P_n(z)$ и $Q_m(\zeta)$, равномерно сходятся на множестве $T + L$ к функции $u(x, y)$, что и требовалось доказать.

Поступило
11. XII. 1952

---

* Как известно, С. Н. Мергелян ([5]) доказал следующее предложение:

Существует жорданова область T *и аналитическая в* T *функция* $f(z)$ *такая, что* $f(z)$ *непрерывна в* $T + L$, *однако функция* $F(z) = \int_a^z f(t)\, dt$ ($a \in T$ *произвольно фиксировано*) *стремится к бесконечности при приближении* z *по произвольному пути к любой точке некоторого всюду плотного на границе* T *множества* E.

Очевидно, интерес представляют соответствующие положительные теоремы. В частности, из вышедоказанной леммы, полагая $G(t, z, \zeta) \equiv 1$, получаем следующее предложение:

Если функция $z = z(w)$ *на окружности* $|w| = 1$ *непрерывна в смысле* Λ_p $(p > 1)$, *то для любой аналитической, ограниченной в* T, *функции* $f(z)$ *функция* $F(z)$ *непрерывна в* $T + L$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948.
[2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Л., 1946.
[3] Гагуа М. Е., О поведении аналитических функций и их производных в замкнутых областях, Сообщения Ак. наук. Груз. ССР, X, № 8 (1949), 451—456.
[4] Hardy G. H. and Littlewood J. E., Some properties of fractional integrals. II, Math. Zeitschrift, 34 (1932), 403—439.
[5] Мергелян С. Н., Некоторые вопросы конструктивной теории функций, Труды матем. института им. В. А. Стеклова, XXXVII, 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 185—200

В. П. СКИТОВИЧ

ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ ОТ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе доказываются некоторые теоремы о стохастически независимых линейных формах от независимых случайных величин и даются некоторые приложения их.

В 1941 г. С. Н. Бернштейном (¹) была доказана следующая теорема: *Пусть X и Y — две независимые случайные величины, имеющие равные дисперсии. Для того чтобы величины $X+Y$ и $X-Y$ также были между собой независимы, необходимо и достаточно, чтобы случайные величины X и Y были распределены нормально.*

В 1948 г. Б. В. Гнеденко (²) доказал более общую теорему:

Пусть на плоскости имеется невырожденное распределение вероятностей. Для того чтобы это распределение было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы можно было двумя различными способами выбрать на этой плоскости такие оси координат XOY и UOV, в которых распределения вероятностей координат x и y точек плоскости, а также координат u и v были независимыми.

При доказательстве этой теоремы Б. В. Гнеденко рассматривал линейные формы $U = aX + bY$ и $V = \alpha X + \beta Y$ от независимых случайных величин X и Y и доказал, что в том случае, когда случайные величины U и V будут независимыми, случайные величины X и Y будут распределены нормально.

После результатов, полученных С. Н. Бернштейном и Б. В. Гнеденко, естественно было рассматривать линейные формы не от двух, а от большего числа случайных величин $Y_1, X_2, \ldots, X_n$. Этому вопросу и посвящена настоящая работа.

§ 1. В этом параграфе мы будем рассматривать две линейные формы от независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$l_1 = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n,$$
$$l_2 = b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_nX_n.$$

Будем считать, что распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ отличны от несобственного.

ТЕОРЕМА 1. *Все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будут распределены нормально, если*

A) *линейные формы l_1 и l_2 независимы,*

B) *все* $a_i \cdot b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Рассмотрим линейные формы

$$l_1' = -a_1X_1' - a_2X_2' - \cdots - a_nX_n',$$
$$l_2' = -b_1X_1' - b_2X_2' - \cdots - b_nX_n',$$

в которых случайные величины X_i' независимы, распределены так же, как и случайные величины X_i, и независимы от них в совокупности.

Пусть $l_1^* = l_1 + l_1'$, $l_2^* = l_2 + l_2'$ и $X_i^* = X_i - X_i'$; тогда линейные формы

$$l_1^* = a_1X_1^* + a_2X_2^* + \cdots + a_nX_n^*,$$
$$l_2^* = b_1X_1^* + b_2X_2^* + \cdots + b_nX_n^*$$

будут независимыми, а характеристические функции случайных величин X_i^* будут вещественными и неотрицательными. Если обозначить через $f_k(t)$ характеристическую функцию случайной величины l_k^* $(k=1, 2)$ а через $\varphi_i(t)$ — характеристическую функцию случайной величины X_i^* $(i=1, 2, \ldots, n)$, то из условия А) следует, что

$$f_1(t) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(a_i t), \quad f_2(\tau) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(b_i \tau),$$
$$f_1(t)\cdot f_2(\tau) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(a_i t + b_i \tau). \tag{1.1}$$

Покажем, что ни одна из характеристических функций, входящих в равенство (1.1), не обращается в нуль. Допустим противное: пусть произведение $f_1(t)\cdot f_2(\tau)$ при некоторых значениях t и τ обращается в нуль и пусть t_0 — наименьший по абсолютной величине корень этого произведения. Такой корень найдется, так как функции $f_1(t)$ и $f_2(\tau)$ непрерывны и $f_1(0) = f_2(0) = 1$. Предположим, что $f_1(t_0) = 0$, тогда найдется такой номер k, что $\varphi_k(a_k t_0) = 0$. Положим $t_1 = \left(1 - \frac{b_k}{c}\right) t_0$ и $\tau_1 = \frac{a_k}{c} t_0$ $\left(|c| > \max(|a_k|, |b_k|) \text{ и } \frac{b_k}{c} > 0\right)$; тогда

$$a_k t_1 + b_k \tau_1 = a_k t_0, \quad |t_1| < |t_0|, \quad |\tau_1| < |t_0|$$

и

$$f_1(t_1)\cdot f_2(\tau_1) = 0,$$

что невозможно. Обозначим

$$\Psi_k(t) = \ln f_k(t) \quad (k=1, 2) \text{ и } \psi_i(t) = \ln \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

тогда

$$\Psi_1(t) + \Psi_2(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i t + b_i \tau). \tag{1.2}$$

Дадим переменным t и τ произвольные приращения h_1 и h_2:

$$\Psi_1(t+h_1) + \Psi_2(\tau+h_2) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1 + b_i h_2), \tag{1.3}$$

$$\Psi_1(t+h_1) + \Psi_2(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1), \tag{1.4}$$

$$\Psi_1(t) + \Psi_2(\tau+h_2) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(a_i t + b_i \tau + b_i h_2). \tag{1.5}$$

Сложив равенства (1.2) и (1.3) и вычитая из них равенства (1.4) и (1.5), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} F_i(a_i t + b_i\tau,\ a_i h_1,\ b_i h_2) = 0, \tag{1.6}$$

где

$$F_i(a_i t + b_i\tau,\ a_i h_1,\ b_i h_2) = \psi_i(a_i t + b_i\tau + a_i h_1 + b_i h_2) - \\ - \psi_i(a_i t + b_i\tau + a_i h_1) - \psi_i(a_i t + b_i\tau + b_i h_2) + \psi_i(a_i t + b_i\tau).$$

Так как линейные формы l_1^* и l_2^* независимы, то найдутся коэффициенты a_k, b_k, a_l, b_l такие, что

$$\Delta_{k,\,l} = a_k b_l - a_l b_k \neq 0. \tag{*}$$

Обозначим

$$a_k t + b_k\tau = z, \quad a_l t + b_l\tau = u.$$

Переменные z и u могут принимать произвольные значения независимо друг от друга, и уравнение (1.6) можно переписать так:

$$\sum_r F_r(c_r z,\ a_k c_r h_1,\ b_k c_r h_2) + \sum_j F_j(d_j u,\ a_l d_j h_1,\ b_l d_j h_2) + \\ + \sum_s F_s(c_s z + d_s u,\ a_s h_1,\ b_s h_2) = 0. \tag{1.7}$$

Суммирование производится по всем таким значкам r, j, s, для которых

$$a_r t + b_r\tau = c_r z, \quad a_j t + b_j\tau = d_j u, \\ a_s t + b_s\tau = c_s z + d_s u.$$

Если сумма $\sum_s F_s(c_s z + d_s u,\ a_s h_1,\ b_s h_2)$ пуста, то равенство (1.7) возможно только в том случае, когда

$$\sum_r F_r(c_r z,\ c_r h_1 a_k,\ c_r h_2 b_k) = \sum_j F_j(d_j u,\ d_j h_1 a_l,\ d_j h_2 b_l) = C(h_1, h_2). \tag{1.8}$$

(Равенство (1.7) справедливо при любых значениях z, u, h_1, h_2, а переменные z и u могут принимать любые значения независимо друг от друга.)

Положим

$$\sum_r \psi_r(c_r z) = \Psi(z), \quad h_1 a_k = h,$$

$$h_2 b_k = h, \quad C\left(\frac{h}{a_k},\ \frac{h}{b_k}\right) = C_1(h);$$

тогда

$$\sum_r F(c_r z, c_r h, c_r h), = \Psi(z + 2h) - \Psi(z + h) - [\Psi(z + h) - \Psi(z)] = C_1(h)$$

или

$$\Delta_h^2 \Psi(z) = C_1(h).$$

Известно, что это уравнение имеет единственное решение:

$$\Psi(z) = \frac{C_1(h)}{2h^2} z^2 + B_1(h) z + A_1(h),$$

откуда следует, что сумма $\sum_r c_r X_r^*$ распределена нормально, но тогда

нормально будут распределены и все случайные величины совокупности $\{X_r^*\}$, а следовательно, и случайные величины совокупности $\{X_r\}$ (теорема Крамера. См., например, (7)). В силу того что суммы $\sum\limits_r F_r$ и $\sum\limits_j F_j$ входят в равенство (1.8) симметрично, все случайные величины совокупности $\{X_j\}$ будут тоже распределены нормально. Для этого случая теорема доказана, так как совокупности случайных величин $\{X_r\}$ и $\{X_j\}$ исчерпывают всю совокупность случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Рассмотрим теперь случай, когда сумма $\sum\limits_s F_s(c_sz + d_su, a_sh_1, b_sh_2)$ не пуста. Придадим переменным z и u произвольные приращения h_3 и h_4 точно так же, как мы это делали для переменных t и τ; тогда

$$\sum_s \Phi_s(c_sz + d_su, a_sh_1, b_sh_2, c_sh_3, d_sh_4) = 0, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\Phi_s(c_sz + d_su, a_sh_1, b_sh_2, c_sh_3, d_sh_4) = F_s(c_sz + d_su + c_sh_3 + d_sh_4, a_sh_1, b_sh_2) - \\ - F_s(c_sz + d_su + c_sh_3, a_sh_1, b_sh_2) - F_s(c_sz + d_su + d_sh_4, a_sh_1, b_sh_2) + \\ + F_s(c_sz + d_su, a_sh_1, b_sh_2).\end{aligned}$$

Из коэффициентов c_s, d_s выберем какую-либо пару c_p, d_p. Тогда либо для всех c_m, d_m ($c_m \neq 0$ и $d_m \neq 0$)

$$\text{(a)} \quad c_pd_m - c_md_p = 0,$$

либо найдется хоть одна пара c_q, d_q такая, что

$$\text{(b)} \quad c_pd_q - c_qd_p \neq 0.$$

В случае (b) обозначим $c_pz + d_pu = v$ и перепишем уравнение (1.9) так:

$$\sum_s \Phi_s(e_sv, e_sc_ph_3, e_sd_ph_4, a_sh_1, b_sh_2) = 0. \tag{1.9'}$$

Обозначим

$$\sum_s F_s(e_sv, a_sh_1, b_sh_2) = F(v, h_1, h_2) \tag{1.10}$$

и положим $c_ph_3 = h$ и $d_ph_4 = h$; тогда уравнение (1.9′) примет вид:

$$\Delta_h^2 F(v, h_1, h_2) = 0.$$

Решением этого уравнения будет многочлен степени не выше первой. Из уравнения (1.7) следует, что

$$\sum_r F_r(c_rz, c_rh_1, a_k, c_rh_2b_k) \text{ и } \sum_j F_j(d_ju, d_jh_1a_l, d_jh_2b_l)$$

— тоже многочлены степени не выше первой. Так как

$$c_p = \frac{a_pb_l - a_lb_p}{a_kb_l - a_lb_k}, \quad d_p = \frac{a_kb_p - b_ka_p}{a_kb_l - a_lb_k},$$

а

$$c_m = \frac{a_mb_l - a_lb_m}{a_kb_l - a_lb_k}, \quad d_m = \frac{a_kb_m - a_mb_k}{a_kb_l - a_lb_k},$$

то равенство (a) возможно только в том случае, когда $a_m = e_ma_p$ и $b_m = e_mb_p$, и равенство (1.10) можно переписать так:

$$\sum_s F_s(e_sv, e_sa_ph_1, e_sb_ph_2) = F(v, h_1, h_2).$$

Обозначим

$$\sum_{s} \psi_s(e_s v) = P_1(v)$$

и положим

$$a_p h_1 = h', \quad b_p h_2 = h', \quad F\left(v, \frac{h'}{a_p}, \frac{h'}{b_p}\right) = F^*(v, h'),$$

тогда

$$\Delta_{h'}^2 P(v) = F^*(v, h'),$$

откуда следует, что $P(v)$ — многочлен степени не выше третьей. Но так как $P(v)$ — логарифм характеристической функции некоторой случайной величины, то, на основании теоремы, доказанной Марцинкевичем ([8]), степень его обязательно равна двум, и случайные величины совокупности $\{X_s\}$ распределены нормально. Так как $\sum_r F_r$ и $\sum_j F_j$ — многочлены степени не выше первой, то $\sum_r \psi_r(c_r z)$ и $\sum_j \psi_j(d_j u)$ будут многочленами степени не выше третьей, и (на основании ([7]) и ([8])) случайные величины совокупностей $\{X_r\}$ и $\{X_j\}$ будут распределены нормально. Для этого случая теорема тоже доказана.

Пусть теперь выполняется условие (b). Тогда величины

$$v = c_p z + d_p u, \quad w = c_q z + d_q u$$

могут принимать независимо друг от друга произвольные значения, и уравнение (1.9) можно переписать так:

$$\begin{aligned}\sum_{s_j} \Phi_{s_j}(e_{s_j} v,\ e_{s_j} a_p h_1,\ e_{s_j} b_p h_2,\ e_{s_j} c_p h_3,\ e_{s_j} d_p h_4) + \\ + \sum_{s_i} \Phi_{s_i}(f_{s_i} w,\ f_{s_i} a_q h_1,\ f_{s_i} b_q h_2,\ f_{s_i} c_q h_3,\ f_{s_i} d_q h_4) + \\ + \sum_{s_k} \Phi_{s_k}(e_{s_k} v + f_{s_k} w,\ a_{s_k} h_1,\ b_{s_k} h_2,\ c_{s_k} h_3,\ d_{s_k} h_4) = 0. \qquad (1.11)\end{aligned}$$

Суммирование производится по всем таким значкам s_i, s_j, s_k, для которых

$$c_{s_j} z + d_{s_j} u = e_{s_j} v, \quad c_{i_i} z + d_{s_i} u = f_{s_i} w, \quad c_{s_k} z + d_{s_k} u = e_{s_k} v f_{s_k} w.$$

Функциональное уравнение (1.11) аналогично по форме функциональному уравнению (1.7), но число неизвестных функций, входящих в уравнение (1.11), по крайней мере на два меньше, чем число неизвестных функций, входящих в уравнение (1.7).

Для решения функционального уравнения (1.11) мы можем применить тот же самый прием, которым мы пользовались для решения уравнения (1.7). В результате мы либо решим уравнение (1.11), а следовательно, и уравнение (1.7) (случай, аналогичный случаю (a) при решении уравнения (1.7)), либо придем к функциональному уравнению аналогичного вида, но с числом неизвестных функций по крайней мере на два меньше, чем в уравнении (1.11) (случай, аналогичный случаю (b) при решении уравнения (1.7)), и т. д.

Так как число неизвестных функций ψ_i конечно, то на некотором шаге процесс оборвется, и мы придем либо к уравнению

$$T(\xi, h_1, h_2, \ldots, h_{2\nu}) = 0,$$

либо к уравнению

$$T_1(\xi, h_1, \dots, h_{2\nu}) + T_2(\eta, h_1, \dots, h_{2\nu}) = 0,$$

в которых переменные ξ и η могут принимать произвольные значения независимо друг от друга. Функции $T_1(\xi, h_1, \dots, h_{2\nu})$, $T_2(\eta, h_1, h_2, \dots, h_{2\nu})$ и $T(\xi, h_1, \dots, h_{2\nu})$ при надлежащем выборе произвольных приращений $h_{2\nu-1}$ и $h_{2\nu}$ будут представлять вторые разности от некоторых других функций. Последние будут многочленами не выше второй степени и в свою очередь, при надлежащем выборе произвольных приращений $h_{2\nu-3}$ и $h_{2\nu-2}$ будут представлять вторые разности от некоторых других функций, которые будут многочленами степени не выше четвертой, и т. д. В результате мы получим, что

$$\sum_r \psi_r(c_r z), \quad \sum_j \psi_j(d_j u), \quad \sum_s \psi_s(c_s z + d_s u)$$

будут многочленами степени не выше, чем 2ν. На основании теоремы Марцинкевича ([8]) они будут многочленами второй степени, а на основании теоремы Крамера ([7]), все случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ будут распределены нормально. Теорема доказана.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. *Если случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ распределены нормально, то коэффициенты a_i, b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ можно подобрать так, чтобы линейные формы l_1 и l_2 были независимыми.*

Доказательство. Для того чтобы линейные формы l_1 и l_2 были независимыми, достаточно, чтобы

$$R(l_1, l_2) = E(l_1 - El_1)(l_2 - E_2) = 0. \qquad (**)$$

Так как все

$$E(a_i X_i - Ea_i X_i)(b_j X_j - Eb_j X_j) = 0,$$

если $i \neq j$, то условие (**) можно переписать так:

$$R(l_1, l_2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i - EX_i)^2 a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sigma_i^2 = 0.$$

Очевидно, что коэффициенты a_i, b_i можно подобрать таким образом, чтобы это соотношение выполнялось. В том случае, когда условие B) теоремы 1 не выполняется, но коэффициенты a_i, b_i таковы, что $\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 \neq 0$, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если линейные формы l_1 и l_2 независимы, то все те случайные величины, коэффициенты при которых отличны от нуля в обеих формах, будут распределены нормально.*

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, мы можем считать, что коэффициенты при первых k случайных величинах отличны от нуля в обеих формах. Формы l_1 и l_2 запишем так:

$$l_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k + X,$$
$$l_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k + Y,$$

где $\quad X = a_{k+1} X_{k+1} + \dots + a_n X_n$ и $Y = b_{k+1} X_{k+1} + \dots + b_n X_n$.

Соотношение (1.1) в данном случае можно записать так:

$$f_1(t)\cdot f_2(\tau) = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i(a_i t + b_i\tau) f(t) g(\tau),$$
$$f(t) = \prod_{j=k+1}^{n} \varphi_j(a_j t), \quad g(\tau) = \prod_{j=k+1}^{n} \varphi_j(b_j\tau). \tag{1.12}$$

Покажем, что в произведение $\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(a_i t + b_i\tau)$ входят по крайней мере два множителя. По условию, это произведение не пусто. Допустим теперь, что $k = 1$, т. е.

$$\prod_{i=1}^{k} \varphi_i(a_i t + b_i\tau) = \varphi_1(a_1 t + b_1\tau),$$

тогда

$$l_1 = a_1 X_1 + X, \quad l_2 = b_1 X_1 + Y$$

и

$$f_1(t) = \varphi_1(a_1 t)\cdot f(t), \quad f_2(\tau) = \varphi_1(b_1\tau)\cdot g(\tau),$$
$$f_1(t)\cdot f_2(\tau) = \varphi_1(a_1 t + b_1\tau) f(t) g(\tau).$$

Положим $a_1 t = -b_1\tau$; тогда

$$\varphi_1(a_1 t)\cdot \varphi_1(-a_1 t)\cdot f(t) g\left(-\frac{a_1}{b_1} t\right) = f(t) g\left(-\frac{a_1}{b_1} t\right).$$

Так как в некоторой окрестности нуля $|t| < T_0$ ни одна из функций, входящих в последнее равенство, не обращается в нуль, то это равенство возможно только в том случае, когда $|\varphi_1(a_1 t)| = 1$ для всех t из области $|t| < T_0$. Это возможно только в том случае, если случайная величина X_1 имеет несобственное распределение, но такой случай мы из рассмотрения исключаем. В области $|t| < T_0$ и $|\tau| < T_0$ будет справедливо соотношение

$$\Psi_1(t) + \Psi_2(\tau) = \sum_{i=1}^{k} \psi_i(a_i t + b\,\tau) + \sum_{j=k+1}^{n} \psi_j(a_j t) + \sum_{j=k+1}^{n} \psi_j(b_j\tau). \tag{1.13}$$

Сумма $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(a_i t + b_i\tau)$ содержит не менее двух слагаемых и, кроме того, среди коэффициентов a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ обязательно найдутся такие a_p, b_p, a_q, b_q, что $a_p b_q - a_q b_q \neq 0$. Действительно, в противном случае

$$l_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k + X,$$
$$l_2 = c(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k) + Y$$

и случайная величина $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k$ имеет несобственное распределение, что исключено.

Будем теперь считать, что переменные t и τ в равенстве (1.13) меняются в области $|t| < \frac{T_0}{n+2}$, $|\tau| < \frac{T_0}{n+2}$, и придадим им произвольные, но достаточно малые приращения h_1 и h_2 $\left(|h_1| < \frac{T_0}{n+2}, |h_2| < \frac{T_0}{n+2}\right)$ точ-

но так же, как мы делали это при доказательстве теоремы 1. Для определения функции $\psi_i(a_it + b_i\tau)$ получим уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} F_i(a_it + b_i\tau,\ a_ih_1,\ b_ih_2) = 0,$$

которое мы будем решать точно так же, как мы решали аналогичное уравнение (1.6), выбирая всякий раз произвольные приращения h_i так, чтобы $|h_i| < \frac{T_0}{n+2}$. Как мы уже видели, решение такого уравнения сводится к решению уравнений вида

$$\Delta_h^2 \Psi(z) = P_m(z,\ h), \tag{1.14}$$

где $P_m(z,\ h)$ — многочлен степени m. Если в первом случае эти уравнения были справедливы при любых z и h, то в данном случае они будут справедливы лишь в некоторой окрестности нуля $\left(|z| < \frac{T_0}{n+2}\ \text{и}\ |h| < \frac{T_0}{n+2}\right)$.

Покажем, что функции, удовлетворяющие уравнению (1.14) только в некоторой окрестности нуля, будут в этой окрестности совпадать с некоторыми многочленами степени $m+2$. Рассмотрим сначала уравнение

$$\Delta_h^2 \Psi(z) = 0.$$

Функция, удовлетворяющая в некоторой окрестности нуля этому уравнению, совпадает в этой окрестности с многочленом первой степени. Действительно, для всех z таких, что $|z| < \frac{T_0}{n+2}$, существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_h^2 \Psi(z)}{h^2}.$$

Этот предел равен нулю. Следовательно, функция $\Psi(z)$ в некоторой окрестности нуля имеет вторую производную и $\Psi''(z) = 0$ для всех z из окрестности $|z| < \frac{T_0}{n+2}$, но это возможно только в том случае, когда $\Psi(z) = Az + B$ для всех z из этой окрестности.

Известно, что функция $\Psi_1(z)$, удовлетворяющая при любых z и h уравнению

$$\Delta_h^2 \Psi_1(z) = P_m(z,\ h),$$

является многочленом степени $m+2$. Рассмотрим разность

$$Q(z) = \Psi_1(z) - \Psi(z),$$

где $\Psi(z)$ — функция, удовлетворяющая уравнению (1.14) только при достаточно малых значениях z и h. При этих значениях z и h функция $Q(z)$ будет удовлетворять уравнению $\Delta_h^2 Q(z) = 0$, т. е. будет совпадать с многочленом первой степени для всех тех z и h, при которых функция $\Psi(z)$ удовлетворяет уравнению (1.14). Но отсюда следует, что для этих z и h функция $\Psi(z)$ будет совпадать с некоторым многочленом степени $m+2$.

Таким образом, мы получим, что функция $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(z)$ будет совпадать в некоторой окрестности нуля с многочленом степени не выше, чем $2n$. На основании леммы, доказанной Ю. В. Линником ([3]), она будет много-

членом второй степени и не только в некоторой окрестности нуля, но и на всей действительной оси. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают два очевидных следствия.

Следствие 1. *Если линейные формы l_1 и l_2 независимы, то независимыми будут и линейные формы*

$$l_1' = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_kX_k,$$

$$l_2' = b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_kX_k.$$

Следствие 2. *Если линейные формы l_1 и l_2 независимы и все входящие в них случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены одинаково, то все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены нормально, а линейные формы l_1 и l_2 ортогональны.*

На основании теоремы 2 мы можем утверждать, что линейные формы l_1 и l_2 от независимых случайных величин $X_1, X_2 \ldots, X_n$ могут быть независимыми только в двух случаях:

1) когда все $a_ib_i = 0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

2) когда все те случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$, коэффициенты при которых отличны от нуля в обеих формах, распределены нормально и $\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i\sigma_i^2 = 0$.

§ 2. Будем теперь рассматривать m линейных форм от независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$:

$$l_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}X_i \quad (k = 1, 2, \ldots, m; \quad m \leqslant n).$$

ТЕОРЕМА 3. *Все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены нормально, если:*

А. *Формы $l_1, l_2, \ldots, l_m$ независимы в совокупности.*

В. *Каждый из столбцов матрицы M, составленной из коэффициентов этих форм, содержит в каждом столбце по крайней мере два элемента, отличных от нуля.*

Доказательство. Выберем какую-либо случайную величину X_k. Тогда найдутся две формы l_{k_1} и l_{k_2}, в которых коэффициенты при X_k отличны от нуля. Формы l_{k_1} и l_{k_2} независимы, следовательно (теорема 2), случайная величина X_k распределена нормально. Теорема доказана, так как случайную величину X_k мы выбирали произвольно.

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА. *Если все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены нормально и независимы, то в линейных формах $l_1, l_2, \ldots, l_m$ можно выбрать коэффициенты a_{ki} так, чтобы эти формы были независимыми в совокупности.*

Доказательство. Коэффициенты a_{ki} нужно выбирать таким образом, чтобы

$$f_1(t_1)\cdot f_2(t_2)\cdots f_m(t_m) = \varphi_1(a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m)\cdot$$
$$\cdot\varphi_2(a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_2)\cdots\varphi_n(a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_n), \quad (2.1)$$

$$\varphi_i(t) = e^{-\frac{\sigma_i^2t^2}{2}}$$

(не умаляя общности, мы можем считать, что все $EX_i = 0$).

Равенство (2.1) следует переписать так:

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(b_1^2 t_1^2 + b_2^2 t_2^2 + \cdots + b_m^2 t_m^2)\right] =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}[(a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \cdots + a_{m1}t_m)^2\sigma_1^2 + (a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \cdots + a_{m2}t_m)^2\sigma_2^2 + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + (a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \cdots + a_{mn}t_m)^2\sigma_n^2]\right\}.$$

Это равенство будет справедливым только в том случае, когда

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} \sigma_k^2 = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Очевидно, что коэффициенты в линейных формах $l_1, l_2, \cdots, l_m$ можно подобрать таким образом, чтобы это соотношение выполнялось. Коэффициенты b_i^2 определяются равенствами

$$b_i^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \sigma_k^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

ТЕОРЕМА 4. *Если число линейных форм совпадает с числом случайных величин* ($m = n$) *и в какой-либо из этих форм* l_i *не более чем один из коэффициентов равен нулю, то эти линейные формы могут быть независимыми и ортогональными только в том случае, когда все случайные величины* $X_1, X_2, \cdots, X_n$ *имеют равные дисперсии.*

Доказательство. Из независимости и ортогональности форм $l_1, l_2, \ldots, l_m$ следует, что одновременно должны выполняться соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} \sigma_k^2 = 0 \quad (i \neq j) \text{ и } \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 \quad (i \neq j). \tag{2.2}$$

Если рассматривать коэффициенты $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ как компоненты n-мерного вектора $\overline{A}_i$, то условия (2.2) можно иначе записать так:

$$(\overline{A}_i, \overline{A}_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad (\overline{A}_i^*, \overline{A}_j) = 0 \quad (i \neq j), \tag{2.2'}$$

где $\overline{A}_i^*$ — вектор, компонентами которого являются $a_{i1}\sigma_1^2, a_{i2}\sigma_2^2, \ldots, a_{in}\sigma_n^2$. Соотношение (2.2') может выполняться только в том случае, когда

$$\frac{a_{i1}\sigma_1^2}{a_{i1}} = \frac{a_{i2}\sigma_2^2}{a_{i2}} = \cdots = \frac{a_{in}\sigma_n^2}{a_{in}}$$

или $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_n^2$. Если все a_{ik} отличны от нуля, то теорема доказана. Если же один из коэффициентов, например, a_{is}, равен нулю, то мы выберем форму l_{k_s}, в которой $a_{k_s s} \neq 0$. В этой форме (теорема 2) найдется еще хотя бы один коэффициент, например, $a_{k_s p}$, отличный от нуля. Тогда

$$(\overline{A}_{k_s}, \overline{A}_j) = 0 \quad (j \neq k_s), \quad (\overline{A}_{k_s}^*, \overline{A}_j) = 0 \quad (j \neq k_s)$$

и $\sigma_s^2 = \sigma_p^2$. Но так как среди коэффициентов a_{ik} только один мог быть равен нулю, то $\sigma_p^2 = \sigma^2$ и, следовательно, $\sigma_s^2 = \sigma^2$.

Заметим, что в том случае, когда число равных нулю коэффициентов в форме l_i больше одного, теорема 4, вообще говоря, не верна.

Например, если формы

$$
\begin{aligned}
l_1 &= a_1X_1 + a_2X_2, \\
l_2 &= b_1X_1 + b_2X_2, \\
l_3 &= \qquad\qquad a_3X_3 + a_4X_4, \\
l_4 &= \qquad\qquad b_3X_3 + b_4X_4
\end{aligned}
$$

независимы и ортогональны, то обязательно $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \bar{\sigma}^2$ и $\sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \bar{\sigma}^2$, но σ^2 может и не быть равной $\bar{\sigma}^2$.

ТЕОРЕМА 5. *Если линейные формы*

$$l_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} X_i \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

от независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы в совокупности, то все те случайные величины, которые встречаются по крайней мере в двух различных формах, будут распределены нормально.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Теорема 5 имеет два очевидных следствия:

Следствие 1. *Линейные формы $l_1', l_2', \ldots, l_m'$, получающиеся из форм $l_1, l_2, \ldots, l_m$, если из последних убрать все те случайные величины, которые содержатся только в какой-либо одной из форм, независимы в совокупности.*

Следствие 2. *Если линейные формы $l_1, l_2, \ldots, l_m$ независимы в совокупности и все случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены одинаково, то все эти случайные величины распределены нормально, а формы $l_1, l_2, \ldots, l_m$ ортогональны.*

На основании теоремы 5 мы можем утверждать, что линейные формы

$$l_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} X_i \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

от независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ могут быть независимыми в совокупности только в тех случаях, когда

1) матрица M, составленная из коэффициентов линейных форм $l_1, l_2, \ldots, l_m$, содержит в каждом столбце только по одному элементу, отличному от нуля;

2) все те случайные величины, которые встречаются по крайней мере в двух различных линейных формах, распределены нормально и коэффициенты при них удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s} a_{s_i s}\, a_{s_j s}\, \sigma_s^2 = 0 \quad (s_i \neq s_j).$$

Очевидно, что признаки, характеризующие независимость двух линейных форм l_1 и l_2, входят сюда как частный случай.

§ 3. Если вместо независимых случайных величин рассматривать совокупность случайных независимых векторов $\{\overline{X}_i^{(i)}\}$ с компонентами $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_N^{(i)}$ и линейные формы от этих векторов

$$\overline{L}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \overline{X}^{(i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

то и для этих случайных векторов могут быть сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные теоремам, доказанным ранее для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

ЛЕММА. *Если проекции случайного вектора $\overline{X}$ на любое направление распределены нормально, то и сам случайный вектор $\overline{X}$ будет распределен нормально.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что компоненты случайного вектора $\overline{X}$ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ будут случайными величинами, имеющими нормальные распределения. Поэтому будут существовать Ex_i, $E(x_i - Ex_i)^2$ и $E(x_i - Ex_i)(x_j - Ex_j)$. Наряду со случайным вектором $\overline{X}$ мы будем рассматривать случайный вектор $\overline{X}'$, имеющий нормальное распределение и такой, что

$$Ex'_i = Ex_i, \quad E(x'_i - Ex'_i)^2 = E(x_i - Ex_i)^2, \qquad (3.1)$$
$$E(x'_i - Ex'_i)(x'_j - Ex_j) = E(x_i - Ex_i)(x_j - Ex_j),$$

где $x'_1, x'_2, \ldots, x'_N$ — компоненты этого случайного вектора. Проекции случайных векторов $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ на какое-либо направление можно рассматривать как скалярные произведения их на некоторый постоянный вектор $\overline{T}$ с компонентами $t_1, t_2, \ldots, t_N$:

$$(\overline{X}, \overline{T}) = x_1 t_1 + x_2 t_2 + \cdots + x_N t_N,$$
$$(\overline{X}', \overline{T}) = x'_1 t_1 + x'_2 t_2 + \cdots + x'_N t_N.$$

При любых $t_1, t_2, \ldots, t_N$ случайные величины $(\overline{X}, \overline{T})$ и $(\overline{X}', \overline{T})$ будут распределены нормально, а на основании (3.1) они будут иметь равные математические ожидания и дисперсии. Следовательно, при любых $t_1, t_2, \ldots, t_N$ функции распределения случайных величин $(\overline{X}, \overline{T})$ и $(\overline{X}', \overline{T})$ совпадают. На основании теоремы Крамера-Волда ([7]), распределения случайных векторов $\overline{X}$ и $\overline{X}'$ совпадают всюду. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Если линейные формы $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \ldots, \overline{L}_m$ от независимых случайных векторов $\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \ldots, \overline{X}^{(n)}$ независимы, то все те случайные векторы, которые встречаются по крайней мере в двух различных формах, распределены нормально.*

Доказательство. Спроектируем все случайные векторы $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \ldots, \overline{L}_m$ на некоторый постоянный вектор $\overline{T}$; тогда линейные формы

$$(\overline{L}_k, \overline{T}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} (\overline{X}^{(i)}, \overline{T}) \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

от независимых случайных величин $(\overline{X}^{(1)}, \overline{T}), (\overline{X}^{(2)}, \overline{T}), \ldots, (\overline{X}^{(n)}, T)$ будут независимыми. На основании теоремы 5, все те случайные величины, которые содержатся по крайней мере в двух различных формах, будут распределены нормально, а на основании только что доказанной леммы, нормально распределены будут и все случайные векторы, встречающиеся по крайней мере в двух формах.

Теоремы, аналогичные теоремам 1, 2 и 3, вытекают из теоремы 6, как следствия.

ТЕОРЕМА 7. *Если все случайные векторы $\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$, входящие в линейные формы $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \ldots, \overline{L}_m$, распределены нормально и ранг*

матрицы

$$D = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(1)} & \mu_{11}^{(2)} & \dots & \mu_{11}^{(n)} \\ \mu_{12}^{(1)} & \mu_{12}^{(2)} & \dots & \mu_{12}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{NN}^{(1)} & \mu_{NN}^{(2)} & \dots & \mu_{NN}^{(n)} \end{pmatrix},$$

где

$$\mu_{jk}^{(i)} = Ex_j^{(i)} x_k^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, N;\ k = 1, 2, \dots, N)$$

(не умаляя общности, мы можем считать, что все $Ex_j^{(i)} = 0$*), меньше, чем* $n(m-1)$*, то в линейных формах* $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \dots, \overline{L}_m$ *коэффициенты* a_{ij} *можно подобрать таким образом, чтобы эти формы были независимыми в совокупности.*

Доказательство. Характеристические функции случайных векторов $\overline{L}_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ определяются равенствами

$$f_k(t_{k1}, t_{k2}, \dots, t_{kN}) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{ki}^2 \mu_{jl}^{(i)} t_{kj} t_{kl}\right],$$

а характеристическая функция вектора-суммы $\sum_{k=1}^{m} \overline{L}_k$

$$f(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1N}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2N}, \dots, t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mN})$$

определяется равенством:

$$f(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1N}, t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2N}, \dots, t_{m1}, t_{m2}, \dots, t_{mN}) =$$
$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{1i}^2 \mu_{jl}^{(i)} t_{1j} t_{1l} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{2i}^2 \mu_{jl}^{(i)} t_{2j} t_{2l} + \dots + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{mi}^2 \mu_{jl}^{(i)} t_{mj} t_{ml} + S\right]\right\}, \tag{3.2}$$

где

$$S = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{1i} a_{2i} \mu_{jl}^{(i)} t_{1j} t_{2l} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{1i} a_{3i} \mu_{jl}^{(i)} t_{1j} t_{3l} + \dots$$
$$\dots + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,\,l} a_{m-1\,i} a_{mi} \mu_{jl}^{(i)} t_{m-1\,j} t_{ml}.$$

Для независимости форм $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \dots, \overline{L}_m$ нужно, чтобы сумма S была равна нулю при любых t_{rs} $(r = 1, 2, \dots, N_i; s = 1, 2, \dots, N)$. Это возможно только в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n} a_{pi} a_{qi} \mu_{jl}^{(i)} = 0 \quad (p \neq q;\ j = 1, 2, \dots, N;\ l = 1, 2, \dots, N).$$

Если считать произведение $a_{pi} a_{qi}$ за одну неизвестную величину, то для определения величин $a_{pi} a_{qi}$ мы имеем систему однородных уравнений с $n(m-1)$ неизвестными. Так как ранг матрицы этой системы меньше числа неизвестных, то эта система имеет нетривиальное решение.

Из теорем 6 и 7 следует, что линейные формы $\overline{L}_1, \overline{L}_2, \dots, \overline{L}_m$ от независимых случайных векторов $\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ могут быть независимыми только в двух случаях:

1. Каждый столбец матрицы M, составленной из коэффициентов этих линейных форм, содержит только по одному элементу, отличному от нуля.

2. Все те случайные векторы, которые встречаются не менее чем в двух различных формах, распределены нормально и коэффициенты при них удовлетворяют соотношению

$$\sum_i a_{pi}\, a_{qi}\, \mu_{j,\,l}^{(i)} = 0.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть в пространстве R_N имеется невырожденное распределение вероятностей. Для того чтобы это распределение было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы:*

(А) *в пространстве R_N можно было выбрать такую систему координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$, в которой проекции распределения на оси были бы независимыми:*

(В) *кроме этого, можно было выбрать еще две оси общего положения так, чтобы проекции распределения на эти оси были тоже независимыми.* (Осью общего положения мы будем называть прямую, не лежащую ни в одной из координатных гиперплоскостей.)

Доказательство. Если распределение нормально, то всегда можно выбрать систему координат так, чтобы проекции этого распределения на оси были независимыми. Необходимость условия (В) вытекает из теоремы, обратной к теореме 1. Если условия (А) и (В) выполнены, то нормальность распределения следует из теоремы 1 и леммы.

§ 4. Полученные нами результаты могут быть использованы для выводов закона Максвелла для распределения скоростей молекул при установившемся процессе и закона эллипсоидального распределения скоростей звезд.

Классический вывод закона Максвелла для распределения скоростей молекул при установившемся процессе дается при следующих предположениях.

А. Существует система ортогональных осей OX, OY, OZ таких, что вероятность совмещения неравенств

$$x \leqslant v_x \leqslant x + dx, \quad y \leqslant v_y \leqslant y + dy, \quad z \leqslant v_z \leqslant z + dz,$$

где v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости случайно взятой молекулы, равна

$$H(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \varphi_1(x^2)\,\varphi_2(y^2)\,\varphi_3(z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где все написанные функции непрерывны.

В. Эта же вероятность равна

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\varphi(x^2 + y^2 + z^2)$ непрерывна [см. ([5])].

Из предположений А и В следует, что

$$H(x, y, z) = Ce^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}. \tag{4.1}$$

Как было замечено Ю. В. Линником ([4]), условия А и В равносильны допущению того, что проекции скорости молекулы на любые три ортогональные оси статистически независимы и что такая физическая гипотеза является в значительной мере излишней.

Полученные нами результаты позволяют дать вывод закона Максвелла при следующих предположениях:

A'. Существует система ортогональных осей OX, OY, OZ таких, что проекции скорости случайно взятой молекулы на эти оси статистически независимы.

B'. Существуют еще три ортогональные оси OX_1, OY_1, OZ_1, из которых ни одна не совпадает с прежними, и такие, что проекции скорости той же молекулы на эти оси будут также статистически независимыми.

Пусть v_x, v_y, v_z — проекции скорости молекулы на оси OX, OY, OZ; тогда линейные формы

$$v_{x_1} = a_1 v_x + a_2 v_y + a_3 v_z,$$
$$v_{y_1} = b_1 v_x + b_2 v_y + b_3 v_z,$$
$$v_{z_1} = c_1 v_x + c_2 v_y + c_3 v_z$$

будут проекциями скорости молекулы на оси OX_1, OY_1, OZ_1. Из независимости случайных величин v_x, v_y, v_z, v_{x_1}, v_{y_1}, v_{z_1} следует, что все они распределены нормально (теорема 3). Далее, мы можем считать, что

$$Ev_x = Ev_y = Ev_z = 0$$

и, ввиду того что оси OX_1, OY_1, OZ_1 ортогональны,

$$Ev_x^2 = Ev_y^2 = Ev_z^2,$$

что и приводит к закону Максвелла.

Закон распределения скоростей, выведенный для газовых молекул, мог бы быть применен к звездным скоростям, если бы относительно последних можно было сделать такие же предположения, какие мы делали при выводе закона Максвелла, но в действительности это не так. Для описания скоростей звезд Шварцшильдом было предложено следующее видоизменение закона Максвелла:

$$F(u, v, w)\,du\,dv\,dw = Ce^{-h^2u^2-k^2v^2-l^2w^2}\,du\,dv\,dw, \tag{4.2}$$

где $F(u, v, w)\,du\,dv\,dw$ обозначает вероятность того, что компоненты скорости некоторой случайно взятой звезды заключены в пределах $(u, u+du)$, $(v, v+dv)$, $(w, w+dw)$. Этот закон получил название закона эллипсоидального распределения звездных скоростей [см., например, ([6])]. Мы можем дать вывод этого закона при следующих предположениях:

A''. Существует система ортогональных осей OU, OV, OW таких, что проекции скорости звезды на эти оси статистически независимы.

B''. Найдутся две оси общего положения OX_1 и OX_2 такие, что проекции скорости той же звезды на эти оси будут тоже статистически независимыми.

При выполнении условий A'' и B'' закон эллипсоидального распределения звездных скоростей следует из теоремы 8.

Заметим, что во всех тех случаях, когда мы рассматриваем некоторый случайный вектор (что довольно часто приходится делать при решении некоторых задач статистической физики, астрономии и механики), мы можем считать, что проекции этого вектора на любую тройку ортогональных осей независимы только в том случае, когда этот случайный вектор

распределен нормально и проекции его на координатные оси имеют равные дисперсии. Во всех остальных случаях мы можем выбрать не более одной системы ортогональных осей, таких, чтобы проекции случайного вектора на них были независимыми статистически. (В данном случае речь идет о трехмерных случайных векторах.)

§ 5. В заключение докажем теорему, которая является обобщением теоремы Марцинкевича ([8]).

ТЕОРЕМА 9. *Пусть характеристическая функция некоторого случайного вектора* $\overline{X}$ *с компонентами* $x_1, x_2, \ldots, x_N$ *имеет вид*

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_N) = e^{P(t_1, t_2, \ldots, t_N)},$$

где $P(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ *в некоторой окрестности нуля* $-\delta_i \leqslant t_i \leqslant \delta_i$ — *многочлен от* N *переменных* $t_1, t_2, \ldots, t_N$. *Тогда* $P(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ *будет многочленом второй степени при любых вещественных* $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Доказательство. Рассмотрим некоторый постоянный вектор $\overline{T}$ с компонентами $t_1, t_2, \ldots, t_N$ и проекцию вектора $\overline{X}$ на этот вектор:

$$(\overline{X}, \overline{T}) = x_1 t_1 + x_2 t_2 + \cdots + x_N t_N.$$

Случайная величина $(\overline{X}, \overline{T})$ имеет характеристическую функцию

$$f(tt_1, tt_2, \ldots, tt_N) = e^{P(tt_1, tt_2, \ldots, tt_N)}.$$

Так как $P(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ в некоторой окрестности нуля является многочленом, то и $P(tt_1, tt_2, \ldots, tt_N)$ будет в некоторой окрестности нуля многочленом от t при любых $t_1, t_2, \ldots, t_N$. На основании леммы, доказанной Ю. В. Линником ([3]), $P(tt_1, tt_2, \ldots, tt_N)$ будет многочленом второй степени при любых t, откуда следует, что проекции случайного вектора $\overline{X}$ на любое направление распределены нормально. Как уже было доказано ранее, в этом случае вектор $\overline{X}$ будет распределен нормально и $P(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ — многочлен второй степени.

Поступило
25.IV.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса, Труды Ленингр. Политехнического института, № 3 (1941), 21—22.

[2] Гнеденко Б. В., Об одной теореме С. Н. Бернштейна, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 12 (1948), 97—100.

[3] Линник Ю. В., О некоторых одинаково распределенных статистиках, Доклады Ак. Наук СССР, LXXXIX, № 1 (1953), 9—11.

[4] Линник Ю. В., Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла Доклады Ак. Наук СССР, LXXXV, № 6 (1951), 1252—1254.

[5] Френкель Я. И., Статистическая физика, М.— Л., 1948.

[6] Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, М., ОГИЗ, 1946.

[7] Крамер Г., Случайные величины и распределение вероятностей, ИЛ, 1947.

[8] Marcinkiewicz J., Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Zeitschrift, Bd. 44, Heft 4.5 (1938), 612—618.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 201—206

М. А. ЕВГРАФОВ

О ПОСТРОЕНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ $F(z)$ ПО ДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ $F^{(n)}(n^2)$

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе решается вопрос о сходимости интерполяционного ряда Абеля-Гончарова для узлов интерполяции $\{n^2\}$ и соответствующая задача единственности.

Для доказательства интересующих нас утверждений понадобится несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Положим*

$$\psi(z) = \operatorname{ch}\sqrt{z}\,, \quad \Psi(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2n}}{n!} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \psi^{(n)}(n^2 z)\,.$$

Тогда

$$\Psi(z, \zeta) = \frac{1}{2z}\left[\frac{T_1'(\zeta/z)}{T_1(\zeta/z)} + \frac{T_2'(\zeta/z)}{T_2(\zeta/z)}\right], \tag{1}$$

где функции $T_1(u)$ *и* $T_2(u)$ (*вообще говоря, зависящие от* z) *определяются в окрестности точки* $u = \infty$ *равенствами*

$$u = \frac{\exp\left(\sqrt{z + T_1(u)}\right)}{T_1(u)}, \quad T_1(\infty) = 0; \quad u = \frac{\exp\left(-\sqrt{z + T_2(u)}\right)}{T_2(u)}, \quad T_2(\infty) = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$\frac{n^{2n}}{n!}\psi^{(n)}(n^2 z) = \frac{n^{2n}}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{t + n^2 z}}{t^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{\operatorname{ch} n\sqrt{t + z}}{t^{n+1}}\,dt\,, \tag{3}$$

где C — любой контур, содержащий внутри себя точку $t = 0$. Отсюда при $|\zeta| > \frac{|z|}{R} e^{\sqrt{R + |z|}}$ имеем:

$$\Psi(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \frac{\operatorname{ch} n\sqrt{t + z}}{n+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi i}\int_{|t|=R} \frac{dt}{\zeta t - z e^{\sqrt{t+z}}} + \frac{1}{4\pi i}\int_{|t|=R} \frac{dt}{\zeta t - z e^{-\sqrt{t+z}}}. \tag{4}$$

Считая, что R взято настолько малым, что функции $\frac{e^{\sqrt{t+z}}}{t}$ и $\frac{e^{-\sqrt{t+z}}}{t}$

однолистны при $|t| \leqslant R$, сделаем в первом интеграле замену $t = T_1(u)$, а во втором $t = T_2(u)$. Тогда получим $\left(\text{для } |\zeta| > \frac{|z|}{R} e^{\sqrt{R+|z|}}\right)$:

$$\Psi(z, \zeta) = \frac{1}{4\pi i z} \int_{C'} \frac{T_1'(u)\, du}{T_1(u)(\zeta / z - u)} + \frac{1}{4\pi i z} \int_{C''} \frac{T_2'(u)\, du}{T_2(u)(\zeta / z - u)},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Функция* $\Psi(z, \zeta)$, *определенная в предыдущей лемме, при любом фиксированном* z, *не лежащем на отрезке* $(-\infty, -1)$, *регулярна по* ζ *в любой односвязной области, не содержащей точек* $\zeta = 0$ *и* $\zeta = \zeta_0 = \dfrac{ze^{1+\sqrt{1+z}}}{2(1+\sqrt{1+z})}$ *(для корня берется значение, имеющее положительную действительную часть), а при фиксированном* ζ *регулярна по* z *в любой конечной односвязной области, не содержащей точек отрезка* $(-\infty, -1)$ *и точек, в которых* $\dfrac{ze^{1+\sqrt{1+z}}}{2(1+\sqrt{1+z})} = \zeta$.

Доказательство. Ни $T_1(u)$, ни $T_2(u)$ не обращаются в нуль ни при каком конечном u. Поэтому особыми точками $\Psi(z, \zeta)$ могут быть лишь точки, являющиеся особыми для $T_1\left(\frac{\zeta}{z}\right)$ или $T_2\left(\frac{\zeta}{z}\right)$. Таковыми могут быть точки, в которых или

$$T_1(\zeta / z) = -z, \quad T_2(\zeta / z) = -z, \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{e^{\sqrt{z+t}}}{t}\right)_t' = 0, \quad \frac{e^{\sqrt{z+t}}}{t} = \frac{\zeta}{z}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{e^{-\sqrt{z+t}}}{t}\right)_t' = 0, \quad \frac{e^{-\sqrt{z+t}}}{t} = \frac{\zeta}{z}. \tag{7}$$

Равенство (5) приводит к соотношению

$$\zeta = -1,$$

равенство (6) — к соотношению

$$\zeta = \frac{ze^{1+\sqrt{1+z}}}{2(1+\sqrt{1+z})},$$

а равенство (7) — к соотношению

$$\zeta = \frac{ze^{-1+\sqrt{1+z}}}{2(1-\sqrt{1+z})}.$$

В точках, определяемых равенствами (5) и (7), особых точек не будет (из-за сложения двух ветвей). В этом проще всего убедиться косвенным образом. Рассмотрим последовательность функций

$$\left\{\left(\frac{n^{2n}}{n!}\psi^{(n)}(n^2 z)\right)^{1/n}\right\}.$$

Во-первых,

$$\left|\frac{n^{2n}}{n!}\psi^{(n)}(n^2 z)\right|^{1/n} \leqslant \frac{e^{\sqrt{R+|z|}}}{R}. \tag{8}$$

Во-вторых, эти функции регулярны вне множества нулей $\psi^{(n)}(n^2z)$, а $\psi^{(n)}(z)$ по теореме Лагерра могут иметь нули лишь на отрицательной части действительной оси. Значит, эта последовательность является нормальным семейством в плоскости, разрезанной по отрицательной части действительной оси. Затем, если бы точки $\zeta = -1$ или $\zeta = \frac{ze^{-1-\sqrt{1+z}}}{2(1-\sqrt{1+z})}$ были особыми, то мы имели бы:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{n^{2n}}{n!} \psi^{(n)}(n^2z) \right|^{1/n} = \frac{1}{|z|}$$

или

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{n^{2n}}{n!} \psi^{(n)}(n^2z) \right|^{1/n} = \frac{e^{-1+\mathrm{Re}\sqrt{1+z}}}{2|1-\sqrt{1+z}|},$$

что при малых $|z|$ противоречило бы оценке (8). Следовательно, при малых z

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^{2n}}{n!} \psi^{(n)}(n^2z) \right]^{1/n} = \frac{e^{1+\sqrt{1+z}}}{2(1+\sqrt{1+z})},$$

а в силу нормальности семейства, это справедливо для всех z в плоскости, разрезанной по лучу $(-\infty, -1)$. Это и дает нам утверждение леммы.

ЛЕММА 3. *В окрестности точки* $\zeta = \zeta_0 = \frac{ze^{1+\sqrt{1+z}}}{2(1+\sqrt{1+z})}$ *справедливо разложение*

$$\Psi(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta} \left\{ \varphi(z) \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} + \varphi_0(z) + \varphi_1(z) \left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots \right\},$$

где

$$\varphi(z) = \sqrt{8} \frac{(1+\sqrt{1+z})^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{1+z}} e^{-\frac{1+\sqrt{1+z}}{2}}.$$

Доказательство. Положим

$$v(t) = \frac{1}{t} e^{\sqrt{z+t}}, \quad \zeta / z = u, \quad \zeta_0 / z = u_0, \quad t_0 = 2(1+\sqrt{1+z}).$$

В окрестности точки $t = t_0$ для $v(t)$ справедливо разложение:

$$u = v(t) = v(t_0) + (t-t_0)^2 \frac{v''(t_0)}{2!} + \cdots, \quad v(t_0) = u_0.$$

Отсюда

$$u - u_0 = (t-t_0)^2 \frac{v''(t_0)}{2!} + (t-t_0)^3 \frac{v'''(t_0)}{3!} + \cdots$$

и если $v''(t_0) \neq 0$, то, обращая этот ряд, получаем

$$t - t_0 = a_0 (u-u_0)^{\frac{1}{2}} + a_1 (u-u_0) + a_2 (u-u_0)^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

или, если $u_0 \neq 0$,

$$t - t_0 = a'_0 \left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + a'_1 \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) + a'_2 \left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{\frac{3}{2}} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{u} \left\{ a''_0 \left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + a''_1 \left(1 - \frac{u_0}{u}\right) + \cdots \right\},$$

где $a_0'' = a_0' u_0 = a_0 u_0^{\frac{3}{2}} = 2u_0^{\frac{3}{2}} / v''(t_0)$. Таким образом, в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$ для $T_1(u)$ справедливо разложение

$$T_1(u) = t_0 + \frac{a_0''}{u}\left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots .$$

Отсюда получаем:

$$\frac{T_1'(u)}{T_1(u)} = \frac{b_0}{u}\left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{b_1}{u} + \frac{b_2}{u}\left(1 - \frac{u_0}{u}\right)^{\frac{1}{2}} + \cdots .$$

Здесь

$$b_0 = \frac{a_0''}{2u_0 t_0} = \frac{u_0^{\frac{1}{2}}}{t_0 v''(t_0)} .$$

Что же касается $\frac{T_2'(u)}{T_2(u)}$, то от него добавятся лишь члены с положительными показателями. Поэтому

$$\Psi(z. \zeta) = \frac{1}{2z}\left[\frac{T_1'\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{T_1\left(\frac{\zeta}{z}\right)} + \frac{T_2'\left(\frac{\zeta}{z}\right)}{T_2\left(\frac{\zeta}{z}\right)}\right] = \frac{\zeta_0^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} t_0 v''(t_0)} \frac{1}{\zeta}\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)^{-\frac{1}{2}} + \cdots .$$

Вычисляя $v''(t_0)$, получаем искомый результат.

ЛЕММА 4. *Для функции*

$$\Psi_1(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \psi^{(n)}(n^2 z)$$

справедливы те же утверждения относительно регулярности, что и в лемме 2 для функции $\Psi(z, \zeta)$ *с заменой* ζ_0 *на*

$$\zeta_1 = \frac{4\zeta_0}{e^2} = 2\left(\sqrt{1+z} - 1\right) e^{\sqrt{1+z} - 1} .$$

Кроме того, в окрестности точки $\zeta = \zeta_1$

$$\Psi_1(z, \zeta) = \frac{\pi^{-\frac{1}{2}} \varphi(z)}{\zeta - \zeta_1} + O\left(|\zeta - \zeta_1|^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}} t^n .$$

Так как [см. ([2]), § 12.3, пример] при $x > 0$

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \frac{1}{2}\left\{\frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{(x+1)(x+2)} + \cdots\right\},$$

а ряд [см. ([3])]

$$(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^s t^n$$

имеет на конечном расстоянии единственную особую точку $t = 1$, то при помощи теоремы Адамара о перемножении особенностей получаем первую

часть утверждения леммы. Для получения второй части заметим, что если $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n t^n$ имеет в окрестности точки $t=t_0$ вид

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(t-t_0)^{\frac{n}{2}},$$

то $f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\sqrt{n+1}\,t^n$ будет порядка $O(\ln|t-t_0|)$ в той же окрестности. Кроме того, если

$$f(t)=\frac{1}{t}\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n}{t^{n+1}},$$

то

$$f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_n\sqrt{n+1}}{t^{n+1}}=\frac{\pi^{-\frac{1}{2}}}{t-t_1}+O\left(|t-t_1|^{-\frac{1}{2}}\right),$$

что и доказывает вторую часть утверждения леммы.

Теперь мы в состоянии доказать интересующие нас результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Если целая функция*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n)!}z^n$$

такова, что все особенности $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$ *заключены в области* $|\sqrt{1+z}-1||e^{\sqrt{1+z}}|<1$ (*т. е. в связной компоненте этого множества, содержащей точку* $z=0$), *то* $F(z)$ *может быть представлена сходящимся интерполяционным рядом Абеля-Гончарова (узлы интерполяции* $\{n^2\}$). *В частности, это условие будет выполнено, если*

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\ln|F(z)|}{|z|^{\frac{1}{2}}}<r_0^2-1,\quad (r_0-1)e^{r_0}=1. \tag{9}$$

Доказательство. В силу лемм 2, 3, 4, утверждение теоремы следует из теоремы 1 § 5 и замечания 9 § 1 статьи ([1]) при

$$\Phi(z,\zeta)=\operatorname{ch}\sqrt{z\zeta},\quad \varphi(z)=2(\sqrt{1+z}-1)e^{\sqrt{1+z}-1}.$$

При выполнении условия (9) особые точки $f(\zeta)$ лежат в круге $|z|<r_0^2-1$, который содержится в области $|\sqrt{1+z}-1||e^{\sqrt{1+z}}|<1$.

ТЕОРЕМА 2. *Если целая функция*

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n)!}z^n$$

такова, что все особенности $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$ *лежат в области однолистности функции* $(\sqrt{1+z}-1)e^{\sqrt{1+z}-1}$, *содержащей точку* $z=0$ *и не*

содержащей точек отрезка $(-\infty, -1)$, *то из условий* $F^{(n)}(n^2)=0$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *следует* $F(z)\equiv 0$.

Доказательство. В этом случае сошлемся на теорему 2 § 5 и замечание 8° § 1 статьи (1).

ТЕОРЕМА 3. *Если точки* z_1 *и* z_2 *не лежат на отрезке* $(-\infty, -1)$ *и*

$$(\sqrt{1+z_1}-1)\, e^{\sqrt{1+z_1}} = (\sqrt{1+z_2}-1)\, e^{\sqrt{1+z_2}},$$

то существует функция

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(2n)!}z^n$$

такая, что $f(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\zeta^{n+1}}$ *имеет своими особыми точками лишь* $\zeta=z_1, \zeta=z_2$ *и* $\zeta=0$, *а* $F^{(n)}(n^2)=0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \; F(z)\not\equiv 0$.

Доказательство. В этом случае сошлемся на теорему 3 § 5 и замечание 10° статьи (1).

Не приводя здесь доказательства, отметим только, что область, указанную в теореме 1, нельзя заменить большей, и что совершенно аналогичные результаты могут быть получены для узлов интерполяции $\{n^k\}$, где k — любое целое положительное число, без привлечения каких-либо новых соображений.

Поступило
30. V. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Евграфов М. А., О полноте систем аналитических функций, близких к $\{z^n P(z)\}$, $\{[\varphi(z)]^n\}$, и о некоторых интерполяционных задачах, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 421—460.

[2] Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, ч. II, М.— Л., 1934.

[3] Lindelöf E., Le calcul des résidus, Paris, 1905.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 207—212

К. Я. ЛАТЫШЕВА

ПО ПОВОДУ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА Н. С. КОШЛЯКОВА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Показывается возможность расширения множества значений параметров уравнения Ляме, при которых существуют частные решения, найденные Н. С. Кошляковым.

В работе Н. С. Кошлякова [1] рассматривается обобщенное уравнение Ляме, коэффициенты которого выражаются через эллиптические функции Якоби и зависят от нескольких параметров. Одной из задач упомянутого исследования является нахождение множеств тех значений параметров, при которых данное уравнение допускает решение в форме некоторой алгебраической зависимости от $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.

Вопрос о нахождении решения указанной формы для обобщенного уравнения Ляме Н. С. Кошляков связывает с вопросом о разыскании полиномиальных решений некоторых линейных дифференциальных уравнений. Так как в математической литературе еще не известны удобные способы нахождения подобных решений, то полученные линейные уравнения автор сводит к таким, о которых заведомо известно, что они могут иметь решения в виде полиномов, а именно,— к уравнению Гаусса и к уравнению Якоби. Значения параметров, при которых уравнения Гаусса и Якоби допускают решения в виде многочленов, составляют множество тех их значений, при которых названная задача Н. С. Кошлякова разрешима.

Опираясь на наше исследование, можно расширить множество значений параметров уравнения Ляме, при которых существуют частные решения, найденные Н. С. Кошляковым.

Уравнения Гаусса и Якоби являются частными видами (при $n=2$) уравнения:

$$L[y] \equiv \sum_{i=0}^{n} (p_i + s_i x)\, x^{n-i} \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} = 0, \tag{1}$$

где p_i и s_i — некоторые вещественные числа, подчиняющиеся неравенствам:

$$\sum_{i=0}^{n} |p_i| > 0, \quad \sum_{i=0}^{n} |s_i| > 0.$$

В зависимости от того, равно ли p_0 нулю или нет, точка $x=0$ является иррегулярной или регулярной особой точкой уравнения (1). Если $p_0 \neq 0$, то рассматриваемое уравнение имеет решение вида

$$y = x^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \tag{2}$$

ряд в выражении которого сходится в окрестности $x=0$. Другие решения, существующие в окрестности данной точки, могут содержать логарифмические члены.

В случае иррегулярности особой точки $x=0$ ряды в выражении (2), если только существуют в этом случае подобные представления решений, расходятся, и самые решения (2) являются формальными.

Какова бы ни была особенность точки $x=0$, показатель α и коэффициенты a_i ряда (2) определяются из рекуррентных соотношений следующего вида:

$$a_0 f_0(\alpha) = 0,$$

$$a_j f_0(\alpha + j) + a_{j-1} f_1(\alpha + j - 1) = 0 \tag{3}$$

($j = 1, 2, \ldots$), где функции $f_i(r)$ определяются как коэффициенты при различных степенях независимого переменного в левой части уравнения (1), если в него вместо y вводится x^r с неопределенным r:

$$L[x^r] \equiv x^r [f_0(r) + x f_1(r)].$$

Показатель α выражения (2) находим из уравнения $f_0(\alpha) = 0$, а коэффициенты a_i — из уравнений (3):

$$a_i = -\frac{f_1(\alpha + i - 1)}{f_0(\alpha + i)} a_{i-1}. \tag{4}$$

Из формулы (4) вытекает, что:

1) значения a_i определены тогда, когда для $i = 1, 2, \ldots$ выражение $f_0(\alpha + i)$ не равно нулю;

2) если найдется значение $i = k$ такое, что

$$f_0(\alpha + t) \neq 0 \quad (t = 1, 2, \ldots k),$$

$$f_1(\alpha + j - 1) \neq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots k - 1),$$

$$f_1(\alpha + k - 1) = 0,$$

то $a_k = 0$;

3) если, кроме определенного в пункте 2) числа k, существует еще такое целое число $l > k$, что

$$f_0(\alpha + i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l - 1)$$

$$f_0(\alpha + l) = 0,$$

то $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{l-1} = 0$, а значение $a_l = \left(\frac{0}{0}\right)$ имеет неопределенную величину.

Следовательно, в силу выражения (4), значения последующих параметров $a_{l+j}\ (j = 1, 2, \ldots)$ зависят от новой произвольной величины a_l и не зависят от предыдущих;

4) если числа k и l совпадают ($k = l$) и

$$f_0(\alpha + i) \neq 0, \quad f_1(\alpha + i - 1) \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l - 1)$$

$$f_0(\alpha + l) = 0, \quad f_1(\alpha + l - 1) = 0,$$

то a_l снова имеет произвольное значение. В силу формулы (4), значения последующих параметров будут выражаться только через эту новую произвольную постоянную и не будут зависеть от $a_0, \ldots, a_{l-1}$;

5) если же не существует числа, подобного k, и $a_{l-1} \neq 0$,

$$f_0(\alpha + i) \neq 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant l - 1),$$

$$f_0(\alpha + l) = 0,$$

$$f_1(\alpha + l - 1) \neq 0,$$

то, как известно из общей теории линейных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами, в этом случае появляются решения, содержащие логарифмы.

Отметим, что k и l — целые положительные числа и, значит, следует рассматривать только те корни

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha \tag{5}$$

уравнения $f_0(r) = 0$ и те корни

$$\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_l \tag{6}$$

уравнения $f_1(r) = 0$, которые различаются на целые числа не только в каждой группе отдельно, но и в совокупности (для простоты записи числа (5) и (6) предполагаются вещественными).

Опираясь на сделанный анализ равенства (4), можно доказать необходимые и достаточные условия существования решения уравнения (1) в замкнутой форме:

$$y = x^\alpha(a_0 + a_1x + \ldots + a_qx^q), \tag{7}$$

где α — некоторое вещественное *, q — целое неотрицательное.

Обозначим (ради удобства) правую часть равенства (7) символом $(\alpha, \alpha + q)$, указывая в скобке наименьшую и наивысшую степень независимого переменного в рассматриваемом выражении.

---

* Для комплексного значения α вид решения (сложняется.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы дифференциальное уравнение* (1) *имело решение вида* (7), *необходимо и достаточно, чтобы среди* $\alpha_i\,(\alpha_i < \alpha_{i+1})$ — *совокупности корней уравнения* $f_0(\alpha)=0$, *отличающихся на целые числа, и среди* $\beta_j\,(\alpha_j < \beta_{j+1})$ — *совокупности корней уравнения* $f_1(\beta)=0$, *отличающихся на целые числа, имелись такие* α_ν *и* β_λ, *для которых*

а) *разность* $\beta_\lambda - \alpha_\nu$ *равняется целому неотрицательному числу* q;

б) *удовлетворяются неравенства*:

$$\beta_{\lambda-1} < \alpha_\nu \leqslant \beta_\lambda < \alpha_{\nu+1}. \tag{8}$$

Величина разности $\beta_\lambda - \alpha_\nu = q$ определяет степень независимого переменного x в скобке выражения (7).

Если между корнями (5) и (6) уравнений $f_0(\alpha)=0$ и $f_1(\beta)=0$ имеется несколько пар значений α и β, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям теоремы, то столько же существует и решений вида (7).

Рассмотрим с точки зрения наших условий полиномы Якоби. Для уравнения Якоби

$$x(1-x)y'' + [q-(p+1)x]\,y' + (p+n)ny = 0 \tag{9}$$

имеем такие значения корней:

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1-q,$$
$$\beta_1 = -n-p, \quad \beta_2 = n$$

соответственно уравнений

$$f_0(\alpha) \equiv \alpha^2 + (q-1)\alpha = 0,$$
$$f_1(\beta) = -\beta^2 - p\beta + pn + n^2 = 0.$$

Известное решение уравнения (9) — полином Якоби

$$S_n(p,q,x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\cdots(q+p-1)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}\right]$$

принадлежит к решениям $(0, n)$, где n — целое неотрицательное число.

Согласно нашей теории, возможно еще любое из решений:

$$(0,\ -n-p), \quad (1-q,\ n), \quad (1-q,\ -n-p)$$

или даже два из них.

В каждом из этих случаев параметры, входящие в коэффициенты уравнения, должны подчиняться условиям, вытекающим из неравенств (8).

Мы их выпишем только для одного вида полиномиальных решений уравнения Якоби, а именно для того, к которому оно принадлежит само. Решение $(0, n)$ существует, если в предположении, что n — целое неотрицательное число, удовлетворяется одно из следующих условий:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ p \text{ и } q \text{ — дробные числа;}\\
2)\ q \text{ — дробное, } p \text{ — целое, } n+p>0;\\
3)\ q \text{ — дробное, } p \text{ — целое, } 2n+p<0;\\
4)\ p \text{ — дробное, } q \text{ — целое, } q>1;\\
5)\ p \text{ — дробное, } q \text{ — целое, } q+n<1;\\
6)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } 1+n+p\leqslant q,\ q+n<1;\\
7)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } 2n+p<0,\ q<1+n+p;\\
8)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } q>1,\ 2n+p<0;\\
9)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } n+p>0,\ 1>q+n;\\
10)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } 1+n+p\leqslant q,\ n+p>0;\\
11)\ p \text{ и } q \text{ — целые числа, } q<1+n+p,\ 1<q.
\end{array}\right\} \quad (10)$$

В случае 6) и 10), кроме решения $(0, n)$, существует еще второе решение $(1-q, -n-p)$.

Как известно [см. (2), стр. 83], полиномы Якоби существуют только тогда, когда

$$q>0, \quad p-q>-1. \quad (11)$$

Эти неравенства могут удовлетворяться в каждом из наших случаев, следовательно, полиномы Якоби содержатся в даваемых нами решениях, как частный случай. Но при соблюдении условий (10) уравнение (9) может иметь и другие решения вида (7), для которых неравенства (11) не удовлетворяются и которые, следовательно, не принадлежат к полиномам Якоби.

Сделаем еще одно замечание. В учебниках [например, (2), стр. 83] можно прочесть, что полином Якоби «представляет единственное целое рациональное решение этого (т. е. (9)) уравнения». Это утверждение верно только при условиях (11), допускающих решение уравнения (9) в виде полинома Якоби. Оно перестает быть верным, если p и q не удовлетворяют неравенствам (11).

Например, если в (9) положим $q=-1$, $p=-4$, $n=3$, то полученное уравнение

$$x(1-x)y''+(-1+3x)y'-3y=0$$

имеет два целых рациональных решения:

$$y_1=1-3x,$$

$$y_2=x^2(3-x).$$

Таким образом, уравнение Якоби представляет больше возможностей для существования решений вида (7), чем это было известно до сих пор.

Следовательно, и задача, исследуемая Н. С. Кошляковым в названной нами статье, разрешима для более обширного множества значений параметров, чем то, которое в ней указано.

Легко видеть также, что наши условия существования решений вида (7) делают явными неравенства, существующие для параметров уравнения Гаусса, в том случае, когда его решение — гипергеометрический ряд —

вырождается в многочлен. Кроме того, они обеспечивают существование одновременно двух линейно независимых решений уравнения Гаусса в виде полиномов.

Следовательно, в случае необходимости иметь решения уравнения (1) полиномиального вида нет нужды приводить рассматриваемые уравнения к уравнениям Гаусса, Якоби и им подобным.

Поступило
22.IV.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., Исследование одного класса дифференциальных уравнений с двояко-периодическими коэффициентами, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 16 (1952), 537—562.

[2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики. I, М.— Л., 1951.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 213—260

Н. С. КОШЛЯКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ. II

В настоящей статье, представляющей собою продолжение работы ([4]), излагается теория сумматорных формул в изучаемом алгебраическом поле и их применение к исследованию различного рода специальных функций.

§ 3. Сумматорные формулы для сумм вида $\sum\limits_{n=1} F(n) f(n)$

12°. Весьма многие результаты, установленные нами в предыдущей статье [см. ([4])], являются частными случаями разложений вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) f(n), \tag{12.1}$$

где $f(z)$ обозначает произвольную функцию, подчиненную некоторым ограничительным условиям.

Суммы вида (12.1) могут быть выражены через определенные интегралы, благодаря чему получаются особые сумматорные формулы, облегчающие в большинстве случаев изучение свойств функций, представляемых разложениями (12.1).

Имея в виду вывести несколько типов такого рода сумматорных формул, рассмотрим в первую очередь функцию $F(s)$ комплексной переменной $s = \tau + it$, относительно которой предположим, что она голоморфна в области, определяемой неравенствами

$$-\alpha < \tau < \beta + 1, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad \beta > 0, \tag{12.2}$$

за исключением точки $s = 0$, где она имеет полюс первого порядка. Пусть, сверх того, для всех достаточно больших значений $|t|$ имеет место равномерная относительно τ оценка

$$F(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|} |t|^{m\tau - n}\right), \quad \tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2, \tag{12.3}$$

где m и n обозначают положительные величины, удовлетворяющие условию

$$\frac{m}{2} + n \geqslant 1. \tag{12.4}$$

Рассмотрим функцию $f(x)$, которую определяем для всех положительных значений x посредством интеграла

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds,\quad x>0,\quad 0<\tau\leqslant\beta+1. \tag{12.5}$$

Из этого равенства вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+1-i\infty}^{\beta+1+i\infty}F(s)\zeta_{\Omega}(s)\,ds,\quad \beta>0, \tag{12.6}$$

причем совершенная здесь перестановка порядков суммирования и интегрирования произведена на законном основании, так как бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\beta+1}}$$

сходится абсолютно при $\beta>0$, равно как и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\beta+1+it)|\,dt,$$

что следует из оценки (12.3).

Интегрируя функцию, стоящую под знаком интеграла в соотношении (12.6), по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta+1-iT),\quad B(\beta+1+iT),\quad C(-\alpha+iT),\quad D(-\alpha-iT) \tag{12.7}$$

и замечая, что в силу оценки (12.3) интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, в пределе при $T\to+\infty$ обращаются в нуль, мы придем к равенству:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)f(n)=R_0+R_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}F(s)\zeta_{\Omega}(s)\,ds, \tag{12.8}$$

где через R_0 и R_1 обозначены вычеты подинтегральной функции относительно ее простых полюсов $s=0$ и $s=1$.

Для определения вычета R_0 проинтегрируем функцию $\frac{F(s)}{x^s}$ по обводу прямоугольника (12.7); тогда в пределе при $T\to+\infty$ мы получим равенство

$$f(x)=R+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}\frac{F(s)}{x^s}\,ds,\quad x>0, \tag{12.9}$$

где через R обозначен вычет функции $F(s)$ относительно полюса $s=0$.

Так как по условию $\alpha>0$, то

$$\left|\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}\frac{F(s)\,ds}{x^s}\right|<x^{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|F(-\alpha+it)\Big|\,dt,\quad x>0. \tag{12.10}$$

Интеграл, стоящий здесь справа, сходится в силу оценки (12.3), поэтому мы можем написать равенство

$$f(x) = R + O(x^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{12.11}$$

откуда ясно, что

$$R = f(0)$$

и, следовательно,

$$R_0 = \zeta_{\Omega}(0) f(0). \tag{12.12}$$

Для нахождения вычета R_1 заметим, что для функции $F(s)$ выполняются все условия, при которых можно применить преобразование Меллина, вследствие чего мы можем написать, что

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx. \tag{12.13}$$

Замечая, что вычет дедекиндовой функции относительно полюса $s = 1$ равен

$$R_{r_1, r_2} = -\frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \tag{12.14}$$

найдем, что

$$R_1 = R_{r_1, r_2} \lim_{s \to 1} F(s) = -\frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int^{\infty} f(x) dx. \tag{12.15}$$

Для преобразования интегрального члена, стоящего в правой части равенства (12.8), обратимся к формуле (12.9). Будем считать x величиной комплексной с положительной вещественной частью, т. е.

$$x = |x| e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant +\frac{\pi}{2}. \tag{12.16}$$

Докажем, что $f(x)$ будет аналитической функцией в области, определяемой неравенствами (12.16). Действительно, для комплексных значений x оценка (12.10) заменяется оценкой

$$\left| \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} \frac{F(s)}{x^s} ds \right| < |x|^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\pi}{2}|t|} |F(-\alpha + it)| dt. \tag{12.17}$$

Выберем α лежащим в интервале $\frac{1}{2} < \alpha < 1$; тогда в силу оценки (12.3) подинтегральная функция в правой части неравенства (12.17) будет при больших значениях $|t|$ порядка

$$O\left(\frac{1}{|t|^{m\alpha + n}}\right) = \left(\frac{1}{|t|^{\lambda}}\right), \quad \lambda > 1, \tag{12.18}$$

откуда мы можем заключить, что интеграл

$$\int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} \frac{F(s)}{x^s} ds$$

будет сходящимся.

Отсюда ясно, что $f(x)$ будет регулярной функцией для всех значений θ, лежащих в области (12.16), и мы вправе написать равенство:

$$\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty}F(s)\sin\frac{\pi s}{2}\,\frac{ds}{x^s},\quad x>0. \tag{12.19}$$

Умножим обе части этого равенства на функцию $\sigma(x)$ и проинтегрируем затем по x в пределах от $x=0$ до $x=\infty$; тогда мы найдем, что

$$-2\int\limits_0^\infty\frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\sigma(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty F(s)\,2\sin\frac{\pi s}{2}\,\sigma(x)\,x^{-s}\,ds\,dx. \tag{12.20}$$

Докажем, что в правой части порядки интегрирования могут быть переставлены. С этой целью положим для краткости

$$g(x,t,a)=F(a+it)\sin\frac{\pi}{2}(a+it)\,x^{-a-i}+$$

$$+F(a-it)\sin\frac{\pi}{2}(a-it)\,x^{-a+it}; \tag{12.21}$$

тогда из оценки

$$F(-\alpha+it)\sin\frac{\pi}{2}(-\alpha+it)=O\left(\frac{1}{|t|^{\alpha m+1}}\right)=O\left(\frac{1}{|t|^{\lambda}}\right),\quad \lambda>1, \tag{12.22}$$

будет следовать, что]

$$\left|\int\limits_A^{+\infty}g(x,t,-\alpha)\,\sigma(x)\,dx\right|<\varepsilon_A\varphi(t), \tag{12.23}$$

где

$$\varepsilon_A=\frac{K}{A^\eta},\quad \eta>0,\quad \varphi(t)=\frac{1}{t^\lambda},\quad \lambda>1,$$

а K обозначает конечную величину, не зависящую от A. Из этих соотношений видно, что ε_A стремится к нулю равномерно относительно t, когда A увеличивается до бесконечности, а функция $\varphi(t)$ ограничена и интегрируема в интервале $(t_0, +\infty)$. С другой стороны,

$$\left|\int\limits_B^{+\infty}g(x,t,-\alpha)\,\sigma(x)\,dt\right|<\varepsilon_B\psi(x), \tag{12.24}$$

где

$$\varepsilon_B=\frac{B^{1-\lambda}}{1-\lambda},\quad \lambda>1,\quad \psi(x)=x^\alpha\sigma(x).$$

Из этих выражений видно, что величина ε_B стремится к нулю равномерно относительно x, когда B возрастает до бесконечности, а функция $\psi(x)$ ограничена и интегрируема в интервале $(x_0, +\infty)$.

Из неравенств (12.23), (12.24) и вытекает, в силу теоремы Жордана, законность перестановки бесконечных пределов интегрирования.

Произведя такую перестановку и замечая, что при $\mathrm{Re}(s) = -\alpha < 0$ справедлива формула

$$2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty \sigma(x)\, x^{-s}\, dx = \zeta_\Omega(s),$$

найдем, что

$$-2\int_0^\infty \frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\,\sigma(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} F(s)\,\zeta_\Omega(s)\,ds.$$

Подставляя это соотношение в равенство (12.8), получим следующую сумматорную формулу:

$$\sum_{n=1}^\infty F(n)\,f(n) = \zeta_\Omega(0)\,f(0) - \frac{2^{r+1}\,\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_0^\infty f(x)\,dx -$$

$$-2\int_0^\infty \frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\,\sigma(x)\,dx. \qquad \text{(I)}$$

В частном случае рационального поля эта формула переходит в сумматорную формулу Плана:

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) = -\frac{1}{2}f(0) + \int_0^\infty f(x)\,dx - 2\int_0^\infty \frac{f(ix)-f(-ix)}{2i}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}. \qquad (12.25)$$

13°. Может оказаться, что какое-нибудь из условий, наложенных на функцию $F(s)$, не будет выполняться и тогда формула (I) должна быть подвержена соответствующей модификации.

Чтобы показать это, положим

$$f(x) = K_{r_1, r_2}\left(\frac{ax}{A^2}\right), \quad a > 0. \qquad (13.1)$$

Напомним, что

$$K_{1,0}(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-2x} \text{ для рационального поля,} \qquad (13.2)$$

$$K_{0,1}(x) = \frac{K_0(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - K_0(2\varepsilon\sqrt{x})}{i} \text{ для мнимого квадратичного поля,} \qquad (13.3)$$

$$K_{2,0}(x) = 2\,\{K_0(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + K_0(4\varepsilon\sqrt{x})\} \text{ для вещественного квадратичного поля.} \qquad (13.4)$$

Эти формулы показывают, что $x = 0$ будет обыкновенной точкой лишь для двух первых случаев. В третьем же случае функция $f(x) = K_{2,0}\left(\frac{ax}{A^2}\right)$ будет иметь в точке $x = 0$ особенность логарифмического характера, как это усматривается из разложения

$$K_0(x) = -\log\frac{x}{2}\, I_0(x) + \sum_{m=0}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\,\psi(m+1); \qquad (13.5)$$

поэтому член $\zeta_\Omega(0)\,f(0)$ в формуле (I) смысла не имеет и должен быть заменен другим выражением.

Чтобы установить это выражение, обратимся к формуле (12.13), из которой вытекает, что

$$F(s)=\frac{\Gamma(s)}{2^{2s}\pi^{s-\frac{1}{2}}(ax)^s},\quad a>0,\ \text{для рационального поля,}\tag{13.6}$$

$$F(s)=\frac{\Gamma^2(s)\sin\frac{\pi s}{2}}{\left(2\pi\sqrt{\frac{ax}{|\Delta|}}\right)^{2s}},\quad a>0,\ \text{для мнимого квадратичного поля,}\tag{13.7}$$

$$F(s)=\frac{2\Gamma^2(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{\left(2\pi\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right)^{2s}},\quad a>0,\ \text{для вещественного квадратичного поля.}\tag{13.8}$$

Рассматривая функцию $F(s)$ и принимая во внимание оценку

$$\Gamma(s)=O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\tau-\frac{1}{2}}\right),\quad \tau_1<\tau<\tau_2,$$

мы без труда убедимся, что для этой функции выполняются все условия, перечисленные в n^0 12, за исключением случая вещественного квадратичного поля. Действительно, в последнем случае функция $F(s)$ будет иметь точку $s=0$ полюсом уже не 1-го, а 2-го порядка, что изменяет вид формулы (I). В самом деле, так как для функции (13.8) точка $s=0$ будет полюсом 2-го порядка, то число R в соотношении (12.19) уже не будет постоянной, т. е. не зависящей от x, величиной, поэтому мы не имеем права написать равенство $R=f(0)$. Чтобы установить, какое же число следует брать вместо выражения (12.12), заметим, что в рассматриваемом случае вычет функции $\frac{F(s)}{x^s}$ относительно полюса $s=0$ будет равен

$$R=D_s\left\{\frac{2\Gamma^2(s+1)\cos\frac{\pi s}{2}}{\left(2\pi\sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right)^{2s}x^{2s}}\right\}_{s=0}=-4\log x-4C-4\log\left(2\pi\sqrt{\frac{a}{\Delta}}\right),$$

откуда следует, что выражение (12.11) должно быть заменено равенством

$$f(x)=-4\log x-4C-4\log\left(2\pi\sqrt{\frac{a}{\Delta}}\right)+O(x^\alpha),\quad 0<\alpha<1,\tag{13.9}$$

что, между прочим, вытекает и из разложения (13.5).

Так как для вещественного квадратичного поля

$$\zeta_\Omega(0)=0,$$

то произведение $\zeta_\Omega(0)f(0)$ принимает неопределенную форму. Для раскрытия этой неопределенности заметим, что функция $F(s)\zeta_\Omega(s)$ имеет в точке $s=0$ попрежнему полюс 1-го порядка с вычетом, равным

$$R_1=\{s^2F(s)\}_{s=0}\left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{s}\right\}_{s=0}=2\zeta'_\Omega(0).\tag{13.10}$$

Поэтому выражение (12.12) должно быть заменено равенством (13.10).

Из всего вышеизложенного следует, что в рассматриваемом частном

случае сумматорная формула (I) должна быть для вещественного квадратичного поля заменена формулой

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) K_{2,0}\left(\frac{an}{A^2}\right) = 2\zeta'_\Omega(0) - 2\int_0^\infty \frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} \sigma(x)\, dx, \tag{I$_1$}$$

где

$$f(x) = 2\left\{K_0\left(4\pi\varepsilon \sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right) + K_0\left(4\pi\bar{\varepsilon} \sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right)\right\},$$

и окончательно формулы (I) и (I_1) дают значения уже известных нам интегралов:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}\, dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^a - 1} - \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\right\}, \quad a > 0,$$

для рационального поля;

$$\int_0^\infty \left\{\frac{2}{\pi} K_0\left(4\pi \sqrt{\frac{ax}{|\Delta|}}\right) + Y_0\left(4\pi \sqrt{\frac{ax}{|\Delta|}}\right)\right\} \sigma(x)\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\left\{\sigma(a) - \frac{1}{\pi a} + \frac{\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right\}, \quad a > 0,$$

для мнимого квадратичного поля;

$$\int_0^\infty J_0\left(4\pi \sqrt{\frac{ax}{\Delta}}\right) \sigma(x)\, dx = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left\{\sigma(a) - \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \zeta'_\Omega(0)\right\}, \quad a > 0,$$

для вещественного квадратичного поля.

14°. Кроме рассмотренного особого случая, когда сумматорная формула (I) непосредственно не применяется, может оказаться, что либо для функции $F(s)$ не выполняются какие-нибудь другие из вышеперечисленных условий, например, не выполняется оценка (12.3), что имеет место для функции

$$f(z) = e^{-\rho z^2}, \quad \rho > 0,$$

либо формула (I) ничего не дает, так как она приводится к тождественному равенству $0 \equiv 0$, в чем можно убедиться на примере функции

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\pi\tau^2 - 2\pi z\tau}\, d\tau, \quad \mathrm{Re}(z) > 0.$$

Однако можно модифицировать интегральный член формулы (I) так, что она окажется применимой и в этих случаях.

Чтобы показать это, допустим, что функция $F(s)$ голоморфна в полосе, определяемой неравенствами

$$-\frac{1}{2} \leqslant \tau \leqslant \beta + 1, \quad \beta > 0,$$

и пусть при достаточно больших значениях $|t|$ имеет место равномерная относительно τ оценка

$$F(s) = O\left(\frac{1}{|t|^\lambda}\right), \quad \lambda > 1, \quad \tau_1 < \tau < \tau_2. \tag{14.1}$$

Тогда, интегрируя функцию $F(s)\zeta_\Omega(s)$ по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta+1-iT),\quad B(\beta+1+iT),\quad C\left(\frac{1}{2}+iT\right),\quad D\left(\frac{1}{2}-iT\right)$$

и принимая во внимание оценки

$$F(s)=O\left(\frac{1}{|t|^\lambda}\right),\quad \lambda>1;\quad \zeta_\Omega(s)=O(|t|^{(1-\tau)}),\quad \frac{1}{2}<\tau<\beta+1,$$

без труда найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)f(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta+1-i\infty}^{\beta+1+i\infty} F(s)\zeta_\Omega(s)\,ds=R_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} F(s)\zeta_\Omega(s)\,ds, \quad (14.2)$$

где через R_1 обозначен вычет функции $F(s)\zeta_\Omega(s)$ относительно полюса $s=1$.

Введем для краткости обозначения:

$$\Xi_\Omega(t)=\xi_\Omega\left(\frac{1}{2}+it\right),\quad \xi_\Omega(t)=A^s\left\{\frac{s(s-1)}{2}\right\}^{r+1}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s); \quad (14.3)$$

тогда соотношение (14.2) дает нам сумматорную формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)f(n)=-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_0^\infty f(x)\,dx+$$

$$+\frac{(-1)^{r+1}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)+\Phi\left(\frac{1}{2}-it\right)}{2}\,\frac{\Xi_\Omega(t)\,dt}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{r+1}}, \quad (II)$$

где функция $\Phi(s)$ определяется посредством интеграла

$$\Phi(s)=\frac{2^{r+1}}{A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx. \quad (14.4)$$

В качестве примера остановимся на задании

$$f(x)=X_{r_1,r_2}\left(\frac{\rho x}{A}\right),\quad \rho=e^{\frac{-\alpha i}{2}},\quad -\frac{\pi}{2}\chi<\alpha<\frac{\pi}{2}\chi, \quad (14.5)$$

где функция $X_{r_1,r_2}(z)$ определяется посредством равенств (4.3). Из этих равенств видно, что

$$F(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}}}\frac{1}{\rho^s} \text{ для рационального поля;}$$

$$F(s)=\frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^s}\frac{1}{\rho^s} \text{ для мнимого квадратичного поля;}$$

$$F(s)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^s}\frac{1}{\rho^s} \text{ для вещественного квадратичного поля.}$$

Эти формулы показывают, что оценка (12.3) выполняется для квадратичного поля лишь при вещественных значениях ρ; для рационального же поля она вообще не имеет места. Между тем оценка (14.1) выполняется во всех трех случаях, и мы можем применить сумматорную формулу (II).

Так как

$$\Phi(s)=\frac{2^{r+1}}{A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{\rho x}{A}\right)x^{s-1}\,dx=\frac{2^{r+1}}{\rho^s},$$

то эта сумматорная формула дает нам следующий результат:

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{r+1}}\,\Xi(t)\,dt=$$

$$=(-1)^{r+1}\frac{\pi}{2^{r+1}}\left\{2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\,e^{-\frac{\alpha i}{4}}+e^{\frac{\alpha i}{4}}\sum_{n=1}^\infty F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{ne^{\frac{\alpha i}{2}}}{A}\right)\right\}. \tag{14.6}$$

Так как левая часть этого равенства инвариантна при замене α на $-\alpha$, то мы снова получаем формулу преобразования:

$$\frac{2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{\rho}}+\sqrt{\rho}\sum_{n=1}^\infty F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{n\rho}{A}\right)=$$

$$=2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\sqrt{\rho}+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sum_{n=1}^\infty F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{n}{A\rho}\right), \tag{14.7}$$

доказанную нами ранее другим способом.

Для рационального поля формула (14.6) переходит в соотношение, указанное Харди, а именно:

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}\,\Xi(t)\,dt=\pi\cos\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{2}e^{\frac{\alpha i}{4}}\{1+2\omega(e^{\alpha i})\},\quad -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

где для краткости положено:

$$\omega(x)=\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x},$$

а

$$\Xi(t)=\xi\left(\frac{1}{2}+it\right),\quad \xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\frac{s(s-1)}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

15°. Приведем еще один метод, при помощи которого можно установить сумматорные формулы более общего вида, чем формула (I).

Для этой цели обратимся к формуле

$$2\pi i\sigma(iz)=i\frac{2^{r+1}\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}-2\frac{\zeta_\Omega(0)}{z}+\sum_{n=1}^\infty F(n)\left\{\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right\}, \tag{15.1}$$

установленной нами в n^{0} 3, и обозначим через C какой-нибудь замкнутый контур, пересекающий вещественную ось в точках α и β таких, что

$$0<\alpha<\beta, \quad m-1<\alpha<m, \quad n<\beta<n+1,$$

где m и n обозначают целые положительные числа.

Из разложения (15.1) видно, что, применяя теорему Коши, мы можем написать равенство:

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu)=\int_{C} f(z) \sigma(iz) dz,$$

где через $f(z)$ обозначена произвольная функция, голоморфная внутри и на обводе контура C (см. рис. 1).

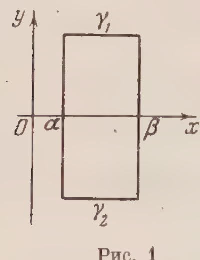


Рис. 1

Если обозначить через $\alpha\gamma_1\beta$ верхнюю часть контура C, а через $\alpha\gamma_2\beta$ — нижнюю его часть, то мы будем иметь:

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu)=-\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z) \sigma(iz) dz+\int_{\alpha\gamma_2\beta} f(z) \sigma(iz) dz.$$

Но из соотношения

$$\sigma(iz)=-\sigma(-iz)+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}$$

и из условия голоморфности функции $f(z)$ внутри и на обводе контура C видно, что

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu)=$$

$$=\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx+\int_{\alpha\gamma_1\beta} f(z) \sigma(-iz) dz+\int_{\alpha\gamma_2\beta} f(z) \sigma(iz) dz. \quad (15.2)$$

Пусть C обозначает прямоугольник с высотой, равной $2h$, симметрично расположенный относительно вещественной оси; тогда формулу (15.2) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu)=-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx+J(\alpha, h)-J(\beta, h)+R(h), \quad (15.3)$$

где для краткости положено:

$$J(x, h)=\int_{x}^{x+ih} f(z) \sigma(-iz) dz+\int_{x}^{x-ih} f(z) \sigma(iz) dz \quad (15.4)$$

и

$$R(h)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x+ih) \sigma(h-ix) dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(x-ih) \sigma(h+ix) dx. \quad (15.5)$$

Если функция $f(z)$ выбрана так, что имеет место равенство

$$\lim_{h\to+\infty} R(h)=0, \quad (15.6)$$

то мы имеем следующую сумматорную формулу:

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu) = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + $$

$$+\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} f(z)\,\sigma(-iz)\,dz + \int_{\alpha}^{\alpha-i\infty} f(z)\,\sigma(iz)\,dz -$$

$$-\int_{\beta}^{\beta+i\infty} f(z)\,\sigma(-iz)\,dz - \int_{\beta}^{\beta-i\infty} f(z)\,\sigma(iz)\,dz. \qquad (15.7)$$

Обозначим через $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ вещественную и мнимую части функции $\sigma(-i(x+iy))$, т. е. положим

$$\sigma(-iz) = X(x, y) + iY(x, y), \quad z = x + iy; \qquad (15.8)$$

тогда сумматорную формулу (15.7) можно записать в следующей форме:

$$\sum_{\nu=m}^{\nu=n} F(\nu) f(\nu) = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + J(\beta) - J(\alpha), \qquad \text{(III)}$$

где для краткости положено:

$$J(x) = 2\int_0^{\infty} \frac{f(x+iy) - f(x-iy)}{2i} X(x, y)\,dy + 2\int_0^{\infty} \frac{f(x+iy) + f(x-iy)}{2} Y(x,y)\,dy. \qquad (15.9)$$

Если, кроме равенства (15.6), функция $f(z)$ удовлетворяет еще и условию

$$\lim_{\beta \to +\infty} J(\beta, \infty) = 0, \qquad (15.10)$$

то сумматорные формулы (15.7) и (III) принимают следующий вид:

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx +$$

$$+\int_{\alpha}^{\alpha+i\infty} f(z)\,\sigma(-iz)\,dz + \int_{\alpha}^{\alpha-i\infty} f(z)\,\sigma(iz)\,dz \qquad \text{(IV)}$$

и

$$\sum_{\nu=m}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx -$$

$$-2\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha+iy) - f(\alpha-iy)}{2i} X(\alpha, y)\,dy - 2\int_0^{\infty} \frac{f(\alpha+iy) + f(\alpha-iy)}{2} Y(\alpha, y)\,dy. \qquad \text{(V)}$$

До сих пор мы предполагали, что α и β — числа дробные. Если же эти числа оказываются целыми, то к правым частям найденных сумматорных формул прибавляются некоторые добавочные члены. Пусть,

например, α равно целому числу $m > 0$. Выделим из области, ограниченной прямоугольным контуром C, точку $z = m$ при помощи полуокружности весьма малого радиуса ε, так что на этой полуокружности

$$z = \varepsilon e^{i\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{15.11}$$

Предположим, что в точке $z = m$ функция $f(z)$ имеет вполне определенное значение, причем нет необходимости предполагать, что она является функцией, голоморфной в этой точке; пусть, далее, разность $f(z) - f(m)$ стремится к нулю равномерно в области (15.11), когда $\varepsilon \to 0$. Обращаясь к разложению (15.1), мы убедимся, что в этом случае к правым частям установленных нами сумматорных формул следует еще прибавить член

$$-\frac{1}{2} F(m) f(m),$$

а суммирование в левых частях надо начинать с числа $\nu = m + 1$; так, например, формула (V) заменяется следующей:

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = -\frac{1}{2} F(m) f(m) - \frac{2^{r-1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{m}^{\infty} f(x)\, dx -$$

$$-2\int_{0}^{\infty} \frac{f(m+i\varphi) - f(m-i\varphi)}{2i} X(m, y)\, dy - 2\int_{0}^{\infty} \frac{f(m+iy) + f(m-iy)}{2} Y(m, y)\, dy. \tag{VI}$$

Если же $\alpha = 0$, то, руководствуясь формулой (15.1) и аналогичными рассуждениями, мы придем к сумматорным формулам, в которых к правой части будет прибавляться член

$$\zeta_{\Omega}(0) f(0);$$

так, например, формула (IV) в этом случае переходит в формулу

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = \zeta_{\Omega}(0) f(0) - \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{0}^{\infty} f(x)\, dx - 2\int_{0}^{\infty} \frac{f(iy) - f(-iy)}{2i} \sigma(y)\, dy, \tag{VII}$$

доказанную нами ранее совершенно другим способом.

Заметим еще, что если $\alpha = -w$, где $0 < w < 1$, то к правым частям сумматорных формул надо добавить член $2\zeta_{\Omega}(0) f(0)$, а в левых частях суммирование начинать с члена $\nu = 1$; так, например, формула (V) в этом случае принимает вид:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = 2\zeta_{\Omega}(0) f(0) - \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \int_{-w}^{\infty} f(x)\, dx -$$

$$-2\int_{0}^{\infty} \frac{f(-w+iy) - f(-w-iy)}{2i} X(w, y)\, dy +$$

$$+2\int_{0}^{\infty} \frac{f(-w+iy) - f(-w-iy)}{2} Y(w, y)\, dy, \tag{VIII}$$

где $0 < w < 1$.

16°. Укажем некоторые приложения выведенных нами сумматорных формул. Пусть

$$f(z)=\frac{1}{z^s}, \quad \operatorname{Re}(s)>1;$$

условие (15.6) в этом случае выполняется, так как, согласно следствию 2 в n^o 3, модуль произведения

$$\sigma(iz)\cdot\frac{1}{z^s} \quad (z=h+iy)$$

может быть сделан сколь угодно малым при достаточно большом h.

Для доказательства выполнения условия (15.10) допустим, что число β растет так, что его дробная часть $\{\beta\}$ находится между двумя произвольно взятыми дробями; тогда, согласно следствию 4 в n^o 3, имеет место оценка

$$|\sigma(iz)|=O(|z|^\eta),$$

где положительное число η может быть выбрано сколь угодно малым. Положив $\operatorname{Re}(s)=\tau>1$, выберем η настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$\tau-\eta>1;$$

тогда, замечая, что

$$|J(\beta,\infty)|<\frac{M}{\beta^{\tau-\eta-1}}\int_0^\infty\frac{dt}{(t^2+1)^{\frac{\tau-\eta}{2}}},$$

где конечная величина M от β не зависит, мы убедимся, что условие (15.10) действительно выполняется.

Полагая $m=1$ и, следовательно, считая $0<\alpha<1$, мы по формуле (IV) найдем, что

$$\zeta_\Omega(s)=-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{\alpha^{1-s}}{s-1}+\int_\alpha^{\alpha+i\infty}\frac{\sigma(-iz)}{z^s}\,dz. \tag{16.1}$$

Эта формула дает аналитическое продолжение дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$ на всю плоскость комплексной переменной s. Из нее видно, что $\zeta_\Omega(s)$ есть однозначная аналитическая функция, имеющая единственный простой полюс $s=1$ с вычетом, равным

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Положим $\operatorname{Re}(s)<-1$ и будем в формуле (16.1) стремить α к нулю, тогда мы получим равенство

$$\zeta_\Omega(s)=\int_0^{+i\infty}\frac{\sigma(-iz)}{z^s}\,dz+\int_0^{-i\infty}\frac{\sigma(iz)}{z^s}\,dz$$

или

$$\zeta_\Omega(s)=2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty\frac{\sigma(x)}{x^s}\,dx. \tag{16.2}$$

Так как правая часть этого равенства представляет собою функцию, голоморфную в области $\operatorname{Re}(s) < r$, то, согласно принципу аналитического продолжения функций, мы можем утверждать, что равенство (16.2) имеет место при $\operatorname{Re}(s) < r$.

Таким образом, мы пришли к формуле (6.4) n° 6.

Если теперь мы примем во внимание соотношения

$$\frac{1}{n^s} = \frac{2}{\pi} \cos\frac{\pi s}{2} G(s) \int_0^\infty K_{r_1, r_2}(nx)\, dx, \quad \sigma(x) = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^\infty F(n) K_{r_1, r_2}\left(\frac{nx}{A^2}\right),$$

то получим:

$$\zeta_\Omega(s) = 2A^{1-2s} \cos\frac{\pi s}{2} G(s) \int_0^\infty \sigma(x) x^{s-1}\, dx, \quad \operatorname{Re}(s) > 1 - r.$$

Из сравнения формул (16.2) и (16.4) получается функциональное уравнение

$$\zeta_\Omega(s) = A^{1-2s} G(s) \zeta_\Omega(1-s).$$

17°. Покажем, как при помощи сумматорных формул можно найти разложение в полусходящийся ряд функции $\sigma(n)$, где n обозначает целое положительное число.

Для этой цели обратимся к формуле

$$\sigma(x) = \frac{2^r \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{\zeta(0)}{\pi} \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)}{x^2 + k^2}$$

и перепишем это разложение так:

$$2\pi\sigma(n) = \frac{2^{r+1} \pi^{r_2+1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - 2\zeta_\Omega(0) \frac{1}{n} + 2n \sum_{k=1}^\infty \frac{F(n+k) - F(k)}{(n+k)^2 + n^2} +$$

$$+ 2n \sum_{k=1}^n \frac{F(k)}{n^2 + k^2} + 2n \sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)}{(n+k)^2 + k^2}. \quad (17.1)$$

Преобразуем последнюю из входящих сюда сумм в определенный интеграл, для чего обратимся к сумматорной формуле (I), положив в ней

$$f(z) = \frac{1}{(z+n)^2 + n^2};$$

тогда, замечая, что

$$\frac{f(ix) - f(-ix)}{2i} = -\frac{2xn}{x^4 + 4n^4},$$

мы получим равенство

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)}{(n+k)^2 + n^2} = -\frac{2^{r-1} \pi^{r_2+1} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{n} + \frac{\zeta_\Omega(0)}{2n^2} + 4n \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 4n^4} \sigma(x)\, dx. \quad (17.2)$$

Если в этой формуле положить

$$\frac{1}{x^4+4n^4}=\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^{\nu-1}\,\frac{x^{4\nu-4}}{2^{2\nu}\,n^{4\nu}}+(-1)^m\,\theta_0(x)\,\frac{x^{4m}}{2^{2m+2}\,n^{4m+4}}, \tag{17.3}$$

где

$$\theta_0(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^2},\qquad 0<\theta_0(x)<1, \tag{17.4}$$

то мы будем иметь:

$$8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\,\sigma(x)\,dx=\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-3}\,n^{4\nu-2}}\int_0^\infty x^{4\nu-3}\,\sigma(x)\,dx+$$

$$+\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}\,n^{4m+2}}\int_0^\infty x^{4m+1}\,\theta_0(x)\,\sigma(x)\,dx.$$

Но из формулы

$$\zeta_\Omega(s)=2\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^\infty\sigma(x)\,\frac{dx}{x^s},\qquad \operatorname{Re}(s)<r,$$

вытекает, что

$$\int_0^\infty x^{2p-1}\,\sigma(x)\,dx=(-1)^p\,\frac{\zeta_\Omega(1-2p)}{2};\ \ p=1,2,3\,\ldots. \tag{17.5}$$

В результате мы получаем следующее разложение:

$$2\pi\sigma(n)=\frac{2^r\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}-\frac{\zeta_\Omega(0)}{n}+2n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(n+k)-F(k)}{(n+k)^2+n^2}+$$

$$+2n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F(k)}{n^2+k^2}+\sum_{\nu=1}^{m}(-1)^\nu\,\frac{\zeta_\Omega(3-4\nu)}{2^{2\nu-2}n^{4\nu-2}}+\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}n^{4m+2}}R_m, \tag{17.6}$$

где

$$R_m=\int_0^\infty x^{4m+1}\theta_0(x)\,\sigma(x)\,dx,\qquad 0<\theta_0(x)<1. \tag{17.7}$$

В частном случае рационального поля

$$\zeta_\Omega(3-4\nu)=-\frac{B_{2\nu-1}}{2(2\nu-1)},\qquad R_m=\int_0^\infty\frac{x^{4m+1}\theta_0(x)\,dx}{e^{2\pi x}-1}=\frac{\theta}{4}\,\frac{B_{2m+1}}{2m+1},\quad 0<\theta<1,$$

где через B_k обозначено k-е бернуллиево число, и мы получаем разложение:

$$\pi\operatorname{ctg} n\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}+2n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}n^{4\nu-2}}\,\frac{B_{2\nu-1}}{2\nu-1}+\theta\,\frac{(-1)^m}{2^{2m+1}n^{4m+2}}\,\frac{B_{2m+1}}{2m+1},\qquad 0<\theta<1, \tag{17.8}$$

указанное Эйлером в одном из писем к Николаю Бернулли, но в форме расходящегося ряда.

Приведем еще один вывод разложения (17.6), не зависящий от применения сумматорных формул.

Исходя из формулы (2.7) § 1, мы без труда докажем справедливость равенства

$$\int_0^\infty K(ax)\,\frac{K(\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}bx)-K(\sqrt{2}\,\varepsilon bx)}{2i}\,dx=\frac{\pi}{2}\,\frac{b}{(a+b)^2+b^2},\quad a>0,\quad b>0. \tag{17.9}$$

При помощи этого интеграла мы найдем, что

$$2n\sum_{k=1}^\infty\frac{F(k)}{(n+k)^2+n^2}=\frac{4}{A^2\pi}\int_0^\infty\frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\sum_{k=1}^\infty F(k)\,K\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt.$$

Разобьем правую часть этого равенства на сумму:

$$\frac{4}{A}\int_0^\infty\frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}dt-$$

$$-\frac{4}{A\pi}\lim_{s\to0}\left\{\zeta_\Omega(s)\int_0^\infty\frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\,\frac{dt}{t^{1-s}}\right\}.$$

Первый из входящих сюда интегралов преобразуем на основании обобщенного интеграла Пуассона-Лежандра [см. (7.4)] следующим образом:

$$\frac{4}{A}\int_0^\infty\frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\}dt=$$

$$=\frac{8}{A^2\pi}\int_0^\infty dx\int_0^\infty\frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\cdot\frac{K\left(\frac{-itx}{A^2}\right)-K\left(\frac{itx}{A^2}\right)}{2i}\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dt, \tag{17.10}$$

причем произведенная здесь перестановка порядков бесконечного интегрирования совершена на законном основании, в чем можно убедиться, применяя соответствующим образом теорему Жордана.

Внутреннее интегрирование в последнем соотношении совершается на основании формулы (17.9), после чего выражение (17.10) оказывается равным

$$8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx=\frac{\zeta_\Omega(0)}{n}+8n^2\int_0^\infty\frac{x}{x^4+4n^4}\,\sigma(x)\,dx. \tag{17.11}$$

Что касается второго из интегралов, написанного в форме предела, то для его нахождения следует различать два случая: когда $\zeta_\Omega(0) \neq 0$ и когда $\zeta_\Omega(0) = 0$.

В первом случае этот предел равен

$$\frac{2^{r_1-3}\zeta_\Omega(0)}{\pi^{\frac{r_1}{2}-2}},$$

а во втором случае он равен

$$\frac{\pi}{2}\zeta'_\Omega(0).$$

Оба эти случая могут быть объединены в один, а именно:

$$-\frac{4}{A\pi}\lim_{s\to 0}\left\{\zeta_\Omega(s)\int_0^\infty \frac{K\left(\frac{\sqrt{2}\,\bar{\varepsilon}nt}{A^2}\right)-K\left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon nt}{A^2}\right)}{2i}\frac{dt}{t^{1-s}}\right\} = -\frac{2^r\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \quad (17.12)$$

и таким образом

$$2n\sum_{k=1}^\infty \frac{F(k)}{(n+k)^2+n^2} = -\frac{2^r\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} + \frac{\zeta_\Omega(0)}{n} + 8n^2\int_0^\infty \frac{x}{x^4+4n^4}\sigma(x)\,dx, \quad (17.13)$$

т. е. мы пришли к формуле (17.2), из которой вытекает разложение (17.6).

18°. Дадим теперь некоторые приложения сумматорной формулы (II). Прежде всего исследуем более подробно соотношение

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{r+1}}\Xi_\Omega(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{r+1}\frac{\pi}{2^{r+1}}\left\{2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\,e^{-\frac{\alpha i}{4}} + e^{\frac{\alpha i}{4}}\sum_{r=1}^\infty F(n)\,X_{r_1,r_2}\left(\frac{ne^{\frac{\alpha i}{2}}}{A}\right)\right\}, \quad (18.1)$$

где $-\frac{\pi}{2}\chi < \alpha < \frac{\pi}{2}$, полученное нами как частный случай формулы (II).

Интеграл (18.1) может быть выражен через интеграл типа формулы Римана-Зигеля.

Действительно, умножим обе части равенства

$$A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta_\Omega(s) = A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\int_{0\swarrow 1}\omega_\Omega(\bar{\varepsilon},x)\frac{dx}{x^s} +$$

$$+A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\int_{0\nwarrow 1}\omega_\Omega(\varepsilon,x)\frac{dx}{x^{1-s}}$$

на $e^{\frac{\alpha i}{4}-\frac{\alpha i s}{2}}$ и проинтегрируем затем по прямой $s=\alpha_1+it$ в пределах от $t=-\infty$ до $t=+\infty$; тогда, принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\rho_\Omega(s)\,e^{\frac{\alpha i}{4}-\frac{\alpha i s}{2}}\,ds=$$

$$=2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\,e^{-\frac{\alpha i}{4}}+e^{\frac{\alpha i}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\,X_{r_1,\,r_2}\left(\frac{ne^{\frac{\alpha i}{2}}}{A}\right),\quad \alpha_1>1,$$

где положено

$$\rho_\Omega(s)=A^s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s),$$

мы найдем представление интеграла (18.1) в форме интеграла Римана-Зигеля, а именно:

$$(-1)^{r+1}\,\frac{2^{r+1}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{r+1}}\,\Xi_\Omega(t)\,dt=$$

$$=e^{\frac{\alpha i}{4}}\int_{0\swarrow 1}X_{r_1,\,r_2}\left(\frac{xe^{\frac{\alpha i}{2}}}{A}\right)\omega_\Omega(\bar{\varepsilon},x)\,dx+e^{-\frac{\alpha i}{4}}\int_{0\nwarrow 1}X_{r_1,\,r_2}\left(\frac{xe^{-\frac{\alpha i}{2}}}{A}\right)\omega_\Omega(\varepsilon,\,x)\,dx. \tag{18.2}$$

В частном случае рационального поля эта формула переходит в соотношение

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}\,\Xi(t)\,dt=\pi e^{\frac{\alpha i}{4}}\int_{0\swarrow 1}\frac{e^{-\pi(i-e^{\alpha i})x^2}dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}+\pi e^{-\frac{\alpha i}{4}}\int_{0\nwarrow 1}\frac{e^{-\pi(i+e^{-\alpha i})x^2}dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}. \tag{18.3}$$

Применим эту формулу к выяснению вопроса: каково будет значение интеграла (18.1), когда α стремится к своему предельному значению $\frac{\pi\chi}{2}$.

Для случая рационального поля обратимся к формуле (18.3), которая дает:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{t^2+\frac{1}{4}}\,\Xi(t)\,dt=\pi e^{\frac{\pi i}{8}}\int_{0\swarrow 1}\frac{dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}+\pi e^{-\frac{\pi i}{8}}\int_{0\nwarrow 1}\frac{dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}. \tag{18.4}$$

Но, применяя рассуждения $n^\circ\,9$, легко доказать, что

$$\int_{0\swarrow 1}\frac{dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}=\varepsilon\int_{+\infty-i\xi}^{-\infty-i\xi}\frac{dt}{e^{-\pi i\varepsilon u}+e^{\pi i\varepsilon u}}=\frac{1}{2},$$

и, равным образом,

$$\int_{0\nwarrow 1}\frac{dx}{e^{-\pi ix}-e^{\pi ix}}=\frac{1}{2},$$

после чего соотношение (18.4) дает нам искомый предел:

$$\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha t}{2}}{t^2 + \frac{1}{4}} \Xi(t)\, dt = \pi \cos \frac{\pi}{8}. \tag{18.5}$$

Эта формула была указана Харди.

Для рассмотрения случая квадратичного поля обратимся к соотношению (18.1) и сумматорной формуле (I)

Исследуем сначала мнимое квадратичное поле, когда $\zeta_\Omega(0) \neq 0$. Полагая в сумматорной формуле (I)

$$f(x) = X_{0,1}\left(\frac{\rho x}{A}\right) = e^{-\frac{\rho x}{A}}, \quad \rho = e^{\frac{\alpha i}{2}}, \quad -\pi < \alpha < \pi,$$

найдем, что

$$\sum_{n=1}^\infty F(n)\, e^{\frac{\rho n}{A}} = -1 + \frac{1}{\rho} + 2\int_0^\infty \sin \frac{\rho x}{A}\, \sigma(x)\, dx. \tag{18.6}$$

Из этого соотношения видно, что когда α стремится к своему предельному значению π, число ρ стремится к i и тогда

$$\lim_{\rho \to i} \text{в} \cdot \text{ч} \cdot \sum_{n=1}^\infty F(n)\, e^{-\frac{\rho n}{A}} = -1. \tag{18.7}$$

Введем для краткости обозначение:

$$\lim_{\rho \to i} \sum_{n=1}^\infty F(n)\, e^{-\frac{\rho n}{A}} = \alpha_0 + i\beta_0$$

и обратимся к формуле (14.7), перейдя в ней к пределу, когда $\rho \to i$; тогда мы получим:

$$2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0) + i(\alpha_0 + i\beta_0) = 2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\, i + \alpha_0 - i\beta_0,$$

откуда будет следовать, что

$$\alpha_0 + \beta_0 = 2^{r_1}\zeta_\Omega^{(r)}(0). \tag{18.8}$$

Из равенств (18.7) и (18.8) вытекает, что

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_0 = 0,$$

после чего соотношение (18.1) дает искомый предел, а именно:

$$\lim_{\alpha \to \pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \frac{\alpha t}{2}}{t^2 + \frac{1}{4}} \Xi_\Omega(t)\, dt = \pi \cos \frac{\pi}{4}. \tag{18.9}$$

Для рассмотрения случая вещественного квадратичного поля, когда $\zeta_\Omega(0) = 0$, сразу пользоваться сумматорной формулой (I) нельзя, так как функция

$$f(x) = X_{2,0}\left(\frac{\rho x}{A}\right) = 4K_0\left(2\frac{\rho x}{A}\right), \quad \rho = e^{\frac{\alpha i}{2}}, \quad -\pi < \alpha < \pi,$$

имеет в точке $x = 0$ особенность логарифмического характера, как это усматривается из разложения

$$X_{2,0}(x) = -4C - 4\log x + O(x^2).$$

В этом случае функция $F(s)$, определяемая формулой (12.3), оказывается равной

$$F(s) = \int_0^\infty X_{2,0}\left(\frac{\rho x}{A}\right) x^{s-1}\,dx = \left(\frac{A}{\rho}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right),$$

откуда ясно, что, в противоположность общему случаю, эта функция имеет в точке $s = 0$ полюс не первого, а второго порядка. Но так как в рассматриваемом случае $\zeta_\Omega(0) = 0$, то соотношение (12.8) сохраняет свою силу, и здесь попрежнему R_0 означает вычет функции $F(s)\zeta_\Omega(s)$ относительно простого полюса $s = 0$, а именно:

$$R_0 = \{s^2 F(s)\}_{s\to 0}\left\{\frac{\zeta_\Omega(s)}{s}\right\}_{s\to 0} = 4\zeta'_\Omega(0).$$

Таким образом, в исследуемом нами случае сумматорная формула (I) заменяется формулой

$$4\sum_{n=1}^\infty F(n) K_0\left(\frac{2\rho n}{A}\right) = 4\zeta_\Omega(0) - 4\zeta'_\Omega(0)\frac{1}{\rho} - \pi\int_0^\infty J_0\left(\frac{2\rho n}{A}\right)\sigma(x)\,dx, \qquad (\mathrm{I}_2)$$

из которой следует, что

$$\lim_{\rho\to i} \text{в. ч.} \sum_{n=1}^\infty F(n) K_0\left(\frac{2\rho n}{A}\right) = 4\zeta'_\Omega(0). \qquad (18.10)$$

Полагая, как и выше,

$$\lim_{\rho\to i} 4\sum_{n=1}^\infty F(n) K_0\left(\frac{2\rho x}{A}\right) = \alpha_0 + i\beta_0,$$

найдем из соотношений (18.1) и (18.10), что

$$\alpha_0 = 4\zeta'_\Omega(0), \quad \beta_0 = 0,$$

после чего получается искомое предельное значение интеграла (18.1):

$$\lim_{\alpha\to\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^2}\Xi_\Omega(t)\,dt = 2\pi\cos\frac{\pi}{4}\,\zeta'_\Omega(0). \qquad (18.11)$$

Все три найденные нами формулы могут быть объединены в одну:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi\chi}{2}}\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{\alpha t}{2}}{\left(t^2+\frac{1}{4}\right)^{r+1}}\Xi_\Omega(t)\,dt = (-1)^{r+1}\frac{\pi}{2^{r_2-1}}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\cos\frac{\pi}{2^{4-\chi}}. \qquad (18.12)$$

19°. Рассмотрим пример на приложение сумматорной формулы (II), взяв функцию $f(x)$ в интегральной форме:

$$f(x)=\frac{1}{A\pi}\int_0^\infty Y_{r_1,r_2}(a\tau)K_{r_1,r_2}\left(\frac{x\tau}{A^2}\right)\tau\,d\tau. \tag{19.1}$$

Согласно определению функции $\sigma(x)$, имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)f(n)=\int_0^\infty Y_{r_1,r_2}(a\tau)\,\sigma(t)\,\tau\,d\tau. \tag{19.2}$$

Далее, для нахождения $\Phi(s)$ по формуле (14.4) составим интеграл

$$\int_0^\infty f(x)\,x^{s-1}dx=\frac{A^{2s-1}G(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\int_0^\infty Y_{r_1,r_2}(a\tau)\,\tau^{1-s}d\tau=$$

$$=\frac{A^{2s-1}\pi}{2\sin\pi s\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)}\frac{a^{s-2}}{\Gamma^{r_2}(1-s)},\quad 0<s<1,$$

откуда следует, что

$$\Phi(s)=\frac{(Aa)^{s-1}}{a}\frac{2^{r_2-2r_1-1}}{\pi^{r_2+2r_1-1}}\sin^r\pi s\,\{s(1-s)\}^{r_1}\,\Gamma^{r_1}\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_1}\left(\frac{s-1}{2}\right).$$

Полагая

$$a=\frac{e^{-2z}}{A},\quad z>0, \tag{19.3}$$

мы убедимся, что

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{2}+\frac{it}{2}\right)+\Phi\left(\frac{1}{2}-\frac{it}{2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{e^z}{a}\frac{2^{r_2-4r_1-1}}{\pi^{r_2+2r_1-1}}(t^2+1)^{r_1}\operatorname{ch}^r\frac{\pi t}{2}\left|\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2\cos zt. \tag{19.4}$$

Из формулы (19.1) вытекает, что

$$\int_0^\infty f(x)\,dx=\begin{cases}A\dfrac{1}{\pi^r\,2^{r_1+1}} & \text{для рационального и мнимого квадратичного поля;}\\ 0 & \text{для вещественного квадратичного поля,}\end{cases}$$

поэтому мы можем написать, что

$$\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_0^\infty f(x)\,dx=\frac{\zeta_\Omega(0)}{2}\frac{\pi^{1-\frac{3}{2}r_1-r_2}}{a}. \tag{19.5}$$

Внося найденные нами выражения (19.2), (19.4) и (19.5) в сумматорную формулу (II), найдем следующее соотношение:

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}^r\frac{\pi t}{2}}{(t^2+1)^{r_2}}\left|\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2\cos zt\,\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=\frac{(-1)^{r+1}\pi^{\frac{r_1}{2}+1}}{2^{3r_2-2r_1-1}}\zeta_\Omega(0)\,e^{-z}+\frac{(-1)^{r+1}}{A}\frac{\pi^{2r_1+r_2}}{2^{3r_2-2r_1-2}}e^{-3z}\int_0^\infty Y_{r_1,r_2}\left(\frac{e^{-2z}x}{A}\right)x\sigma(x)\,dx. \tag{19.6}$$

Оно может быть переписано в такой форме:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}^r \frac{\pi t}{2}}{(t^2+1)^{r_2}} \left| \Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2 \cos zt\, \Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= (-1)^{r+1} \sqrt{A}\, \frac{\pi^{2r_1+r_2}}{2^{3r_2-2r_1-2}} \Psi(z), \tag{19.7}$$

где

$$\Psi(z) = \frac{e^{-3z}}{\sqrt{A^3}} \int_0^\infty x Y_{r_1, r_2}\left(e^{-2z}\frac{x}{A}\right) \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x}\right\} dx. \tag{19.8}$$

Так как левая часть равенства (19.7) не меняет своего значения от замены z на $-z$, то мы получаем следующее инвариантное свойство функции $\Psi(z)$:

$$\sqrt{a^3} \int_0^\infty x Y_{r_1, r_2}(ax) \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x}\right\} dx =$$

$$= \sqrt{b^3} \int_0^\infty x Y_{r_1, r_2}(bx) \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x}\right\} dx, \tag{19.9}$$

где произвольные числа a и b связаны соотношением

$$ab = \frac{1}{A^2}. \tag{19.10}$$

Для рационального поля формула (19.6) переходит в соотношение

$$\int_0^\infty \left|\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2 \cos zt\, \Xi\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4\pi^{\frac{3}{2}} e^{-z} - 16\pi^{\frac{5}{2}} e^{-3z} \int_0^\infty \frac{x e^{-\pi e^{-4z} x^2}}{e^{2\pi x}-1}, \tag{19.11}$$

доказанное Рамануджаном и Харди, а соотношение (19.9) дает формулу Рамануджана:

$$\sqrt{a^3} \int_0^\infty x e^{-a^2x^2} \left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{2\pi x}\right\} dx = \sqrt{b^3} \int_0^\infty x e^{-b^2x^2} \left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1} - \frac{1}{2\pi x}\right\} dx, \tag{19.12}$$

где числа a и b связаны между собою равенством

$$ab = \pi. \tag{19.13}$$

В заключение настоящего параграфа заметим, что доказанная нами ранее формула

$$\int_0^\infty M_{r_1, r_2}\left(\frac{xt}{A^2}\right) \left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\} dt = \frac{A\pi}{2} \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}, \tag{19.14}$$

где

$$M_{r_1, r_2}(xt) = \frac{K_{r_1, r_2}(-ixt) - K_{r_1, r_2}(ixt)}{2i},$$

дает один из самых простых выводов функционального уравнения Дедекинда.

Действительно, мы установили равенство

$$\frac{G(1-s)\,\zeta_\Omega(s)}{2A^{1-2s}\cos\frac{\pi s}{2}} = \int_0^\infty \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\} x^{s-1} dx, \quad 0 < \operatorname{Re}(s) < 1; \tag{19.15}$$

умножим обе части соотношения (19.14) на x^{s-1}, где $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, и проинтегрируем по параметру x от $x = 0$ до $x = +\infty$; тогда, принимая во внимание равенство

$$\int_0^\infty M_{r_1, r_2}(tx)\, x^{s-1}\, dx = \frac{\pi}{2} \frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\cos\frac{\pi s}{2}} \frac{G(1-s)}{t^s},$$

найдем, что

$$\frac{\pi}{2} \frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{\cos\frac{\pi s}{2}} G(1-s) \int_0^\infty \left\{\sigma(t) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi t}\right\} t^{-s}\, dt =$$

$$= \frac{A\pi}{2} \int_0^\infty \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\} x^{s-1}\, dx. \tag{19.16}$$

Но это равенство в силу соотношения (19.15) приводит к функциональному уравнению Дедекинда:

$$\zeta_\Omega(1-s) = A^{2s-1} G(1-s)\, \zeta_\Omega(s), \tag{19.17}$$

причем очевидно, что принятое при доказательстве ограничение $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ может быть снято.

Таким образом, тот простейший вывод функционального уравнения для функции $\zeta(s)$ из классического интеграла Пуассона-Лежандра, который мы привели в работе (1), без труда распространяется и на квадратичное поле.

§ 4. О функциях, аналогичных полиномам Бернулли

20°. Для квадратичного поля может быть построена теория функций, по своим свойствам вполне аналогичных полиномам Бернулли.

Если положить, что переменная x изменяется в интервале $0 < x < 1$, то полином $\varphi_\nu(x)$ Бернулли может быть определен посредством своей производящей функции, а именно:

$$\frac{e^{px}}{e^p - 1} = \frac{1}{p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)}{\nu!} p^{\nu-1}. \tag{20.1}$$

Имея в виду ввести в рассмотрение функции, аналогичные полиномам Бернулли, предположим, что x есть некоторое дробное число, изменяющееся в пределах

$$n - 1 < x < n, \tag{20.2}$$

где n — некоторое целое положительное число.

Обратимся к сумматорной формуле (V) n^0 15 и положим в ней

$$m = n, \quad \alpha = x, \quad f(x) = e^{-px}, \quad p > 0;$$

тогда мы получим равенство

$$\sum_{\nu > x}^{\infty} F(\nu)\, e^{-\nu p} = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{e^{-px}}{p} +$$

$$+ 2e^{-px} \int_0^\infty \sin pt X(x, t)\, dt - 2e^{-px} \int_0^\infty \cos pt Y(x, t)\, dt. \tag{20.3}$$

Развернем интегральную часть этого равенства в ряд по степеням p и обозначим коэффициенты в таком разложении через

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} \quad (k=0, 1, 2, \ldots)$$

так, что

$$e^{px}\sum_{\nu>x}^{\infty} F(\nu)\, e^{-\nu p} = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{p} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!}\, p^k. \tag{20.4}$$

Докажем, что функции $\varphi_{k+1}(x)$ являются полиномами степени $k+1$. Для этой цели обратимся к сумматорной формуле (III), которая для случая

$$\alpha = 0, \quad \beta = x, \quad n-1 < \beta < n$$

может быть записана так:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) f(\nu) = \zeta_{\Omega}(0) f(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_0^x f(\tau)\, d\tau - 2\int_0^{\infty}\frac{f(it)-f(-it)}{2i}\,\sigma(t)\, dt +$$

$$+ 2\int_0^{\infty}\frac{f(x+it)-f(x-it)}{2i} X(x, t)\, dt + 2\int_0^{\infty}\frac{f(x+it)+f(x-it)}{2} Y(x, t) dt. \tag{20.5}$$

Положим в этой формуле

$$f(z) = \frac{(x-z)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

что оказывается возможным, так как в этом случае равенство (15.6) выполняется; тогда будем иметь:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu<x} F(\nu)\frac{(x-\nu)^k}{k!} = \zeta_{\Omega}(0)\frac{x^k}{k!} - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} +$$

$$+ 2\int_0^{\infty}\frac{(x+it)^k-(x-it)^k}{2i}\frac{\sigma(t)\, dt}{k!} - \frac{2\sin\frac{\pi k}{2}}{k!}\int_0^{\infty} t^k X(x, t)\, dt +$$

$$+ \frac{2\cos\frac{\pi k}{2}}{k!}\int_0^{\infty} t^k Y(x, t)\, dt. \tag{20.6}$$

Сравнивая между собою правые части равенств (20.3) и (20.4), получим следующие интегральные представления функций:

$$\varphi_{2n}(x) = (-1)^{n+1} 2\cdot 2n\int_0^{\infty} t^{2n-1} X(x, t)\, dt, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20.7}$$

$$\varphi_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2\cdot(2n+1)\int_0^{\infty} t^{2n} Y(x, t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{20.8}$$

Присоединяя к этим равенствам еще соотношение

$$\int_0^{\infty}\sigma(t)\, t^{\mu} dt = -\frac{\zeta_{\Omega}(-\mu)}{2\sin\frac{\pi\mu}{2}}, \quad \mu > -r, \tag{20.9}$$

мы сможем из формулы (20.6) получить следующие выражения для функций $\varphi_\nu(x)$:

$$\varphi_1(x) = \zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\, x - \sum_{\nu=1}^{\nu<x} F(\nu); \quad n-1 < x < n, \tag{20.10}$$

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} = \zeta_\Omega(0)\frac{x^k}{k!} - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{\zeta_\Omega(1-2\lambda)\, x^{k-2\lambda+1}}{(2\lambda-1)!\,(k-2\lambda+1)!} - \sum_{\nu=1}^{\nu<x} F(\nu)\frac{(x-\nu)^k}{k!}, \quad n-1 < x < n. \tag{20.11}$$

В частности,

$$\varphi_1(x) = \zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\, x, \quad 0 < x < 1, \tag{20.12}$$

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} = \zeta_\Omega(0)\frac{x^k}{k!} - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} -$$

$$- \sum_{\lambda=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{\zeta_\Omega(1-2\lambda)\, x^{k-2\lambda+1}}{(2\lambda-1)!\,(k-2\lambda+1)!}, \quad 0 < x < 1, \ k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{20.13}$$

21°. При выводе вышеуказанных формул предполагалось, что x есть число дробное. Если же $x = n$, где n — целое положительное число, то согласно рассуждениям, приведенным нами в n° 15, к правым частям сумматорных формул надо прибавлять еще член $-\frac{1}{2}F(n)f(n)$, а суммирование в левых частях начинать с $\nu = n+1$. Это обстоятельство изменяет вид формулы (20.3), которая в рассматриваемом случае должна быть заменена формулой

$$\sum_{\nu \geqslant x}^{\infty} F(\nu)e^{-\nu p} = \frac{1}{2}F(n)f(n) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{e^{-px}}{p} +$$

$$+ 2e^{-px}\int_0^\infty \sin ptX(x, t)\,dt - 2e^{-px}\int_0^\infty \cos ptY(x, t)\,dt. \tag{21.1}$$

Если мы теперь напишем разложение

$$e^{px}\sum_{\nu \geqslant x}^{\infty} F(\nu)e^{-\nu p} = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{p} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!}p^k, \tag{21.2}$$

то выражение для функций

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

сохранит форму (20.11). Что же касается функции $\varphi_1(x)$, то в рассматриваемом случае она отличается от формы (20.10), а именно здесь она равна

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}F(x) + \zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\, x - \sum_{\nu=1}^{n \leqslant x} F(\nu). \tag{21.3}$$

Допустим теперь, что $x=0$. Так как в этом случае к правым частям сумматорных формул прибавляется член $\zeta(0)f(0)$, то формула (20.3) в этом случае должна быть заменена формулой:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\, e^{-\nu p} = \zeta_{\Omega}(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{p} + 2\int_0^{\infty} \sin pt\, \sigma(t)\, dt. \qquad (21.4)$$

Если мы желаем попрежнему представить это соотношение в виде

$$e^{px}\sum_{\nu\geqslant x}^{\infty} F(\nu)\, e^{-\nu p} = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{p} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!}\, p^k, \qquad (21.5)$$

то мы должны положить

$$\varphi_1(0) = \zeta_{\Omega}(0), \quad \varphi_{2n+1}(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (21.6)$$

$$\varphi_{2n}(0) = -2n\zeta_{\Omega}(1-2n), \qquad x = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (21.7)$$

Таким образом мы убеждаемся, что при всех значениях x функции $\varphi_\nu(x)$ являются полиномами от x степени ν, причем формула (21.2) показывает, какой вид имеет производящая функция этих полиномов.

Заметим, что из найденных нами формул вытекает, что

$$\varphi'_{k+1}(x) = (k+1)\,\varphi_k(x), \quad \varphi''_{k+1}(x) = (k+1)\,k\varphi_{k-1}(x), \ldots,$$

$$\varphi_{k+1}^{(k)}(x) = 1.2.3\ldots(k+1)\,\varphi_1(x); \quad \varphi_{k+1}^{(k+1)}(x) = -\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad 0<x<1, \quad (21.8)$$

так что

$$\frac{\varphi_{k+1}(x)}{(k+1)!} = -\frac{2^{r+1}\pi\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{x^{k+1}}{(k+1)!\,0!} + \frac{\varphi_1(0)\,x^k}{k!\,1!} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\varphi_k(0)}{1!\,k!}\,x + \frac{\varphi_{k+1}(0)}{0!\,(k+1)!}, \quad 0<x<1. \qquad (21.9)$$

22°. Имея в виду дать некоторые приложения полиномов $\varphi_\nu(x)$, рассмотрим в первую очередь вопрос о разложении в полусходящийся ряд, расположенный по этим полиномам, вещественной и мнимой части функции

$$\sigma[-i(x+iy)]$$

в том случае, когда

$$x=\xi, \quad 0<\xi<1, \quad y=n,$$

где n — целое положительное число.

Возьмем известное нам разложение функции $\sigma(z)$ на рациональные дроби:

$$\sigma(z) = \frac{2^r\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi}\,\frac{1}{z} + \cdots + \frac{z}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^2+z^2};$$

тогда, принимая во внимание равенства

$$\sigma[-i(\xi+in)] = X(\xi, n) + iY(\xi, n) \qquad (22.1)$$

и

$$X(-\xi, n) = X(\xi, n), \quad Y(-\xi, n) = -Y(\xi, n), \qquad (22.2)$$

мы убедимся, что

$$2\pi X(\xi, n) = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2+1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - 2\zeta_{\Omega}(0)\frac{n}{n^2+\xi^2} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} F(k)\left\{\frac{n}{(k-\xi)^2+n^2} + \frac{n}{(k+\xi)^2+n^2}\right\}, \tag{22.3}$$

$$2\pi Y(\xi, n) = -2\zeta_{\Omega}(0)\frac{\xi}{n^2+\xi^2} - \sum_{k=1}^{\infty} F(k)\left\{\frac{k-\xi}{(k-\xi)^2+n^2} - \frac{k+\xi}{(k+\xi^2)+n^2}\right\}. \tag{22.4}$$

Обратимся сначала к формуле (22.3) и преобразуем входящую в нее сумму следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k)\left\{\frac{n}{(k-\xi)^2+n^2} + \frac{n}{(k+\xi)^2+n^2}\right\} = n\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n-\xi)^2+n^2} + \frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\} + \\ + \sum_{k=1}^{n} F(k)\left\{\frac{n}{(k-\xi)^2+n^2} + \frac{n}{(k+\xi)^2+n^2}\right\} + \sum_{k=1}^{\infty} F(k)\left\{\frac{n}{(k+n-\xi)^2+n^2} + \frac{n}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\}.$$

Для преобразования последней из сумм, входящих в правую часть обратимся к сумматорной формуле (V) n^0 15 и положим в ней

$$\alpha = \xi, \quad 0 < \xi < 1, \quad f(z) = \frac{1}{(z+n-\xi)^2+n^2};$$

тогда мы получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F(k)}{(k+n-\xi)^2+n^2} = -\frac{2^{r-1}\pi^{r_2+1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}\, n} + \\ + 4n\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+4n^4} X(\xi, x)\, d\nu + 2\int_0^{\infty} \frac{x^2-2n^2}{x^4+4n^4} Y(\xi, x)\, dx,$$

после чего формула (22.3) примет такой вид:

$$2\pi X(\xi, n) = \frac{2^{r}\pi^{r_2+1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} - 2\zeta_{\Omega}(0)\frac{n}{n^2+\xi^2} + \\ + n\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n-\xi)^2+n^2} + \frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\} + \\ + \sum_{k=1}^{n} F(k)\left\{\frac{n}{(k-\xi)^2+n^2} + \frac{n}{(k+\xi)^2+n^2}\right\} + 8n^2\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+4n^4} X(\xi, x)\, dx. \tag{22.5}$$

Если воспользоваться формулой (17.3), то мы найдем, что

$$8n^2\int_0^{\infty} \frac{x}{x^4+4n^4} X(\xi, x)\, dx = \sum_{\nu=1}^{m} (-1)^{\nu-1}\frac{1}{2^{2\nu-3}n^{4\nu-2}}\int_0^{\infty} x^{4\nu-3} X(\xi, x)\, dx + \\ + \frac{(-1)^m}{2^{2m-1}n^{4m+2}}\int_0^{\infty} x^{4m+1}\theta_0(x) X(\xi, x)\, dx, \qquad \theta_0(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^2},$$

а так как

$$\int_0^{\infty} x^{(4\nu-3)} X(\xi, x)\, dx = \frac{\varphi_{4\nu-2}(\xi)}{2\cdot 4\nu - 2},$$

то окончательно имеем следующее разложение:

$$2\pi X(\xi,\ n)=\frac{2^r\pi^{r_2+1}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}-2\zeta_\Omega(0)\frac{n}{n^2+\xi^2}+$$

$$+n\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n-\xi)^2+n^2}-\frac{F(k+n)-F(k)}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F(k)\left\{\frac{n}{(k-\xi)^2+n^2}+\frac{n}{(k+\xi)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-1}n^{4\nu-2}}\frac{\varphi_{4\nu-2}(\xi)}{2\nu-1}+\frac{(-1)^m R_m}{2^{2m-1}n^{4m+2}},\tag{22.6}$$

где

$$R_m=\int_0^{\infty}x^{4m+1}\theta_0(x)X(\xi,\ x)\,dx,\quad 0<\theta_0(x)<1,\quad 0<\xi<1.\tag{22.7}$$

В пределе при $\xi\to 0$ это разложение переходит в формулу (17.6).

Обратимся к соотношению (22.4) и образуем его правую часть так:

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\left\{\frac{k-\xi}{(k-\xi)^2+n^2}-\frac{k+\xi}{(k+\xi)^2+n^2}\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(n+k)(k+n-\xi)-F(k)(k-\xi)}{(n+k-\xi)^2+n^2}-\frac{F(k+n)(k+n-\xi)-F(k)(k+\xi)}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F(k)\left\{\frac{k-\xi}{(k-\xi)^2+n^2}-\frac{k-\xi}{(k+\xi)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\left\{\frac{k-\xi}{(k+n-\xi)^2+n^2}-\frac{k+\xi}{(k+n+\xi)^2+n^2}\right\}.$$

Для преобразования последней из входящих сюда сумм применим сумматорную формулу (III) n^o 15, положив в ней

$$\alpha=\xi,\quad 0<\xi<1,\quad m=1,\quad \beta=p+\frac{1}{2},\quad p>0\text{ — целое число},$$

$$f(z)=\frac{z-\xi}{(z+n-\xi)^2+n^2};$$

тогда будем иметь:

$$\lim_{p\to+\infty}\left\{\sum_{k=1}^{p}F(k)\frac{k-\xi}{(k+n-\xi)^2+n^2}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_{\xi}^{p+\frac{1}{2}}\frac{x-\xi}{(x+n-\xi)^2+n^2}\,dx\right\}=$$

$$=2\int_0^{\infty}\frac{x^3-2n^2x}{x^4+4n^4}X(\xi,\ x)\,dx-4n^2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4n^4}Y(\xi,\ x)\,dx,$$

откуда без труда найдем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(k)\left\{\frac{k-\xi}{(k-\xi+n)^2+n^2}-\frac{k+\xi}{(k+\xi+n)^2+n^2}\right\}=-8n^2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4n^4}Y(\xi,\ x)\,dx,$$

и, таким образом,

$$2\pi Y(\xi,\ n) = -2\zeta_{\Omega}(0)\frac{\xi}{n^2+\xi^2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(k+n)(k+\xi+n)-F(k)(k+\xi)}{(k+\xi+n)^2+n^2} - \frac{F(k+n)(k-\xi+n)-F(k)(k-\xi)}{(k-\xi+n)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F(k)\left\{\frac{k+\xi}{(k+\xi)^2+n^2}-\frac{k-\xi}{(k-\xi)^2+n^2}\right\}+8n^2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4x^4}Y(\xi,\ x)\,dx. \quad (22.8)$$

Но из формулы (17.3) следует, что

$$8n^2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+4n^4}Y(\xi,\ x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-3}n^{4\nu-2}}\int_0^{\infty}x^{4\nu-2}Y(\xi,\ x)\,dx +$$

$$+\frac{(-1)^m}{2^{2m-1}n^{4m+2}}\int_0^{\infty}x^{4m+2}\theta_0(x)\,Y(\xi,\ x)\,dx, \qquad \theta_0(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{2n^2}\right)^2}.$$

Принимая во внимание формулу

$$\int_0^{\infty}x^{4\nu-2}Y(\xi,\ x)\,dx = \frac{\varphi_{4\nu-1}(\xi)}{2(4\nu-1)},$$

получим следующее разложение:

$$2\pi Y(\xi,\ n) = -2\zeta_{\Omega}(0)\frac{\xi}{n^2+\xi^2} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{F(k+n)(k+\xi+n)-F(k)(k+\xi)}{(k+\xi+n)^2+n^2} - \frac{F(k+n)(k-\xi+n)-F(k)(k-\xi)}{(k-\xi+n)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}F(k)\left\{\frac{k+\xi}{(k+\xi)^2+n^2}-\frac{k-\xi}{(k-\xi)^2+n^2}\right\}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2^{2\nu-2}n^{4\nu-2}}\,\frac{\varphi_{4\nu-1}(\xi)}{4\nu-1}+(-1)^m\frac{R'_m}{2^{2m-1}n^{4n+2}}, \qquad (22.9)$$

где

$$R'_m = \int_0^{\infty}x^{4m+2}\theta_0(x)\,Y(\xi,\ x)\,dx, \quad 0<\theta_0(x)<1, \quad 0<\xi<1. \qquad (22.10)$$

Для рационального поля разложения (22.6) и (22.9) переходят в формулы, установленные нами в работе (2).

23°. В качестве второго приложения рассмотрим функцию $\zeta_{\Omega}(s,\ w)$, определив ее посредством бесконечного ряда

$$\zeta_{\Omega}(s,\ w) = -2\frac{\zeta_{\Omega}(0)}{w^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+w)^s}, \quad \mathrm{Re}(s)>1, \quad 0<w<1. \quad (23.1)$$

Из этой формулы видно, что для рационального поля функция $\zeta_{\Omega}(s,\ w)$ переходит в функцию Гурвица-Лерха:

$$\zeta(s,\ w) = \frac{1}{w^s}+\frac{1}{(w+1)^s}+\cdots, \quad \mathrm{Re}(s)>1. \qquad (23.2)$$

Основные свойства функции $\zeta_\Omega(s, w)$ могут быть изучены посредством выведенных нами сумматорных формул.

Так, например, сумматорная формула (I) при

$$f(z)=\frac{1}{(z+w)^s}, \quad \operatorname{Re}(s)>1, \tag{23.3}$$

дает нам соотношение:

$$\zeta_\Omega(s, w)=-\frac{\zeta_\Omega(0)}{w^s}-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\cdot\frac{w^{s-1}}{s-1}+$$

$$+2\int\limits_0^\infty \frac{\sin\left(s\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{w}\right)}{(t^2+w^2)^{s/2}}\sigma(t)\,dt. \tag{23.4}$$

Это соотношение дает аналитическое продолжение функции $\zeta_\Omega(s, w)$ на всей плоскости комплексного переменного s. Из него видно, что $\zeta_\Omega(s, w)$ есть мероморфная функция от s, имеющая единственный простой полюс в точке $s=1$ с вычетом, равным

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Полагая в выражении (23.4) $s=0$, найдем:

$$\zeta_\Omega(0, w)=-\zeta_\Omega(0)+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}w, \tag{23.5}$$

откуда, в силу соотношения (20.12), вытекает, что

$$\zeta_\Omega(0, w)=-\varphi_1(w), \quad 0<w<1. \tag{23.6}$$

Возьмем сумматорную формулу (VIII) n° 15 при $\alpha=-\xi$, где $0<\xi<1$; тогда мы найдем, что при

$$f(z)=\frac{1}{(z+w)^s}, \quad \operatorname{Re}(s)>1,$$

эта формула даст:

$$\zeta_\Omega(s, w)=-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\cdot\frac{(w-\xi)^{1-s}}{s-1}+ \tag{23.7}$$

$$+2\int\limits_0^\infty \sin\left(s\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{w-\xi}\right)\frac{X(\xi, t)\,dt}{\{(w-\xi)^2+t^2\}^{s/2}}-2\int\limits_0^\infty \cos\left(s\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{w-\xi}\right)\frac{Y(\xi, t)\,dt}{\{(w-\xi)^2+t^2\}^{s/2}}.$$

Будем считать в этой формуле, дающей аналитическое продолжение функции $\zeta_\Omega(s, w)$ на всей плоскости s, вещественную часть s удовлетворяющей условию

$$\operatorname{Re}(s)<r;$$

тогда, приближая ξ к w, найдем соотношение:

$$\zeta_\Omega(s, w)=2\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty X(w, t)\frac{dt}{t^s}+2\cos\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty Y(w, t)\frac{dt}{t^s}. \tag{23.8}$$

Полагая здесь $s=-k$, где $k=1, 2, 3, \ldots$, и принимая во внимание формулы (20.7) и (20.8), найдем следующее равенство:

$$\zeta_\Omega(-k, w) = -\frac{\varphi_k(w)}{k+1}, \quad 0<(w)<1. \tag{23.9}$$

Установим для функции

$$\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{2}\zeta_\Omega(s, w) + \frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{2}\zeta_\Omega(s, -iw) = -2\,\frac{\zeta_\Omega(0)}{w^s} + e^{\frac{i\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+iw)^s} +$$

$$+\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s} \tag{23.10}$$

уравнение, аналогичное функциональному уравнению для дедекиндовой функции $\zeta_\Omega(s)$. Для этой цели обратим по формуле Меллина интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}dx}{(1+x)^s} = \frac{\Gamma(\sigma)\,\Gamma(s-\sigma)}{\Gamma(s)}, \quad 0<\sigma<s.$$

Покажем, что в получаемом равенстве

$$\frac{1}{(1+x)^s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty}\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(s-\sigma)}{\Gamma(s)}\frac{d\sigma}{x^\sigma}, \quad 0<\tau<s, \tag{23.11}$$

можно положить x комплексным:

$$x=|x|\,e^{\theta i}, \quad -\frac{\pi}{2}+\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}-\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \tag{23.12}$$

где через ε обозначена положительная величина, которая может быть взята сколь угодно малой.

Действительно, интеграл (23.11) сходится в области (23.12). Поэтому мы вправе написать равенство

$$\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi s}{2}}\frac{1}{(n+iw)^s} + \frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi s}{2}}\frac{1}{(n-iw)^s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{w^{\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right)}{2\Gamma(s)}\cos\frac{\pi}{2}\frac{(s-\sigma+1)}{2}\,\frac{d\sigma}{n^{\frac{s-\sigma+1}{2}}\,w^{\sigma/2}},$$

где $1-s<\alpha<s+1$.

Будем теперь считать, что $s>1$, и выберем α лежащим в интервале $1-s<\alpha<s-1$; тогда мы можем написать, что

$$J = \frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+iw)^s} + e^{-\frac{i\pi s}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} w^{\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}\frac{s-\sigma+1}{2}\,\frac{\zeta_\Omega\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right)}{2\Gamma(s)\,w^{\sigma/2}}\,d\sigma, \tag{23.13}$$

причем перемена порядков суммирования и интегрирования произведена здесь на законном основании, так как бесконечный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{s-\sigma+1}{2}}}$$

и соответствующий интеграл сходятся абсолютно на прямой с абсциссой α.

Рассмотрим прямоугольник с вершинами (рис. 2)

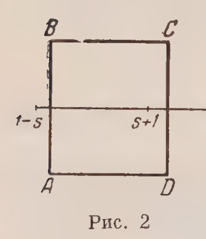


Рис. 2

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT),$$

где $\beta > s + 1$.Внутри этого прямоугольника находится единственный полюс $\sigma = s + 1$ подинтегральной функции выражения (23.13). Применяя теорему Коши и замечая, что интегралы, взятые вдоль отрезков BC и AD, в пределе при $T \to +\infty$ обращаются в нуль, найдем:

$$J = \frac{\zeta_\Omega(0)}{w^s} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{w^{\frac{1-s}{2}} A^{\sigma-s}}{2\Gamma(s)} \Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right) \cos\frac{\pi}{2}\frac{s-\sigma+1}{2}\, \zeta_\Omega\left(\frac{\sigma-s+1}{2}\right) \frac{d\sigma}{w^{\sigma/2}} \cdot$$

Переставляя в правой части порядки суммирования и интегрирования, что возможно, так как $\beta > s + 1$, получим:

$$J = \frac{\zeta_\Omega(0)}{w^s} + \frac{A^s \pi^{1-\frac{\chi}{2}} w^{\frac{1-s}{2}}}{2\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} 2^{r_1\frac{s-\sigma-1}{2}+r} \cdot$$

$$\cdot \Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\sigma-s-1}{2}\right) \sin^{r}\frac{\pi}{2}\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right) \cos^{r_2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right) \frac{d\sigma}{\left(\frac{\sqrt{nw}}{A}\right)^{\sigma}} \cdot$$

В дальнейшем удобнее рассматривать рациональное и квадратичное поля отдельно.

1 случай — рациональное поле:

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad r = 0, \quad \chi = 1, \quad A = \sqrt{\pi}, \quad \zeta_\Omega(0) = -\frac{1}{2}\,.$$

В этом случае

$$J = -\frac{1}{2}\frac{1}{w^s} + \frac{2^{\frac{s-1}{2}} \pi^{\frac{s+1}{2}} w^{\frac{1-s}{2}}}{2\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1-s}{2}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right) \frac{d\sigma}{(2n\pi w)^{\sigma/2}}$$

и так как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma(u)}{p^u}\, du = e^{-p}, \quad p > 0, \quad \gamma > 0,$$

то мы получаем функциональное уравнение Лерха:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi s}{2}}\zeta(s, iw)+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi s}{2}}\zeta(s, -iw)=\frac{1}{2}\frac{1}{w^s}+\frac{(2\pi)^s}{2\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi nw}}{n^{1-s}}, \quad 0<w<1. \tag{23.14}$$

Полагая здесь $s<0$ и устремляя затем w к нулю, мы из этого уравнения без труда получаем функциональное уравнение для римановой функции $\zeta(s)$:

$$\zeta(1-s)=\frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s)}{(2\pi)^s}.$$

2 случай — мнимое квадратичное поле:

$$r_1=0, \quad r_2=1, \quad r=0, \quad \chi=2, \quad A=\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}, \quad \zeta_\Omega(0)=-1.$$

Здесь

$$J=-\frac{1}{w^s}+\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^s\frac{w^{\frac{1-s}{2}}}{2\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}2^{\sigma}\Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\Gamma\left(\frac{\sigma-s+1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right)\frac{d\sigma}{\left(4\pi\sqrt{\frac{nw}{|\Delta|}}\right)^{\sigma}},$$

а так как из интеграла Хевисайда

$$\int_0^{\infty}K_\mu(u)\,u^{\lambda-1}du=2^{\lambda-2}\Gamma\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right), \quad \mathrm{Re}(\lambda)>\mu,$$

следует, что

$$K_{s-1}\left(4\pi\sqrt{\frac{nw}{|\Delta|}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}2^{\sigma-2}\Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-s+1}{2}\right)\frac{d\sigma}{\left(4\pi\sqrt{\frac{nw}{|\Delta|}}\right)^{\sigma}}, \ \beta>s-1,$$

то мы имеем функциональное уравнение:

$$\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi s}{2}}\zeta_\Omega(s, iw)+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi s}{2}}\zeta_\Omega(s, -iw)=$$

$$=\frac{1}{w^s}+\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^s\frac{w^{\frac{1-s}{2}}}{\Gamma(s)}\left\{\varepsilon^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}K_{s-1}\left(4\pi\varepsilon\sqrt{\frac{nw}{|\Delta|}}\right)+\right.$$

$$\left.+\,\bar{\varepsilon}^{s+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}K_{s-1}(4\pi\bar{\varepsilon})\sqrt{\frac{nw}{|\Delta|}}\right\}, \tag{23.15}$$

где

$$\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad \bar{\varepsilon}=e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad 0<w<1.$$

Будем считать $s<0$ и устремим в равенстве (23.15) w к нулю. Из формул

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)}{\sin\pi\nu}, \quad I_\nu(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}$$

видно, что при $s<0$ член, содержащий x в наименьшей степени, в разложении $K_\nu(x)$ будет

$$\frac{\Gamma(1-s)}{2^s}x^{s-1};$$

поэтому в пределе при $w\to 0$ равенство (23.15) дает нам уравнение

$$\zeta_\Omega(s)=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right)^{2s-1}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\zeta_\Omega(1-s),$$

которое представляет собою функциональное уравнение для дедекиндовой функции мнимого квадратичного поля.

3 случай — вещественное квадратичное поле:

$$r_1=2,\quad r_2=0,\quad r=1,\quad \chi=2,\quad A=\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},\quad \zeta_\Omega(0)=0.$$

В этом случае

$$J=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^s\frac{w^{\frac{1-s}{2}}}{2\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}2^\sigma\Gamma\left(\frac{\sigma+s-1}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\Gamma\left(\frac{\sigma-s+1}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{s-\sigma+1}{2}\right)\frac{d\sigma}{\left(4\pi\sqrt{\frac{nw}{\Delta}}\right)^\sigma},$$

и, пользуясь снова обращенным интегралом Хевисайда, мы найдем, что

$$\frac{1}{2}e^{\frac{i\pi s}{2}}\zeta_\Omega(s,iw)+\frac{1}{2}e^{-\frac{i\pi s}{2}}\zeta_\Omega(s,-iw)=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^s\frac{w^{\frac{1-s}{2}}}{\Gamma(s)}\left\{\frac{\varepsilon^{s+1}}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}K_{s-1}\left(4\pi\varepsilon\sqrt{\frac{nw}{\Delta}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\bar\varepsilon^{s+1}}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{\frac{1-s}{2}}}K_{s-1}\left(4\pi\bar\varepsilon\sqrt{\frac{nw}{\Delta}}\right)\right\},\tag{23.16}$$

где

$$\varepsilon=e^{\frac{i\pi}{4}},\quad \bar\varepsilon=e^{-\frac{i\pi}{4}},\quad 0<w<1.$$

Полагая здесь $s<0$ и устремляя затем w к нулю, получим функциональное уравнение для дедекиндовой функции в случае вещественного квадратичного поля:

$$\zeta_\Omega(s)=\left(\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\right)^{2s-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta_\Omega(1-s).$$

Из полученных здесь функциональных уравнений для обобщенной функции Дедекинда можно вывести и разложение для функции $\sigma(z)$ на рациональные дроби.

Для этой цели рассмотрим предельное значение суммы

$$\frac{e^{\frac{i\pi s}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+iw)^s}+\frac{e^{-\frac{i\pi s}{2}}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi s}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+iw)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s}\right\}+$$

$$+\frac{i}{2}\sin\frac{\pi s}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n+iw)^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s}\right\},$$

когда s стремится к единице.

Второй член, стоящий здесь справа, при $s\to 1$ стремится к сумме

$$w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{w^2+n^2};$$

что касается первого члена, то, замечая, что при $n=1, 2, 3, \ldots$ и $0<w<1$ оказывается

$$\left(1\pm\frac{wi}{n}\right)^{-s}=1\pm\frac{swi}{n}+\varepsilon(s),$$

где через $\varepsilon(s)$ обозначена величина, стремящаяся к нулю при $s\to 1$, мы найдем, что

$$\lim_{s\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi s}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{(n-iw)^s}\right]\right\}=\lim_{s\to 1}\cos\frac{\pi s}{2}\zeta_{\Omega}(s)=\frac{2^r\pi^{r_2+1}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}.$$

Правые же части функциональных уравнений (23.14), (23.15) и 23.16) при $s\to 1$ стремятся к выражениям

$$-\frac{\zeta_{\Omega}(0)}{w}+\frac{1}{A}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)K_{r_1, r_2}\left(\frac{nw}{A^2}\right),$$

в результате чего получается хорошо известное нам равенство

$$\sigma(w)=\frac{2^r\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}-\frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi}\frac{1}{w}+\frac{w}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{w^2+n^2},$$

причем ограничение $0<w<1$ может быть снято и заменено условием

$$\operatorname{Re}(w)>0.$$

24°. Исследуем гаммаморфную функцию $\Gamma_{\Omega}(x)$, определив ее посредством бесконечного произведения

$$\Gamma_{\Omega}(x)=\frac{e^{\alpha_{\Omega}x}}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}\right\}^{F(n)}, \tag{24.1}$$

где для краткости положено

$$\alpha_{\Omega}=\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\chi C, \tag{24.2}$$

а C обозначает постоянную Эйлера.

Из формулы (24.2) следует, что

$$\log \Gamma_{\Omega}(x) = \alpha_{\Omega} x - \log x - \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \left\{ \log \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right\}. \qquad (24.3)$$

Выразим входящую сюда сумму через определенный интеграл, для чего введем в рассмотрение функцию $N_{r_1, r_2}(x)$, определив ее посредством равенства

$$N_{r_1, r_2}(x) = \int_x^{\infty} K_{r_1, r_2}(x)\, dx \qquad (24.4)$$

так, что для рационального поля

$$N_{1,0}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2x}; \qquad (24.5)$$

для мнимого квадратичного поля

$$N_{1,0}(x) = \sqrt{x}\, \frac{\varepsilon K_1(2\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) - \bar{\varepsilon} K_1(2\varepsilon\sqrt{x})}{i}; \qquad (24.6)$$

для вещественного квадратичного поля

$$N_{2,0}(x) = \sqrt{x}\, \{\varepsilon K_1(4\bar{\varepsilon}\sqrt{x}) + \bar{\varepsilon} K_1(4\varepsilon\sqrt{x})\}. \qquad (24.7)$$

Докажем прежде всего справедливость следующей формулы:

$$A \int_0^{\infty} \left\{ \sigma(y) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi} \frac{1}{y} - \frac{2^{r} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \right\} N_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^2} \right) \frac{dy}{y} = \int_0^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{x}\, \sigma(t)\, dt. \qquad (24.8)$$

Действительно, обозначая левую часть этого равенства через J и заменяя в нем J разложением этой функции на рациональные дроби, найдем, что

$$J = \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \int_0^{\infty} N_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^4} \right) \frac{dy}{y^2 + n^2} = \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n} \int_0^{\infty} N_{r_1, r_2}\left(\frac{nt}{A^2} \right) d \operatorname{arctg} \frac{t}{x}.$$

Отсюда интегрированием по частям получаем:

$$J = \frac{1}{A\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \int_0^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{x} K_{r_1, r_2}\left(\frac{nt}{A^2} \right) dt = \int_0^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{x}\, \sigma(t)\, dt,$$

что и доказывает справедливость формулы (24.8).

Чтобы получить интегральное представление суммы (24.3), выразим двумя различными способами интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \frac{\zeta_{\Omega}(1-s)}{s-1} \frac{ds}{x^{s-1}}, \quad 1 < \gamma < 2. \qquad (24.9)$$

Для этой цели обратимся к формуле (7.2), доказанной нами в n° 7. Если проинтегрировать функцию, стоящую под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta - iT), \quad B(\beta + iT), \quad C(\gamma + iT), \quad D(\gamma - iT),$$

где $0 < \beta < 1$ и $1 < \gamma < 2$, то в пределе при $T \to \infty$ получим равенство

$$\sigma(y) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi y} - \frac{2^{r} \pi^{r_2} \zeta_{\Omega}^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{A^{1-2s} G(s) \zeta_{\Omega}(1-s)}{2 \sin \frac{\pi s}{2}} \frac{ds}{y^{1-s}}. \qquad (24.10)$$

Отсюда интегрированием по параметру выводим:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{A^{2-2s} G(s) \zeta_\Omega (1-s)}{2 \sin \frac{\pi s}{2}} \int_0^\infty N_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^2}\right) y^{s-2}\, dy\, ds,$$

где J обозначает любой из двух интегралов, определяемых формулой (24.8).

Принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty N_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^2}\right) y^{s-2}\, dy = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi s}{2}} \frac{G(1-s) A^{2s-2}}{(s-1) x^{s-1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad (24.11)$$

мы убедимся, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \frac{\zeta_\Omega (1-s)}{s-1} \frac{ds}{x^{s-1}} = \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{2}\, \sigma(t)\, dt. \quad (24.12)$$

Возьмем теперь функцию

$$\omega(s) = \frac{\pi}{2 \sin \pi s} \frac{\zeta_\Omega (1-s)}{s-1} \frac{1}{x^{s-1}}$$

и проинтегрируем ее по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\gamma - iT), \quad B(\gamma + iT), \quad C(-k + iT), \quad D(-k - iT),$$

где через k обозначено некоторое положительное (не целое) число; тогда в пределе при $T \to +\infty$ получим равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \omega(s)\, ds = R_0 + R_1 + \sum_{p=1}^{\infty} R_p, \quad (24.13)$$

где R_0 и R_1 обозначают соответственно вычеты функции относительно ее двойных полюсов $s = 0$ и $s = 1$, а R_p есть вычет той же функции относительно ее простого полюса $s = -p$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$.

Но

$$R_0 = D_s \left\{ \frac{\pi s}{\sin \pi s}\, s\, \zeta_\Omega (1-s) \frac{x^{1-s}}{s-1} \right\}_{s=0} = -\frac{x}{2} \{a \log x + b - a\},$$

где для краткости положено

$$a = -\frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}},$$

$$b = C_\Omega = \frac{2^{r+1} \pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \left[\chi C + \log \frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|} \right] \zeta_\Omega^{(r)}(0) \right\} \quad (24.14)$$

и

$$R_1 = \frac{1}{2} \{\zeta_\Omega'(0) + \zeta_\Omega(0) \log x\},$$

$$R_p = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \zeta_\Omega(p+1) \frac{x^{p+1}}{p+1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \left\{ \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right\},$$

$$0 < x < 1.$$

Таким образом, равенство (24.13) дает:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\pi}{2\sin\pi s}\frac{\zeta_\Omega(1-s)}{s-1}\frac{dx}{x^{s-1}}=-\frac{x}{2}\{a\log x+b-a\}+$$

$$+\frac{1}{2}\{\zeta'_\Omega(0)+\zeta_\Omega(0)\log x\}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right\}, \qquad (24.15)$$

причем ограничение $0<x<1$ может быть снято и заменено условием $x>0$.

Из сравнения правых частей формул (24.12) и (24. 15) находим искомое интегральное представление суммы, входящей в правую часть соотношения (24.3), а именно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(n)\left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right\}=$$

$$=\zeta'_\Omega(0)+\zeta_\Omega(0)\log x-x\{a\log x+b-a\}-2\int\limits_0^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\,\sigma(t)\,dt, \qquad x>0. \qquad (24.16)$$

Отсюда получается следующее интегральное представление логарифма гаммаморфной функции $\Gamma_\Omega(x)$:

$$\log\Gamma_\Omega(x)=-\zeta'_\Omega(0)+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{r+1}(0)}{r+1}+\left[1-\log\frac{(2\pi)^{\chi}}{|\Delta|}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\}x-\right.$$

$$-\left\{1+\zeta_\Omega(0)+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}x\right\}\log x+J(x), \qquad (24.17)$$

где интегральный член $J(x)$ имеет одну из следующих форм:

$$J(x)=2\int\limits_0^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\,\sigma(t)\,dt \qquad (24.18)$$

или

$$J(x)=A\int\limits_0^{\infty}\left\{\sigma(t)+\frac{\zeta_\Omega(t)}{\pi t}-\frac{2^r\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\right\}N_{r_1,r_2}\left(\frac{xt}{A^2}\right)dt. \qquad (24.19)$$

Для рационального поля функция $\Gamma_\Omega(x)$ переходит в классическую функцию гамма, а формула (24.17) дает известную формулу Бине.

Выведем теперь из соотношения (24.17) разложение, аналогичное формуле Стирлинга. Для этой цели возьмем разложение в ряд Маклорена

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}=\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{t^{2\nu-1}}{x^{2\nu-1}}\cdot\frac{1}{2\nu-1}+(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{x^{2k+1}}\frac{\theta_0(t)}{2k+1}, \qquad (24.20)$$

где

$$\theta_0(t)=(2k+1)\int\limits_0^1\frac{u^{2k}\,du}{1+\frac{t^2}{x^2}u^2}=\frac{1}{1+\frac{t^2}{x^2}\theta}, \qquad 0<\theta<1,$$

так что $0<\theta_0(t)<1$; тогда мы найдем, что

$$J(x)=2\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)x^{2\nu-1}}\int\limits_0^{\infty}t^{2\nu-1}\sigma(t)\,dt+2\frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}}\int\limits_0^{\infty}t^{2a+1}\theta_0(t)\,\sigma(t)\,dt,$$

а так как

$$\int_0^\infty t^{2\nu-1}\sigma(t)\,dt = (-1)^\nu\cdot\frac{1}{2}\zeta_\Omega(1-2\nu),$$

то мы получаем формулу, аналогичную разложению Стирлинга:

$$\log\Gamma_\Omega(x) = -\zeta_\Omega'(0) + 2^{r+1}\frac{\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} + \left[1-\log\frac{(2\pi)^x}{|\Delta|}\right]\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\}x -$$

$$-\left\{1+\zeta_\Omega(0)+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}x\right\}\log x -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\zeta_\Omega(1-2\nu)}{2\nu-1}\frac{1}{x^{2\nu-1}} + (-1)^k\frac{2}{2k+1}\frac{R_k}{x^{2k+1}},$$

где

$$R_k = \int_0^\infty t^{2k+1}\theta_0(t)\sigma(t)\,dt, \quad 0<\theta_0(t)<1. \tag{24.21}$$

25°. Укажем на связь, существующую между функцией $\frac{\Gamma_\Omega'(x)}{\Gamma_\Omega(x)}$ и функцией $\zeta_\Omega(s, x)$.

Если продифференцировать равенство (24.17) по x, то получится формула

$$\frac{\Gamma_\Omega'(x)}{\Gamma_\Omega(x)} = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\} - \{1+\zeta_\Omega(0)\}\frac{1}{x} -$$

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\log x - 2\int_0^\infty\frac{t}{t^2+x^2}\sigma(t)\,dt. \tag{25.1}$$

С другой стороны, взяв известную нам формулу

$$\zeta_\Omega(s, w) = -\frac{\zeta_\Omega(0)}{w^s} - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}}{\sqrt{\Delta}}\frac{w^{1-s}}{s-1} + 2\int_0^\infty\frac{\sin\left(s\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{w}\right)}{(t^2+w^2)^{s/2}}\sigma(t)\,dt \tag{25.2}$$

и положив

$$w^{1-s} = 1 - \log w\cdot(s-1)+\ldots,$$

найдем в пределе при $s\to 1$, что

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s, w) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{s-1}\right\} =$$

$$= -\frac{\zeta_\Omega(0)}{w} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log w + 2\int_0^\infty\frac{t\sigma(t)}{t^2+w^2}dt, \quad 0<w<1. \tag{25.3}$$

Исключая из соотношений (25.1) и (25.3) интегральный член, найдем следующий результат:

$$\lim_{\nu\to 1}\left\{\zeta_\Omega(s) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\frac{1}{s-1}\right\} = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\} -$$

$$-\{1+2\zeta_\Omega(0)\}\frac{1}{w} - \frac{\Gamma_\Omega'(w)}{\Gamma_\Omega(w)}, \quad 0<w<1. \tag{25.4}$$

Если в этом соотношении перейти к пределу при $w \to 0$ и принять во внимание, что

$$\lim_{s \to 1} \left\{ \zeta_\Omega(s) + \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{s-1} \right\} =$$

$$= \frac{2^{r+1} \pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \log \frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|} \zeta_\Omega^{(r)}(0) - \chi C \zeta_\Omega^{(r)}(0) \right\}, \qquad (25.5)$$

то получится следующее свойство гаммаморфной функции:

$$\lim_{w \to 0} \left\{ \frac{\Gamma'_\Omega(w)}{\Gamma_\Omega(w)} + \frac{1 + 2\zeta_\Omega(0)}{w} \right\} = \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \chi C, \qquad (25.6)$$

где C обозначает постоянную Эйлера.

26°. Исследуем функцию

$$\log \Gamma_\Omega(x+w), \quad x > 0, \quad 0 < w < 1,$$

для чего обратимся к сумматорной формуле (VIII) n° 15, положив в ней

$$f(z) = \frac{1}{(x+w+z)^2}.$$

Так как из разложения (24.3) следует, что

$$D_x^{(2)} \log \Gamma_\Omega(x+w) = \frac{1}{(x+w)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{(x+w+n)^2},$$

то из указанной сумматорной формулы вытекает равенство:

$$D_x^{(2)} \log \Gamma_\Omega(x+w) = \frac{1 + 2\zeta_\Omega(0)}{(x+w)^2} - \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{x} +$$

$$+ 4 \int_0^\infty \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} X(w,y)\,dy + 2 \int_0^\infty \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} Y(w,y)\,dy.$$

Интегрируя обе части этого равенства по x и обозначая через K постоянную интегрирования, найдем:

$$D'_x \log \Gamma_\Omega(x+w) = K - \frac{1 + \zeta_\Omega(0)}{x+w} - \frac{2^{r+1} \pi^{r_2} \zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \log x -$$

$$- 2 \int_0^\infty \frac{y}{x^2+y^2} X(w,y)\,dy - 2 \int_0^\infty \frac{x}{x^2+y^2} Y(w,y)\,dy;$$

произведя новое интегрирование по x и принимая во внимание, что, согласно формуле (20.8), оказывается

$$-\int_0^\infty \log(x^2+y^2)\, Y(w,y)\,dy = -2 \log x \int_0^\infty Y(w,x)\,dy -$$

$$-\int_0^\infty \log\left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} Y(w,y)\,dy = \varphi_1(w) \log x - \int_0^\infty \log\left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} Y(w,y)\,dy,$$

где полином $\varphi_1(w)$ определяется равенством

$$\varphi_1(w) = \zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} w, \quad 0 < w < 1, \tag{26.1}$$

мы найдем, что

$$\log \Gamma_\Omega(x+w) = K_1 + K_1 x - \{1 + 2\zeta_\Omega(0)\} \log(x+w) - \\ - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \{x \log x - x\} + \varphi_1(w) \log x + \\ + 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} X(w, y)\,dy - 2\int_0^\infty \log\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\, Y(w, y)\,dy, \tag{26.2}$$

где через K_1 обозначена новая постоянная интегрирования.

Для определения постоянных K и K_1 рассмотрим значение $\log \Gamma_\Omega(x+w)$ при больших значениях x. С одной стороны, из формулы (26.2) вытекает, что при больших x имеет место равенство

$$\log \Gamma_\Omega(x+w) = K_1 + Kx - \{1 + 2\zeta_\Omega(0) - \varphi_1(w)\} \log x - \\ - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \{x \log x - x\} + \varepsilon(x), \tag{26.3}$$

где через $\varepsilon(x)$ обозначена величина, стремящаяся к нулю с возрастанием x до бесконечности.

С другой стороны, из формулы (24.17) следует, что

$$\log \Gamma_\Omega(x+w) = -\zeta'_\Omega(0) + E_1(x+w) - \{1 + \zeta_\Omega(0)\} \log(x+w) - \\ - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} \{(x+w) \log(x+w)\} + \varepsilon(x),$$

где для краткости положено:

$$E_1 = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} + \left[1 - \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|}\right] \zeta_\Omega^{(r)}(0) \right\}. \tag{26.4}$$

Но при большом x

$$(x+w)\log(x+w) = x \log x + w \log x + w + \varepsilon(x),$$

поэтому, принимая во внимание формулу (26.1), имеем:

$$\log \Gamma_\Omega(x+w) = -\zeta'_\Omega(0) + Ew + E_1 x - \{1 + 2\zeta_\Omega(0) - \varphi_1(w)\} \log x - \\ - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} x \log x + \varepsilon(x), \tag{26.5}$$

где

$$E = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}} \left\{ \frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|} \zeta_\Omega^{(r)}(0) \right\}. \tag{26.6}$$

Сравнивая между собою равенства (26.3) и (26.5), найдем значения искомых постоянных K и K_1, а именно:

$$K = E, \quad K_1 = -\zeta'_\Omega(0) + Ew. \tag{26.7}$$

Внося эти значения K и K_1 в соотношение (26.2), получим формулу:

$$\log\Gamma_\Omega(x+w) = -\zeta'_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta^{(r)}_\Omega(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,w +$$

$$+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta^{(r+1)}(0)}{r+1}+\left[1-\log\frac{(2\pi)^{\chi}}{|\Delta|}\right]\zeta^{(r)}_\Omega(0)\right\}(x+w)-$$

$$-\{1+2\zeta_\Omega(0)\}\log(x+w)+\left\{\zeta_\Omega(0)-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta^{(r)}_\Omega(0)}{\sqrt{|\Delta|}}(x+w)\right\}\log x + J(x,w), \tag{26.8}$$

где

$$J(x,w) = 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,X(w,y)\,dy - 2\int_0^\infty \log\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\;Y(w,y)\,dy. \tag{26.9}$$

Развернем интегральный член этой формулы в ряд, расположенный по обобщенным полиномам Бернулли. Принимая во внимание разложение (24.20), найдем, что

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,X(w,y)\,dy = 2\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)\,x^{2\nu-1}}\int_0^\infty y^{2\nu-1}X(w,y)\,dy +$$

$$+\,2\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)\,x^{2k+1}}\int_0^\infty y^{2k+1}\theta_0(y)\,X(w,y)\,dy, \qquad 0<\theta_0(y)<1,$$

а так как по формуле (20.7) оказывается, что

$$\int_0^\infty y^{2\nu-1}X(w,y)\,dy = (-1)^{\nu+1}\frac{\varphi_{2\nu}(w)}{2\cdot 2\nu},$$

то

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,X(w,y)\,dy = \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\varphi_{2\nu}(w)}{2\nu-1.\,2\nu}\,\frac{1}{x^{2\nu-1}} + (-1)^k\frac{2}{2k+1}\,\frac{R_k}{x^{2kn}}, \tag{26.10}$$

где

$$R_k = \int_0^\infty y^{2k+1}\,\theta_0(y)\,X(w,y)\,dy, \qquad 0<\theta_0(y)<1. \tag{26.11}$$

Равным образом, взяв разложение $\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$ в ряд Маклорена:

$$\log\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = 2\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{y^{2\nu}}{x^{2\nu}}\,\frac{1}{2\nu} + (-1)^k\,2\,\frac{y^{2k+2}}{x^{2k+2}}\,\frac{\theta'_0(y)}{2k+2}, \tag{26.12}$$

где

$$\theta'_0(y) = (2k+2)\int_0^1 \frac{u^{2k+1}du}{1+\frac{y^2}{x^2}u^2} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}\theta'}, \qquad 0<\theta'<1,$$

и, следовательно,

$$0<\theta'_0(y)<1,$$

мы найдем, что

$$2\int_0^\infty \log\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,Y(w,y)\,dy = 2\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu.\,x^{2\nu}}\int_0^\infty y^{2\nu}Y(w,y)\,dy +$$

$$+2\,\frac{(-1)^k}{(2k+2)\,x^{2k+2}}\int_0^\infty y^{2k+2}\,\theta_0'(y)\,Y(w,y)\,dy,\quad 0<\theta_0'(y)<1.$$

Но по формуле (20.8) имеем

$$\int_0^\infty y^{2\nu}Y(w,y)\,dy = (-1)^{\nu+1}\frac{\varphi_{2\nu+1}(w)}{2(2\nu+1)},$$

поэтому

$$2\int_0^\infty \log\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,Y(w,y)\,dy =$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{k}\frac{\varphi_{2\nu+1}(w)}{2\nu(2\nu+1)}\frac{1}{x^{2\nu}}+(-1)^k\frac{2}{2k+2}\frac{R_{k+1}'}{x^{2k+2}}, \tag{26.13}$$

где

$$R_{k+1}'=\int_0^\infty y^{2k+2}\,\theta_0'(y)\,Y(w,y)\,dy,\quad 0<\theta'(y)<1. \tag{26.14}$$

Отсюда получается искомое разложение остаточного члена разложения (26.9) в ряд по обобщенным полиномам Бернулли, а именно:

$$J(x,w)=\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}\frac{\varphi_{\nu+1}(w)}{\nu(\nu+1)}\frac{1}{x^\nu}+$$

$$+(-1)^k\frac{2}{2k+1}\frac{R_k}{x^{2k+1}}+(-1)^{k+1}\frac{2}{2k+2}\frac{R_{k+1}'}{2^{2k+2}}, \tag{26.15}$$

где члены R_k и R_{k+1}' определяются формулами (26.11) и (26.14).

Для рационального поля разложения (26.8) и (26.15) переходят в известные формулы Ландсберга-Эрмита теории функции гамма.

27°. Приведем еще один вывод формулы (26.15). Для этой цели обратимся к соотношению (24.17) и заменим в нем x на $x+w$; тогда мы получим:

$$\log\Gamma_\Omega(x+w) = -\zeta_\Omega'(0)+E_1(x+w)-\{1+\zeta_\Omega(0)\}\log(x+w)-$$

$$-\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}(x+w)\log(x+w)+2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt. \tag{27.1}$$

Интегральный член этой формулы, на основании равенства

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}=\int_0^\infty e^{-(x+w)u}\,\frac{\sin tu}{u}\,du,$$

может быть представлен так:

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt = 2\int_0^\infty \sin ut\,\sigma(t)\,dt\int_0^\infty e^{-(x+w)u}\frac{du}{u};$$

но нам известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, e^{-nu} = \zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{u} + 2\int_0^\infty \sin ut\, \sigma(t)\, dt,$$

поэтому

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}\left\{e^{-wu}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, e^{-nu} - \zeta_\Omega(0)\, e^{-wu} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{u}\right\} du. \quad (27.2)$$

Если теперь в сумматорной формуле (VIII) n^0 15 положить

$$f(z) = e^{-uz}, \quad u > 0,$$

то мы получим:

$$e^{-wu}\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, e^{-nu} = 2\zeta_\Omega(0) e^{-wu} - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{1}{u} +$$

$$+ 2\int_0^\infty \sin nt X(w, t)\, dt - 2\int_0^\infty (1-\cos ut)\, Y(w, t)\, dt - \varphi_1(w),$$

после чего соотношение (27.2) может быть представлено так:

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}\left\{\zeta_\Omega(0)\, e^{-wu} - \varphi_1(w) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{e^{-wu}-1}{u}\right\} du +$$

$$+ 2\int_0^\infty e^{-xu}\,\frac{\sin tu}{u}\, du \int_0^\infty X(w, t)\, dt - 2\int_0^\infty e^{-xu}\,\frac{1-\cos tu}{u}\, du\int_0^\infty Y(w, t)\, dt.$$

Но

$$\int_0^\infty e^{-xu}\,\frac{\sin tu}{u}\, du = \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{u}, \quad \int_0^\infty e^{-xu}\,\frac{1-\cos tu}{u}\, du = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{t^2}{x^2}\right).$$

Следовательно,

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-xu}}{u}\left\{-\zeta_\Omega(0)(1-e^{-wu}) + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\,\frac{e^{-wu}-1+uw}{u}\right\} du +$$

$$+ 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\, X(w, t)\, dt - 2\int_0^\infty \log\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\; Y(w, t)\, dt =$$

$$= -\zeta_\Omega(0)\int_0^\infty \frac{e^{-xu}-e^{-(x+w)u}}{u}\, du + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\int_0^\infty e^{-xu}\,\frac{e^{-wu}-1+uw}{u^2}\, du + J(x, w).$$

А так как

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xu} - e^{-(x+w)u}}{u} du = \log\left(1 + \frac{w}{x}\right),$$

$$\int_0^\infty e^{-xu} \frac{e^{-xu} - 1 + uw}{u} du = (x+w)\log\left(1 + \frac{w}{x}\right) - w,$$

то

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x+w}\,\sigma(t)\,dt = -\zeta_\Omega(0)\log\left(1 + \frac{w}{x}\right) +$$

$$+ \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{(x+w)\log\left(1+\frac{w}{x}\right) - w\right\} + J(x, w). \qquad (27.3)$$

Внося это значение интеграла в формулу (27.1), получим:

$$\log\Gamma_\Omega(x+w) = -\zeta'_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}} w + E_1(x+w) -$$

$$-\{1 + 2\zeta_\Omega(0)\}\log(x+w) + \left\{\zeta_\Omega(0) - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}(x+w)\right\}\log x + J(x, w),$$

$$0 < w < 1, \qquad (27.4)$$

т. е. мы снова приходим к соотношению (26.8).

28°. Укажем еще на одну форму интегрального члена формулы (26.8). Для этой цели введем в рассмотрение функции

$$\overline{X}(w, t) = \int_\infty^t X(w, t)\,dt, \quad \overline{Y}(w, t) = \int_\infty^t Y(w, t)\,dt \qquad (28.1)$$

и проинтегрируем правую часть соотношения (26.9) по частям; тогда мы получим:

$$J(x, w) = -2\lim_{t\to 0}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\,\overline{X}(w, t) - 2\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\overline{X}(w, t)\,dt +$$

$$+ 2\lim_{t\to 0}\log\sqrt{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2}\,\overline{Y}(w, t) + 2\int_0^\infty \frac{t}{x^2+t^2}\overline{Y}(w, t)\,dt. \qquad (28.2)$$

Но

$$\lim_{t\to 0}\log\sqrt{1 + \frac{t^2}{x^2}}\,\overline{Y}(w, t) = 0.$$

С другой стороны,

$$\lim_{t\to 0}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{x}\,\overline{X}(w, t) = 0,$$

откуда

$$J(x, w) = 2\int_0^\infty \frac{t}{x^2+t^2}\overline{Y}(w, t)\,dt - 2\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\overline{X}(w, t)\,dt. \qquad (28.3)$$

Для рационального поля эта формула переходит в соотношение, данное Ландсбергом в теории функции гамма.

Положив в формуле (28.3) $w=0$, получим следующее интегральное представление остаточного члена формулы (24.17):

$$J(x) = -\int_0^\infty \frac{x}{x^2+t^2}\,\bar{\sigma}(t)\,dt, \tag{28.4}$$

где

$$\bar{\sigma}(t) = \int_0^t \sigma(t)\,dt. \tag{28.5}$$

29°. Все предыдущие формулы, относящиеся к теории гаммаморфной функции $\Gamma_\Omega(x)$, выведены нами в предположении, что x есть число вещественное и положительное. Однако мы без труда убедимся, что эти формулы имеют место и при комплексном значении x с положительной вещественной частью.

Покажем, что формула (28.4) позволяет распространить наши формулы и на комплексные значения x с отрицательной вещественной частью. В самом деле, эта формула показывает, что для функции $J(x)$ мнимая ось является купюрой, т. е. $J(x)$ представляет собою две различные аналитические функции направо и налево от этой оси.

Обозначим ветвь, лежащую направо от мнимой оси, через $J_+(x)$, а ветвь, лежащую налево, через $J_-(x)$ и постараемся определить разность

$$J_+(x) - J_-(x).$$

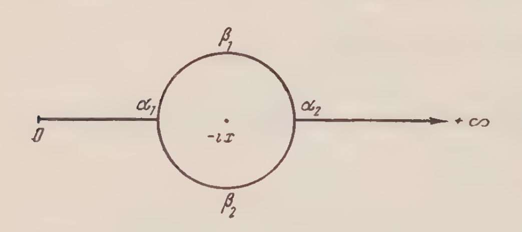


Рис. 3

Пусть x располагается на мнимой оси в верхней ее части; тогда точка $-ix$ будет располагаться на положительной части вещественной оси (рис. 3), а так как точка $t=-ix$ есть полюс подинтегральной функции в выражении (28. 4), то

$$J_+(x) - J_-(x) = -2\int_Q \frac{x}{x^2+t^2}\,\bar{\sigma}(t)\,dt = 4\pi i\,\frac{x}{-2ix}\,\bar{\sigma}(-ix), \tag{29.1}$$

т. е.

$$J_+(x) - J_-(x) = -2\pi\bar{\sigma}(-ix). \tag{29.2}$$

Если же x располагается на мнимой оси в нижней ее части, то

$$J_+(x) - J_-(x) = -2\pi\bar{\sigma}(ix).$$

Отсюда мы можем сделать следующее заключение: если вещественная часть x отрицательна, то к правой части основной формулы (24.17) следует еще прибавить член

$$-2\pi\bar{\sigma}(\mp ix),$$

причем верхний или нижний знаки берутся в зависимости от того, где находятся x: выше или ниже вещественной оси.

30° Установим еще одно интегральное соотношение, содержащее производную от $\log \Gamma_\Omega(x)$.

Из соотношения (24.15) следует, что

$$\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)} = E_1 - \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x - \frac{1-\zeta_\Omega(0)}{x} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\pi}{\sin \pi s}\frac{\zeta_\Omega(1-s)}{x^s}\,ds, \tag{30.1}$$

где

$$E_1 = \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\left\{\frac{\zeta_\Omega^{(r+1)}(0)}{r+1} - \log\frac{(2\pi)^\chi}{|\Delta|}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\right\}, \quad 1<\gamma<2.$$

Интегрируя функцию, стоящую здесь под знаком интеграла, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\gamma - iT), \quad B(\gamma + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT),$$

где $0<\beta<1$, в пределе при $T\to+\infty$ найдем, что

$$\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)} + \frac{1}{x} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x - E_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\zeta_\Omega(1-s)\frac{ds}{x^s}.$$

Обозначим через a произвольное положительное число и примем во внимание, что

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}(ax)\,x^{\sigma-1}dx = \frac{\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)}{a^\sigma}, \quad \operatorname{Re}(\sigma)>0;$$

тогда интегрированием по параметру найдем, что

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}(ax)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)} + \frac{1}{x} + \frac{2^{r+1}\pi^{r_2}}{\sqrt{|\Delta|}}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\log x - E_1\right\}dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\,\zeta_\Omega(1-s)\frac{ds}{a^{1-s}}. \tag{30.2}$$

Но, в силу функционального уравнения

$$\zeta_\Omega(1-s) = A^{2s-1}G(1-s)\,\zeta_\Omega(s),$$

интеграл, стоящий в формуле (30.2) справа, может быть переписан так:

$$J = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,\zeta_\Omega(s)\frac{ds}{A^{1-2s}a^{1-s}}, \quad 0<\beta<1.$$

Сделаем в этом интеграле подстановку $s = 1-\sigma$; тогда мы получим:

$$J = -\frac{1}{Aa}\frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\frac{\pi}{\sin\pi\sigma}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-\sigma)\zeta_\Omega(1-\sigma)\frac{d\sigma}{\left(\frac{1}{aA^2}\right)^{1-\sigma}}, \quad 0<\beta_1<1.$$

На основании этого соотношения равенство (30.2) может быть написано в следующей симметричной форме:

$$\sqrt{a}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}(ax)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx=$$

$$=\sqrt{b}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}(bx)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx, \quad (30.3)$$

где положительные числа a и b связаны между собою равенством

$$ab=\frac{1}{A^2}. \quad (30.4)$$

Для рационального поля эта формула переходит в соотношение

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}-\log x\right\}dx=$$

$$=\sqrt{b}\int_0^\infty e^{-b^2x^2}\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}-\log x\right\}dx, \quad (30.5)$$

где $ab=\pi$, приведенное нами в заметке ([3]).

Равенство (30.3) принадлежит к числу интегральных соотношений, представляющих собою распространение на изучаемое алгебраическое поле известных интегральных равенств Рамануджана и Харди.

Поступило
26. I. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., Note on some infinite integrals, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер. т. IV, № 6 (1936), 247—250.

[2] Кошляков Н. С., On an expansion of $\frac{\pi \operatorname{sh} 2n\pi}{\operatorname{ch} 2\pi n-\cos 2\pi\xi}$ in a semiconvergent series, The Messenger of Math., new ser., vol. IV, № 5 (1924), 74—80.

[3] Кошляков Н. С., Об одной общей сумматорной формуле и ее приложениях, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. IV, № 4 (1934), 187—191.

[4] Кошляков Н. С., Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 113—144.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 261–296

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

О ПОСТРОЕНИИ ПОЛЕЙ С ЗАДАННОЙ ГРУППОЙ ГАЛУА ПОРЯДКА l^α

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе излагается новый метод построения полей с заданной группой Галуа порядка l^α, дающий более широкий класс полей, чем известный ранее метод Шольца-Рейхардта. В частности, этот метод применим и при $l = 2$.

Введение

Существование полей с заданной группой Галуа порядка l^α $(l > 2)$ над заданным полем алгебраических чисел было доказано в 1937 году А. Шольцем ([9]).

Построенное в основном на тех же идеях, но более простое доказательство было предложено Г. Рейхардтом ([8]).

О решении той же задачи без ограничения $l > 2$ было сообщено Т. Таннака ([10]). Кажется, до сих пор не было замечено, что доказательство Таннака содержит ошибку. Указание ошибки в рассуждении и построение противоречащего примера к тому утверждению, на котором Таннака строит свое доказательство, содержится в п. 3 § 2 настоящей работы.

Класс полей с заданной группой Галуа порядка l^α, который может быть построен методом Шольца-Рейхардта, ограничен в двух отношениях.

Во-первых, накладывается ограничение $l > 2$, так что остается открытым вопрос о существовании полей с заданной группой Галуа порядка 2^α, в то время как этот вопрос представляется интересным, например, с точки зрения теории построений циркулем и линейкой.

Во-вторых, методом Шольца-Рейхардта строятся только расширения над полем рациональных чисел. Правда, из расширения K/R над полем рациональных чисел можно получить расширение Kk/k над любым числовым полем k, которое, если только $K \cap k = R$, имеет ту же группу Галуа. Однако таким образом строится весьма узкий класс полей. Например, все такие поля инвариантны при всех автоморфизмах k/R.

Легко видеть, что для того чтобы построить поля с некоторыми очень простыми группами Галуа, необходимо научиться строить поля с группой Галуа порядка l^α, которые не могут быть построены методом Шольца-Рейхардта. Пусть, например, G есть группа порядка l^α, Γ — прямое произведение n групп G_i, изоморфных G, и $\mathfrak{G}$ — группа, имеющая нормальный делитель Γ, причем элементы факторгруппы $\mathfrak{G}/\Gamma$ индуцируют в Γ автоморфизмы, сводящиеся к перестановке G_i. Предположим, что

над полем рациональных чисел R существует поле K с группой Галуа $\mathfrak{G}$ и пусть k — подполе, принадлежащее к Г. Поле K/k является композитом n полей K_i/k, имеющих группу Галуа G, сопряженных между собой и взаимно простых над k. Как было сказано выше, такие поля не могут быть построены методом Шольца-Рейхардта. Аналогичным образом, построение полей с любыми разрешимыми группами Галуа тесно связано с построением достаточно общих полей с группой Галуа порядка l^α.

Настоящая работа содержит метод построения полей с заданной группой Галуа порядка l^α, при котором на конструируемые поля не накладываются ограничения, имеющие место в методе Шольца-Рейхардта. В частности, доказывается, что над любым полем алгебраических чисел существует расширение с заданной группой Галуа порядка 2^α.

При построении используются условия, найденные Шольцем, при которых поле может быть погружено центральным образом в поле с заданной группой Галуа. Поля, удовлетворяющие этим условиям, называются шольцевыми. Основной задачей является нахождение условий, при которых данное шольцево поле погружаемо центральным образом в шольцево же поле с заданной группой Галуа. Для этого строятся инварианты шольцева поля (χ, X) и $(X)_h$, из которых наибольшую роль играют инварианты (χ, X). Эти инварианты определяются, исходя из арифметических свойств поля. Они представляют собою скалярное произведение элементов одномерной и двумерной групп когомологий, по своим свойствам напоминающее индекс пересечения. Равенство инвариантов единице и является необходимым и достаточным условием погружаемости.

Задача сводится, таким образом, к построению шольцевых полей с инвариантами, равными единице. Это делается в § 3, где доказывается, что в шольцевом поле, группа Галуа которого имеет достаточно много образующих, обязательно содержится подполе с нужной группой Галуа и с инвариантами, равными единице. Для этого строится теория гомоморфизмов групп порядка l^α и вводится понятие их композиции, превращающееся в случае абелевых групп в умножение характеров.

В работе неоднократно используется закон плотностей Чеботарева, так что могло бы показаться, что используются аналитические соображения. Однако, просмотрев соответствующие рассуждения, легко заметить, что можно было бы ограничиться применением теоремы Фробениуса в группах порядка l^α. Как заметил Дейринг (6), в этом случае теорема Фробениуса может быть доказана не аналитически.

Автор глубоко благодарен Д. К. Фаддееву, просмотревшему рукопись этой работы и сделавшему ряд ценных замечаний.

§ 1. Инварианты центральных расширений

В этом параграфе будут исследованы свойства полей алгебраических чисел, группы Галуа которых имеют порядок, равный степени простого числа. Относительно всех групп, которые будут нам встречаться, мы будем предполагать, что их порядок есть степень одного и того же простого числа l.

1. Алгебраические свойства центральных расширений. Группа G_1 будет называться центральным расширением группы G, если G является гомоморфным образом G_1, а ядро гомоморфизма лежит в центре G_1 и имеет показатель l. При этом и самый гомоморфизм включается в понятие расширения, так что два разные гомоморфизма G_1 на G будут давать разные расширения. Если ядро гомоморфизма G_1 на G является циклической группой порядка l, то мы будем называть расширение простым и центральным.

Если k — произвольное поле, Ω — его конечное, нормальное сепарабельное расширение, K — промежуточное подполе $k \subset K \subset \Omega$ и K/k нормально, то группа Галуа Ω/k является расширением группы Галуа K/k. Если это расширение центральное, соответственно простое центральное, то мы и Ω/k будем называть центральным, соответственно простым центральным расширением поля K/k.

Предположим, что k имеет характеристику $\neq l$ и содержит корень степени l из 1, а Ω/k является простым центральным расширением K/k. Тогда Ω/K является циклическим полем степени l и поэтому $\Omega = K(\sqrt[l]{\mu})$ с некоторым $\mu \in K$ [см. (1), стр. 217].

Как известно [см. (8), стр. 3], то обстоятельство, что Ω/k является центральным расширением поля K/k, эквивалентно тому, что μ удовлетворяет соотношению

$$\mu^\sigma \approx \mu, \tag{1}$$

где σ — любой автоморфизм K/k. Здесь, как и всюду дальше, запись

$$\alpha \approx \beta$$

будет обозначать, что $\alpha\beta^{-1}$ есть l-я степень, само же соотношение будет называться l-равенством. Числа μ, обладающие свойством (1), мы будем называть l-инвариантными.

Пусть группа Галуа Ω/k есть G_1, группа K/k есть G, группа Ω/k есть Z. Так как G_1 есть центральное расширение G, то этим определяется система множителей $a(\sigma, \tau)$ на G со значениями из Z и с единичными автоморфизмами [см. (2), стр. 334]. Выбранное нами число μ определяет при помощи соответствия

$$\sqrt[l]{\mu}^z = X(z)\sqrt[l]{\mu}, \quad z \in Z,$$

характер X группы Z. Применяя X к $a(\sigma, \tau)$, мы получим систему множителей

$$X(a(\sigma, \tau)) = \zeta(\sigma, \tau),$$

заданную на G со значениями из группы корней степени l из 1.

Легко проверить, что два l-инвариантных числа определяют одну и ту же систему множителей $\zeta(\sigma, \tau)$ тогда и только тогда, когда их отношение l-равно инвариантному числу (числу из k). Легко видеть, что произведению l-инвариантных чисел соответствует произведение систем множителей. Группу всех классов неассоциированных систем множителей

на G, со значениями из группы корней l-й степени из 1, мы будем обозначать через $M(G)$. Из вышеизложенного следует, что факторгруппа группы всех l-инвариантных чисел по подгруппе чисел, l-равных инвариантным, изоморфна некоторой подгруппе M' группы $M(G)$:

$$(\mu)/(mC^l) \cong M' \subseteq M(G). \tag{2}$$

Нам будет полезно следующее представление $M(G)$. Пусть $s_1, \ldots, s_d$ — некоторая минимальная система образующих G. Она определяет представление G в виде S/N, где S — свободная группа с d образующими, а N — ее нормальный делитель. Обозначим через N' подгруппу N, порожденную коммутаторами элементов N с элементами S и l-ми степенями элементов N.

ЛЕММА 1. *$M(G)$ изоморфна группе характеров группы N/N'.*

Эта лемма является следствием известной теоремы [см. ([2]), стр. 335], согласно которой для любой группы G, представленной в виде факторгруппы свободной группы S по нормальному делителю N, группа всех классов систем множителей с единичными автоморфизмами и со значениями в произвольной абелевой группе A изоморфна факторгруппе всех гомоморфизмов $N/[S, N]$ в A по подгруппе тех гомоморфизмов, которые индуцируются гомоморфизмами S в A.

Здесь $[S, N]$ означает нормальный делитель S, порожденный коммутаторами элементов S с элементами N.

В рассматриваемом нами случае A есть группа корней степени l из 1. Гомоморфизмы $N/[S,N]$ в A должны поэтому переводить в 1 все l-е степени элементов N, т. е. совпадают с характерами группы N/N'.

Чтобы вывести из сформулированной выше теоремы нашу лемму, нам остается только показать, что любой характер группы N/N', индуцируемый характером порядка l группы S, равен 1.

Это эквивалентно тому, что $N \subset S'$, где S' — подгруппа S, порождаемая коммутаторами и l-ми степенями. То же самое условие можно выразить в виде соотношения

$$S/S' \cong G/G',$$

где G' — подгруппа G, порожденная l-ми степенями и коммутаторами (подгруппа Фраттини). Правильность написанного выше соотношения следует из того, что группы, стоящие в обеих частях, изоморфны элементарным абелевым группам порядка l^d. Для S/S' это очевидно. Для G/G' это следует из теоремы о подгруппе Фраттини [см. ([2]), стр. 402], согласно которой $s_1, \ldots, s_d$ будет тогда и только тогда минимальной системой образующих в G, когда она будет таковой в G/G'.

2. Шольцевы поля. Одной из основных задач теории полей, группа Галуа которых есть l-группа, является исследование условий, при которых данное нормальное расширение K/k погружаемо в центральное расширение Ω/k, группа Галуа которого является заданным центральным расширением группы Галуа K/k. Брауэром [см. ([5]), стр. 56] были найдены для этого необходимые и достаточные условия в терминах рас-

падения некоторых алгебр. Однако условия Брауэра, как правило, трудно непосредственно использовать. Для случая, когда k есть поле алгебраических чисел, небольшим усилением условий Брауэра можно получить, как заметил Шольц (9), следующие условия, достаточные для того, чтобы K/k было погружаемо в расширение Ω/k, группа Галуа которого есть любое центральное расширение группы Галуа K/k:

1°. Простые делители l в k полностью распадаются в K.

2°. Вещественные бесконечно удаленные дивизоры k остаются вещественными в K.

3°. Все критические простые дивизоры $\mathfrak{p}_i$ расширения K/k имеют относительный порядок 1.

4°. Абсолютные нормы критических простых дивизоров удовлетворяют условию: $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_i)^m \equiv 1\ (l^h)$ при некотором m, взаимно простом с l, и достаточно большом h (если $(K:k) = l^{\alpha}$, то достаточно, чтобы было $h > \alpha$).

Заметим, что если k содержит корень степени l из 1, то в условии 4° мы можем положить $m = 1$, так как в этом случае $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l)$.

Будем называть поля, удовлетворяющие условиям 1° — 4°, шольцевыми. У шольцева поля группа M' в (2) совпадает с $M(G)$, т. е.

$$(\mu)/(mC^l) \cong M(G).$$

Ввиду этого, а также ввиду леммы 1, мы будем обозначать одной и той же буквой X:

1) класс l-инвариантных чисел по подгруппе чисел, l-равных инвариантным,

2) элемент $M(G)$ и

3) характер группы N/N'.

Центральные расширения (даже простые) шольцева поля K/k сами, вообще говоря, не являются шольцевыми полями. В самом деле, если даже $K(\sqrt[l]{\mu})/k$ является шольцевым полем, то можно так подобрать число $m \in k$, чтобы поле $K(\sqrt[l]{\mu m})/k$, имеющее над k ту же группу Галуа, что и $K(\sqrt[l]{\mu})$, не было уже шольцевым.

Для доказательства существования поля с заданной группой порядка l^{α} важно знать, когда у шольцева поля K/k существует шольцево расширение с любой группой, являющейся центральным расширением группы Галуа K/k. Шольц показал, что такое расширение всегда существует, если k есть поле рациональных чисел и $l > 2$. Этот факт является основным в его доказательстве существования расширений поля рациональных чисел с заданной группой нечетного порядка l^{α}.

Мы введем сейчас необходимые и достаточные условия существования такого расширения. Для этого нам нужно ввести некоторые новые инварианты полей, группы Галуа которых имеют порядок l^{α}, в предположении, что основное поле содержит корень степени l из 1.

3. Арифметическая структура l-инвариантных чисел. Исследуем сначала разложение на множители l-инвариантного числа μ поля K. Рассмотрим какой-нибудь его простой делитель $\mathfrak{P}$. Предположим,

что $\mathfrak{P}^{\sigma}$ входит в μ в степени $a(\sigma)$. Из l-инвариантности μ следует, что

$$a(\sigma) \equiv a(1)\,(l).$$

Таким образом, та часть разложения μ на множители, которая состоит из дивизоров, сопряженных с $\mathfrak{P}$, может быть разложена на произведение всех таких различных дивизоров в одной и той же степени, например, $a(1)$, и на l-ю степень. Первое произведение есть, очевидно, инвариантный дивизор. Поступая аналогично со всеми делителями μ, мы получим, что дивизор (μ) разлагается на l-ю степень и инвариантный дивизор. Так как всякий инвариантный дивизор есть произведение критических простых дивизоров на дивизор из основного поля, то мы получаем для μ разложение:

$$(\mu) = \mathfrak{C}^{l}\mathfrak{D}\mathfrak{m}, \tag{3}$$

где $\mathfrak{m}$ есть дивизор поля k, взаимно простой с дискриминантом K/k, а $\mathfrak{D}$ — инвариантный дивизор, состоящий только из простых делителей дискриминанта K/k, причем ни $\mathfrak{D}$, ни $\mathfrak{m}$ не содержат l-х степеней. Ясно, что такое разложение однозначно.

Простые дивизоры $\mathfrak{P}$, делящие $\mathfrak{D}$, могут быть также охарактеризованы следующим свойством: порядок образующего автоморфизма группы инерции дивизора $\mathfrak{P}$ в K в l раз меньше, чем порядок любого элемента группы Галуа $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/k$, индуцирующего этот автоморфизм. Иными словами, образующая группы инерции $\mathfrak{P}$ в K повышает свой порядок при расширении K до $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$. При этом мы говорим об образующей группы инерции $\mathfrak{P}$ в K/k, так как эта группа циклическая, что следует из того, что $(l, \mathfrak{P}) = 1$ ввиду условия 1° в определении шольцева поля.

Для доказательства нашего утверждения заметим, что ввиду того же условия, $(l, \mathfrak{P}) = 1$, и группа инерции любого простого делителя $\mathfrak{P}$ в поле $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$ циклическая. Порядок этой группы или, что то же самое, ее образующей в l раз больше, чем порядок группы инерции $\mathfrak{P}$ в K, так как порядок ветвления увеличился в l раз при переходе от K к $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$. Таким образом, образующая группы инерции увеличивает свой порядок в l раз. Но если σ — любой автоморфизм $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/k$, индуцирующий в K образующий автоморфизм группы инерции $\mathfrak{P}$, то он имеет тот же порядок, что и образующий автоморфизм группы инерции простого делителя $\mathfrak{P}$ в $K\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$, так как он отличается от него только множителем, принадлежащим к центру G_1 и имеющим порядок l.

Заметим, что $\mathfrak{D}$ не меняется при умножении на число вида mC^{l} и поэтому является инвариантом класса X. Мы будем поэтому обозначать $\mathfrak{D}$ через $\mathfrak{D}(X)$. Очевидно, что имеет место соотношение:

$$\mathfrak{D}(X_1X_2) \approx \mathfrak{D}(X_1)\,\mathfrak{D}(X_2).$$

4. Инварианты (χ, X). Мы будем называть два дивизора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ l-взаимно простыми, если любой их общий простой делитель $\mathfrak{p}$ входит

в один из них в степени, делящейся на l. Напомним, что если α и $\mathfrak{b}$ l-взаимно просты, то символ Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)$ определен.

Мы будем говорить, что дивизор $\mathfrak{a}$ поля k l-взаимно прост с инвариантным дивизором $\mathfrak{B}$ поля K, если для любого простого дивизора $\mathfrak{p}$, входящего в $\mathfrak{a}$ в степени, не делящейся на l, его простой делитель $\mathfrak{P}$ в K входит в $\mathfrak{B}$ в степени, делящейся на l.

Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный простой дивизор поля k, l-взаимно простой с μ, и $\mathfrak{P}$ — произвольный простой делитель $\mathfrak{p}$ в K. Символ Лежандра l-й степени $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right)$ не зависит от выбора $\mathfrak{P}$ среди делителей $\mathfrak{p}$. Действительно, если $\mathfrak{P}^\sigma$ — любой другой делитель, то

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}^\sigma}\right)=\left(\frac{\mu^{\sigma^{-1}}}{\mathfrak{P}}\right)=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right),$$

так как $\mu^{\sigma^{-1}}\approx\mu$. Ввиду этого мы будем символ $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right)$ (зависящий на самом деле только от $\mathfrak{p}$) обозначать через $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right]$. Для $\mathfrak{p}$, не l-взаимно простых с μ, $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right]$ не определено. Распространив по мультипликативности символ $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right]$ на все дивизоры $\mathfrak{a}$ поля k, l-взаимно простые с $\mathfrak{m}\mathfrak{D}$, получим символ $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right]$. Очевидно, что если $\mathfrak{a}$ состоит из простых дивизоров, имеющих в K первый порядок, то существует такое $\mathfrak{a}\in K$, что $\mathfrak{a}=N_{K/k}(\mathfrak{A})$ и

$$\left[\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right]=\left(\frac{\mu}{\mathfrak{A}}\right). \tag{4}$$

Пусть α — число поля k, l-взаимно простое с $\mathfrak{D}(X)$ и удовлетворяющее следующим условиям:

1) α l-гиперпримарно;

2) α тотально-положительно (это условие существенно только при $l=2$);

3) все простые дивизоры, входящие в α в степенях, не кратных l, разлагаются в K на простые множители первого порядка.

Если $(\alpha, \mathfrak{m})\neq 1$, то умножим $\mathfrak{m}$ на такое число $m\in k$, чтобы $(\alpha, \mathfrak{m}m)=1$. Тогда для $\mu'=\mu m$ символ $\left[\frac{\mu'}{\alpha}\right]$ определен.

Рассмотрим отношение:

$$\left[\frac{\mu'}{\alpha}\right]\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}'}\right)^{-1} \text{ с } \mathfrak{m}'=\mathfrak{m}m. \tag{5}$$

Очевидно, что это отношение не зависит от выбора вспомогательного числа m. Замена m на m_1 привела бы к умножению (5) на множитель

$$\left(\frac{mm_1^{-1}}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{mm_1^{-1}}\right)^{-1},$$

равный 1, по закону взаимности и ввиду l-гиперпримарности α. Больше того, выражение (5) не зависит от выбора μ внутри класса X l-инвариантных чисел, что доказывается точно так же. Ввиду этого мы будем обозначать отношение (5) через (α, X).

Рассмотрим некоторый характер χ порядка l группы Галуа K/k. Как известно [см. ([11]), стр. 45], ему соответствует однозначно с точностью до l-равенства определенное число α_χ из k такое, что:

$$\sqrt[l]{\alpha_\chi} \in K, \quad \sqrt[l]{\alpha_\chi}^{\sigma} = \chi(\sigma)\sqrt[l]{\alpha_\chi}.$$

Ввиду того что поле K/k предполагается шольцевым, то если α_χ l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(X)$, оно удовлетворяет условиям, наложенным нами на число α, для которого мы только что определили символ (α, X). Таким образом определен символ (α_χ, X), который не зависит от выбора числа α_χ, соответствующего χ, и будет поэтому обозначаться через (χ, X).

Выведем некоторые свойства этого символа. Прежде всего очевидна мультипликативность символа (χ, X) по аргументу χ:

$$(\chi_1\chi_2, X) = (\chi_1, X)(\chi_2, X), \tag{6}$$

так как $\alpha_{\chi_1\chi_2} \approx \alpha_{\chi_1}\alpha_{\chi_2}$, а символ $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right]$ мультипликативен по самому своему определению, а также и по аргументу X:

$$(\chi, X_1X_2) = (\chi, X_1)(\chi, X_2), \tag{7}$$

причем в равенствах (6) и (7) символ, стоящий в левой части, определен, если определены оба символа, стоящие в правой части.

Выясним, как связаны символы (χ, X) в различных полях. Пусть K/k есть нормальное подполе шольцева расширения K_1/k, так что его группа Галуа G является факторгруппой группы G_1 поля K_1/k. Тогда всякая система множителей на G является в то же время системой множителей на G_1, и, следовательно, любой элемент X группы $M(G)$ можно рассматривать как элемент X_1 группы $M(G_1)$. Точно так же любой характер χ порядка l группы G можно рассматривать как характер χ_1 группы G_1. Мы утверждаем, что при этом

$$(\chi, X) = (\chi_1, X_1). \tag{8}$$

Действительно, в этом случае $\alpha_\chi \approx \alpha_{\chi_1}$. Ввиду условия 3), наложенного на число α,

$$(\alpha_\chi) = N_{K/k}(\mathfrak{A}_\chi), \quad \mathfrak{A}_\chi \in K,$$

$$(\alpha_{\chi_1}) = N_{K_1/k}(\mathfrak{A}_{\chi_1}), \quad \mathfrak{A}_{\chi_1} \in K_1,$$

причем мы можем считать, что $\mathfrak{A}_\chi$ и $\mathfrak{A}_{\chi_1}$ выбраны так, что

$$\mathfrak{A}_\chi = N_{K_1/K}(\mathfrak{A}_{\chi_1}).$$

Ввиду определения символов (χ, X) и $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{A}}\right]$, формулы (4) и известных свойств символа Лежандра, имеем:

$$(\chi_1, X_1) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{A}_{\chi_1}}\right)_{K_1} \left(\frac{\alpha_{\chi_1}}{\mathfrak{m}}\right)_k^{-1} = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{A}_\chi}\right)_K \left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1} = (\chi, X).$$

5. Инварианты $(X)_h$. Для того чтобы изложить конструкцию других инвариантов шольцева поля, определяющих, наряду с инвариантами (χ, X), его погружаемость в шольцевы центральные расширения, нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2. *В каждом классе X l-инвариантных чисел шольцева поля K/k содержится l-гиперпримарное число.*

Доказательство. Предположим только, что в поле K/k выполнено условие 1°, определяющее шольцево поле. Согласно этому условию, любой простой делитель $\mathfrak{l}_i$ числа l в k полностью распадается в K и поэтому кольцо $K_{\mathfrak{l}_i}$, получающееся расширением основного поля k в поле K до его $\mathfrak{l}_i$-адического замыкания, есть прямая сумма полей $k_{\mathfrak{l}_i}$. В этой прямой сумме автоморфизмы K/k вызывают, как легко видеть, регулярную перестановку компонент. Если мы выделим одну из этих компонент, то любая другая будет определяться тем автоморфизмом σ, который переводит в нее эту выбранную компоненту. Ввиду этого

$$K_{\mathfrak{l}_i} = \sum k_{\mathfrak{l}_i}^\sigma,$$

и мы можем отождествить $K_{\mathfrak{l}_i}$ с кольцом функций, заданных на группе Галуа G поля K/k со значениями в $k_{\mathfrak{l}_i}$, причем на функцию $\alpha(\sigma)$ автоморфизм τ действует по правилу

$$\alpha(\sigma)^\tau = \alpha(\sigma\tau).$$

Если l-инвариантному числу μ в кольце $K_{\mathfrak{l}_i}$ соответствует функция $\mu_i(\sigma)$, то для нее мы будем иметь:

$$\mu_i(\sigma\tau) = \mu_i(\sigma)\gamma_i(\tau)^l \tag{9}$$

при некоторой функции $\gamma_i(\tau)$. Подставляя в (9) $\sigma = 1$, получим:

$$\mu_i(\tau) = \mu_i(1)\gamma_i(\tau)^l.$$

Пусть $\mathfrak{l}^{E_i}$ — модули l-гиперпримарности, т. е. такие степени $\mathfrak{l}_i$, что из

$$\alpha \equiv 1 (\mathfrak{l}_i^{E_i}), \quad \alpha \in k_{\mathfrak{l}_i},$$

следует $\alpha \approx 1$ в $k_{\mathfrak{l}_i}$. Мы можем найти такое число C в K и m в k, что если $C_i(\sigma)$ — функция из $K_{\mathfrak{l}_i}$, соответствующая C, то

$$\left.\begin{aligned} C_i(\sigma) &\equiv \gamma_i(\sigma)\,(\mathfrak{l}_i^{E_i}),\\ m &\equiv \mu_i(1)\,(\mathfrak{l}_i^{E_i}) \text{ для всех } \mathfrak{l}_i \mid l. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда l-инвариантное число $\mu m^{-1}C^{-l}$ будет лежать в том же классе X, что и μ, и будет l-гиперпримарным ввиду сравнений (10). Лемма доказана.

Заметим, что все l-гиперпримарные числа из одного и того же класса X получаются друг из друга умножением на числа вида mC^l, где m — l-гиперпримарное число.

Перейдем теперь к построению второй серии инвариантов. Пусть k_h есть максимальное расширение k, имеющее абелеву группу показателя l и содержащееся в $k(\zeta_h)$, где ζ_h есть первообразный корень степени l_h из 1. Из элементарных свойств абсолютно абелевых расширений вытекает, что k_h имеет следующее строение. Пусть k содержит корень степени l^r из 1 и не содержит корня степени l^{r+1} из 1. Если $h \leqslant r$, то $k_h = k$. Если $h > r$ и $l \neq 2$ или $l = 2$, но $r > 1$, то k_h получается присоединением к k корня степени l^{r+1} из единицы и, следовательно, $(k_h : k) = l$. Если $l = 2$ и $r = 1$, то $k_2 = k(\sqrt{-1})$ и $k_h = k(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$ при $h > 2$.

Пусть X есть класс l-инвариантных чисел, μ — его l-гиперпримарный представитель и $\mathfrak{m}$ — делитель μ в разложении (3). Обозначим через $(X)_h$ содержащий $\mathfrak{m}$ класс смежности по подгруппе, соответствующей, согласно теории полей классов [см. (7)], полю k_h. Класс $(X)_h$ не зависит от выбора μ в X. Действительно, переход к другому представителю сводился бы к умножению $\mathfrak{m}$ на l-гиперпримарное число m, которое должно принадлежать к подгруппе, соответствующей k_h. Это следует из того, что поле, соответствующее группе l-гиперпримарных чисел, содержит максимальное абелево поле показателя l, в котором разветвляются только делители l. Так как в k_h это свойство выполняется, то соответствующая ему подгруппа должна содержать, согласно теории полей классов, группу l-гиперпримарных чисел.

Более подробно можно описать $(X)_h$ следующим образом. Обозначим через Λ_h группу рациональных чисел, сравнимых с 1 по модулю l^{r_1}, где $r_1 = r$, если $h \leqslant r$, $r_1 = r + 1$, если $h > r$ и $l \neq 2$ или $l = 2$, но $r > 1$, $r_1 = 2$, если $l = 2, r = 1$, $h = 2$, и $r_1 = 3$, если $l = 2$, $r = 1$, $h > 2$. Заметим, что во всех случаях

$$r_1 \geqslant \min(h, r). \tag{11}$$

Инвариант $(X)_h$ характеризуется как класс $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})\Lambda_h$, где $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})$ означает абсолютную норму $\mathfrak{m}$.

Так как поле k содержит поле корня степени l^r из 1, то всегда

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) \equiv 1 \ (l^r).$$

Поэтому $(X)_h$ может принимать только конечное число значений, а именно, при $l \neq 2$ l значений, а при $l = 2$ — или 2 или 4 значения. Точно так же очевидно, что аналогично (6) и (7) имеют место соотношения:

$$(X_1X_2)_h = (X_1)_h (X_2)_h, \tag{12}$$

$$(X)_h = (X_1)_h \tag{13}$$

с теми обозначениями, которые были приняты при выводе равенств (7) и (8).

§ 2. Условия погружаемости для шольцевых расширений

В этом параграфе мы выведем условия, при которых шольцево поле K/k можно погрузить в шольцево поле с заданной группой Галуа, являющейся простым центральным расширением группы K/k. Так как в условие 4°, определяющее шольцево поле, входит показатель h, то будем предполагать, что в K/k оно выполнено при некотором h, и требуется погрузить K/k в поле, в котором оно было бы выполнено при том же значении h. Условия при этом будут зависеть от h.

Для некоторого упрощения рассуждений мы предположим, что поле K пересекается с полем $\mathfrak{K}$, являющимся максимальным неразветвленным расширением k с абелевой группой Галуа показателя l, по основному полю k. При этом мы покажем, что K/k можно погрузить в поле, для которого это свойство также имеет место.

1. Случай основного поля, содержащего l-й корень из 1. Мы предположим, что основное поле k содержит корень степени l из 1. Тогда для любого шольцева расширения K/k с l-группой Галуа определены инварианты (χ, X) и $(X)_h$, введенные в предшествующем параграфе.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы шольцево поле K/k можно было погрузить в шольцево поле с группой Галуа, являющейся простым центральным расширением группы Галуа K/k, соответствующим характеру X, необходимо и достаточно, чтобы инварианты (χ, X) для всех характеров χ и $(X)_h$ поля K были равны* 1.

Заметим, что равенство единице этих инвариантов равносильно выполнению условий

$$\left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right] = \left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right), \tag{14}$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m}) \in \Lambda_h \tag{15}$$

для l-инвариантных и l-гиперпримарных чисел μ из класса X и для всех характеров χ. Условие $(\alpha_\chi, \mathfrak{m}) = 1$ здесь выполнено само собой, так как $\alpha_{\mathfrak{m}}$ не содержит делителей дискриминанта K/k.

Докажем необходимость условий (14) и (15). Нам известно, что их достаточно проверить только для одного представителя из класса X l-инвариантных чисел. Но, с другой стороны, в силу условий теоремы, в этом классе существует хотя бы одно число μ, для которого $K(\sqrt[l]{\mu})$ является шольцевым полем. Пусть $\mathfrak{P}$ — критический простой дивизор K/k. Если $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}(X)) = 1$, то из того что $\mathfrak{P}$ имеет в $K = (\sqrt[l]{\mu})$ порядок 1, следует, что

$$\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right] = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right) = 1.$$

Так как α_χ состоит из критических простых дивизоров и l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(X)$, то

$$\left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right] = 1. \tag{16}$$

С другой стороны, всякий простой дивизор $\mathfrak{q}/\mathfrak{m}$ должен полностью распадаться в K, так как иначе он был бы критическим простым дивизором $K(\sqrt[l]{\mu})$ не первого порядка. Из этого следует, что $\mathfrak{q}$ полностью распадается в $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$, т. е.

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{q}}\right)=1 \text{ для } \mathfrak{q}/\mathfrak{m}, \text{ т. е. } \left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)=1. \tag{17}$$

Равенства (16) и (17) показывают, что условия (14) выполняются.

Что касается условий (15), то они тоже выполняются, так как для любого простого дивизора $\mathfrak{q}/\mathfrak{m}$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q})\equiv 1\,(l^h),$$

т. е.

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m})\equiv 1\,(l^h)$$

и всегда

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{m})\equiv 1\,(l^r);$$

это и означает, ввиду (11), что $\mathfrak{N}(\mathfrak{m})\in\Lambda_h$.

Докажем теперь достаточность условий (14) и (15). Так как поле K/k — шольцево, то в нем можно найти такое l-инвариантное число μ, что поле $K(\sqrt[l]{\mu})/k$ будет иметь группу Галуа, являющуюся центральным простым расширением группы Галуа K/k, соответствующим характеру X. Не меняя группы Галуа $K(\sqrt[l]{\mu})/k$, мы можем менять μ произвольным образом в его классе X.

Нам нужно, следовательно, доказать, что при выполнении условий (14) и (15) в классе X l-инвариантных чисел можно найти такое число μ, что в поле $K(\sqrt[l]{\mu})$ будут выполняться все четыре свойства, определяющие шольцево поле.

Относительно первого свойства это уже доказано в лемме 2, и мы поэтому будем дальше выбирать в X l-инвариантное l-гиперпримарное число μ_0.

Выполнения второго условия можно добиться аналогично, но еще проще. Это условие содержательно только для $l=2$. Пусть $\mathfrak{p}_{\infty,i}$ — вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры k. $K_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}$ является, по условию, прямой суммой полей вещественных чисел $k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}$. Из рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве леммы 2, следует, что числу μ_0 в каждом $K_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}$ соответствует такая вещественная функция $\mu_{0,i}(\sigma)$, что

$$\mu_{0,i}(\sigma\tau)=\mu_{0,i}(\sigma)\,\beta_i(\tau)^2.$$

Отсюда следует, что все $\mu_{0,i}(\sigma)$ имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком $\mu_{0,i}(1)$. Выберем в k такое l-гиперпримарное число m_0, чтобы знак его компоненты в каждом из $k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}$ совпадал со знаком соответствующего $\mu_{0,i}(1)$. Тогда $\mu_0 m_0$ будет снова l-гиперпримарным и уже

тотально-положительным. Это новое число мы обозначим через μ'. Для него уже выполнены свойства 1° и 2°.

Пусть $\mathfrak{p}_i$ — все критические простые дивизоры K/k, взаимно простые с дивизором $\mathfrak{D}(X)$. Найдем такое l-гиперпримарное тотально-положительное число $m' \in k$, что

$$\left(\frac{m'}{\mathfrak{p}_i}\right) = \left[\frac{\mu'}{\mathfrak{p}_i}\right]^{-1}, \text{ т. е. } \left(\frac{\mu' m'}{\mathfrak{P}_i}\right) = 1 \text{ для всех } \mathfrak{p}_i.$$

Это условие сводится к конечному числу сравнений по модулям $\mathfrak{p}_i$, взаимно простым между собою и с l, а поэтому такое число m' существует. Число $\mu' m'$ обозначим через μ'' и попрежнему положим

$$(\mu'') = (\mathfrak{C}'')^l \mathfrak{D}\mathfrak{m}''.$$

Рассмотрим модуль $\mathfrak{F}$, являющийся произведением всех критических простых дивизоров $\mathfrak{p}_i$, взаимно простых с $\mathfrak{D}(X)$, всех вещественных бесконечно удаленных дивизоров $\mathfrak{p}_{\infty,i}$ и всех $\mathfrak{l}_i^{E_i}$ (определение E_i см. в доказательстве леммы 2). Через $S_{\mathfrak{F}}$ обозначим группу l-х степеней всех классов $\bmod \mathfrak{F}$, через L/k — поле классов к группе $S_{\mathfrak{F}}$ и через Z_h — поле, получающееся присоединением к k корня степени l^h из 1. Обозначим через σ автоморфизм L/k, являющийся автоморфизмом Артина дивизора $\mathfrak{m}''$. Докажем, что в композите KZ_hL существует автоморфизм $\bar{\sigma}$, индуцирующий в K и Z_h единичный автоморфизм, а в L — автоморфизм σ.

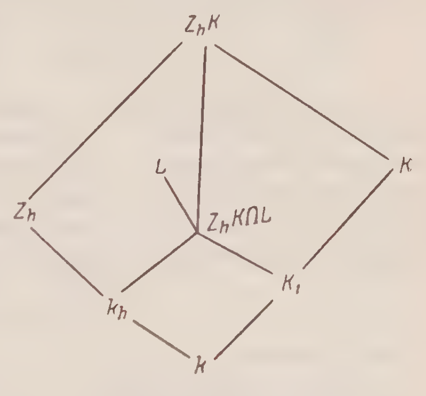


Рис. 1

Действительно, $KZ_h \cap L$ есть поле K_1k_h, где k_h есть поле, участвовавшее в определении инварианта $(X)_h$, а K_1 получается присоединением к k всех $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$, для которых α_χ l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(X)$ (см. рис. 1). Докажем, что σ индуцирует в $KZ_h \cap L$ единичный автоморфизм. Согласно сказанному выше, σ индуцирует в $KZ_h \cap L$ автоморфизм, являющийся автоморфизмом Артина дивизора $\mathfrak{m}''$ в K_1k_h.

В k_h $\mathfrak{m}''$ принадлежит к единичному автоморфизму, так как по условию $(X)_h = 1$.

Для всех $\mathfrak{p}_i$, взаимно простых с $\mathfrak{D}(X)$, по построению μ'',

$$\left[\frac{\mu''}{\mathfrak{p}_i}\right] = 1, \text{ т. е. } \left[\frac{\mu''}{\alpha_\chi}\right] = 1$$

для α_χ, l-взаимно простых с $\mathfrak{D}(X)$. Так как, по условию, $(\chi, X) = 1$, то отсюда следует, что для таких α_χ

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}''}\right) = 1.$$

Это и значит, что $\mathfrak{m}''$ принадлежит в K_1 к единичному автоморфизму. Таким образом, $\mathfrak{m}''$ принадлежит в K_1 и в k_h, а следовательно, и в $K_1 k_h$ к единичному автоморфизму. Поскольку автоморфизм σ поля L индуцирует в $KZ_h \cap L$ единичный автоморфизм, он может быть продолжен до KZ_hL так, чтобы индуцировать в KZ_h единичный. Это продолжение мы и обозначим через $\bar{\sigma}$.

Согласно закону плотностей Чеботарева [см. (4), стр. 148], в k существует простой дивизор $\mathfrak{q}$, принадлежащий в Z_hLK к автоморфизму $\bar{\sigma}$. Так как $\mathfrak{q}$ принадлежит в L к тому же автоморфизму, что и $\mathfrak{m}''$, то $\mathfrak{q}$ лежит в том же классе по $S_{\mathfrak{F}}$, что и $\mathfrak{m}''$, следовательно, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}''(m)\,\mathfrak{i}^l$, где m l-гиперпримарно, тотально-положительно и сравнимо с 1 по модулю всех $\mathfrak{p}_i$. Докажем, что число $\mu = \mu'' m$ удовлетворяет всем четырем нужным нам условиям. Оно l-гиперпримарно и тотально-положительно, так как такими были μ'' и m. В поле $\Omega = K(\sqrt[l]{\mu})$ критические простые дивизоры K будут иметь порядок 1, так как у делителей $\mathfrak{D}(X)$ порядок не изменится и только показатель ветвления увеличится в l раз, а для $\mathfrak{p}_i$ взаимно простых с $\mathfrak{D}(X)$, это следует из того, что

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}_i}\right) = \left(\frac{\mu'' m}{\mathfrak{P}_i}\right) = \left[\frac{\mu''}{\mathfrak{p}_i}\right]\left(\frac{m}{\mathfrak{p}_i}\right) = 1.$$

Расширение Ω / K будет иметь, ввиду того что

$$(\mu) = (\mu'' m) = (\mathfrak{C}''\mathfrak{i}^{-1})^l\, \mathfrak{D}\mathfrak{q},$$

в качестве критических простых дивизоров делители $\mathfrak{D}$, про которые уже доказано, что их порядок 1, и делители $\mathfrak{q}$, которые имеют порядок 1, так как, по построению, $\mathfrak{q}$ принадлежит в K/k к единичному автоморфизму. Наконец, и четвертое условие выполнено. Для критических простых дивизоров K/k это было предположено, а для $\mathfrak{q}$ следует из того, что оно, по построению, принадлежит к единичному автоморфизму в Z_h, т. е.

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1\,(l^h).$$

Теорема доказана.

В случае, когда характер $X \neq 1$, максимальное подполе поля K, имеющее абелеву группу показателя l, не изменится при расширении K до $K(\sqrt[l]{\mu})$, так что и $K(\sqrt[l]{\mu})$ будет пересекаться с неразветвленным полем $\mathfrak{K}$ по k. Если же $X = 1$, то μ l-равно числу α из k. По построению, оно делится на простой дивизор $\mathfrak{q}$, взаимно простой со всеми α_χ. Максимальное подполе поля $K(\sqrt[l]{\mu})$ с абелевой группой показателя l получается из такого же подполя поля K присоединением $\sqrt[l]{\alpha}$ и, ввиду сказанного выше, также пересекается с $\mathfrak{K}$ по k.

Заметим, что из доказательства теоремы следует, что мы можем выбрать μ в его классе X так, чтобы дивизор $\mathfrak{m}$ из разложения (3) был взаимно прост с любым наперед заданным дивизором.

Из теоремы очевидным образом следует, что для того чтобы шольцево поле K/k можно было погрузить в шольцевы расширения, группы Галуа

которых являются простыми центральными расширениями группы Галуа K/k, соответствующими классам $X_1, \ldots, X_r$, необходимо и достаточно обращение в 1 инвариантов $(\chi, X_1), \ldots, (\chi, X_r)$ для всех χ и всех инвариантов $(X_1)_h, \ldots, (X_r)_h$.

Следствие. *Обращение в 1 всех инвариантов $(X)_h$ и (χ, X) достаточно также для погружаемости шольцева расширения K/k в шольцево расширение, группа Галуа которого является любым центральным (а не только простым) расширением группы Галуа.*

Ввиду того что поле K/k шольцево, в нем существуют такие l-инвариантные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, что поле $\Omega = K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_m})$ имеет нужную нам группу Галуа. Мы можем произвольным образом менять числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$ в их классах X, не меняя при этом группы Галуа Ω/k. Докажем, что $\mu_1, \ldots, \mu_m$ можно выбрать в их классах так, чтобы Ω было шольцевым. Пусть среди $\mu_1, \ldots, \mu_m$ числа $\mu_1, \ldots, \mu_r$ мультипликативно независимы по модулю подгруппы чисел, l-равных инвариантным, а $\mu_{r+1}, \ldots, \mu_m$ l-равны некоторым произведениям $\mu_1, \ldots, \mu_r$ и инвариантных чисел $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$.

Будем присоединять к K по очереди $\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_r}$.

Число образующих групп Галуа получаемых при этом полей $K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_i})$ будет тем же самым числом d, что и у группы Галуа поля K/k. В самом деле, если бы число образующих увеличилось, то увеличилась бы факторгруппа по подгруппе Фраттини, т. е. в поле $K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_i})$ содержалось бы число $\sqrt[l]{\alpha}$, $\alpha \in k$, не содержавшееся в K. Мы имели бы тогда:

$$\alpha \approx \mu_1^{x_1} \ldots \mu_i^{x_i} \text{ в } K \text{ и не все } x_i \equiv 0\,(l),$$

что противоречит выбору $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Таким образом, при последовательном присоединении $\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_r}$, характеры χ будут оставаться такими же.

На каждом шагу нам надо будет присоединить $\sqrt[l]{\mu_i}$, соответствующее классу X_i, причем μ_i лежит не только в $K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_{i-1}})$, но и в K. Ввиду того что характеры χ остаются теми же, мы получаем из (8) и (13), что

$$(\chi, X_i) = 1, \quad (X_i)_h = 1,$$

а это и значит, что, изменив μ_i на множитель из k, мы сделаем поле $K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_i})$ шольцевым.

Теперь нам осталось к шольцеву полю $K(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_r})$ присоединить, также по очереди, числа $\sqrt[l]{\alpha_{r+1}}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_m}$. Так как здесь присоединения будут соответствовать единичному классу, то все инварианты

равны 1 и, согласно теореме 1, мы можем $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_m$ выбирать так, чтобы все поле получилось шольцевым.

2. Случай основного поля, не содержащего l-й корень из 1. Предположим, что основное поле k не содержит корня степени l из 1. Пусть K/k — шольцево поле. Присоединим к k и K корень ζ степени l из 1 и обозначим $k(\zeta)$ через $\bar{k}$, а $K(\zeta)$ — через $\bar{K}$. Степень $(\bar{k}:k)$ обозначим через m. Очевидно, что $m \mid l-1$ и поэтому $(m, l)=1$.

Заметим, что условия шольцевости для полей K/k и $\bar{K}/\bar{k}$ эквивалентны. Проверим это для всех четырех условий.

Условие 2° при этом существенно только при $l=2$, но в этом случае $\bar{k}=k$, $\bar{K}=K$, так что наше утверждение очевидно.

Для условий 1° и 3° утверждение доказывается одним и тем же рассуждением. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой дивизор k и $\bar{\mathfrak{p}}$ — его простой делитель в $\bar{k}$. Докажем, что $\mathfrak{p}$ тогда и только тогда полностью распадается (соответственно имеет порядок 1) в K, когда $\mathfrak{p}$ полностью распадается (соответственно имеет порядок 1) в $\bar{K}$. Кольцо $K_{\mathfrak{p}}$ является прямой суммой полей $K_{\mathfrak{P}}$, являющихся расширениями $k_{\mathfrak{p}}$ степени $n_{\mathfrak{p}}$ (порядка $r_{\mathfrak{p}}$), а $\bar{k}_{\mathfrak{p}}$ — суммой полей $k_{\bar{\mathfrak{p}}}$ степени $m_{\mathfrak{p}}$ (порядка $s_{\mathfrak{p}}$) над $k_{\mathfrak{p}}$. При этом $n_{\mathfrak{p}}(r_{\mathfrak{p}})$ есть степень l, а $m_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}})$ делит m, поэтому взаимно просто с l. Кольцо $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ является прямой суммой полей $K_{\mathfrak{P}}k_{\bar{\mathfrak{p}}}$, имеющих, ввиду того что $(n_{\mathfrak{p}}, m_{\mathfrak{p}})=1$, степень $n_{\mathfrak{p}}m_{\mathfrak{p}}$ (порядок $r_{\mathfrak{p}}s_{\mathfrak{p}}$) над $k_{\mathfrak{p}}$ и $n_{\mathfrak{p}}(r_{\mathfrak{p}})$ над $k_{\bar{\mathfrak{p}}}$. Таким образом, $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ есть сумма полей степени $n_{\mathfrak{p}}$ (порядка $r_{\mathfrak{p}}$) над $\bar{k}_{\mathfrak{p}}$. Для того чтобы $\mathfrak{p}$ полностью распадался (имел порядок 1) в K, необходимо и достаточно, чтобы $n_{\mathfrak{p}}(r_{\mathfrak{p}})$ равнялось 1. Для того же чтобы $\bar{\mathfrak{p}}$ полностью распадался (имел порядок 1) в $\bar{K}$, необходимо и достаточно, ввиду доказанного, чтобы также $n_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}})$ равнялось 1.

Нам остается доказать эквивалентность условия 4° для полей K/k и $\bar{K}/\bar{k}$. Если $\mathfrak{p}$ — делитель дискриминанта K/k в k, $\bar{\mathfrak{p}}$ — его простой делитель в $\bar{k}$, то $\mathfrak{N}(\bar{\mathfrak{p}})=\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^f$, где f — относительный порядок $\bar{\mathfrak{p}}$ в $\bar{k}/k$, взаимно простой с l. Отсюда очевидным образом следует наше утверждение.

Таким образом, если K/k шольцево, то в поле $\bar{K}/\bar{k}$ определены введенные в предшествующем параграфе инварианты (χ, X) и $(X)_h$.

Докажем также, что условие, согласно которому K пересекается по k с максимальным неразветвленным расширением $\mathfrak{K}$ поля k, имеющим абелеву группу показателя l, выполняется тогда и только тогда, когда оно выполняется для $\bar{K}/k$. Обозначим соответствующее расширение поля $\bar{k}$ через $\bar{\mathfrak{K}}$ и докажем, что

$$\bar{K} \cap \bar{\mathfrak{K}} = (K \cap \mathfrak{K})\bar{k}.$$

Очевидно, что правая часть содержится в левой и нужно только доказать, что и левая содержится в правой. Для этого заметим, что ввиду того что $\bar{K}=K\bar{k}$, $K \cap \bar{k}=k$, группа Галуа $\bar{K}/k$ есть прямое произведение группы Галуа K/k, имеющей порядок l^α, и группы Галуа $\bar{k}/k$ порядка m, взаимно простого с l. Отсюда следует, что $\bar{K} \cap \bar{\mathfrak{K}}$ есть композит $\bar{k}$ и подполя $\mathfrak{K}_1$ поля K, причем $\mathfrak{K}_1 \subset \bar{\mathfrak{K}}$. Ввиду того что степени $(\mathfrak{K}_1:k)$ и $(\bar{k}:k)$ взаимно просты, $\mathfrak{K}_1$ должно быть неразветвленным над k. Так

как, кроме того, группа Галуа $\mathfrak{K}_1 / k$ изоморфна группе Галуа $\mathfrak{K}_1\overline{k} / \overline{k} \subset \subset \overline{\mathfrak{K}} / \overline{k}$, то она абелева и показателя l. Следовательно, $\mathfrak{K}_1 \subseteq \mathfrak{K}$, что и доказывает интересующее нас утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы шольцево поле K / k можно было погрузить в шольцево поле с группой Галуа, являющейся простым центральным расширением группы Галуа K / k, соответствующим характеру X, необходимо и достаточно, чтобы инварианты (χ, X) для всех характеров χ и $(X)_h$ поля $\overline{K} / \overline{k}$ были равны* 1.

Доказательство в части необходимости прямо сводится к теореме 1. Предположим, что Ω / k является центральным простым шольцевым расширением K/k с нужной нам группой Галуа. Поле $\overline{\Omega} = \Omega(\zeta)$ является также шольцевым расширением поля $\overline{K} / \overline{k}$, причем с той же группой Галуа. Из теоремы 1 следует тогда, что все инварианты поля $\overline{K} / \overline{k}$ равны 1.

В части достаточности доказательство также сводится к соответствующему утверждению теоремы 1, но более сложным путем. Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Через t обозначим образующий автоморфизм поля $\overline{k} / k$, так что $t^m = 1$. Через g обозначим такое число, для которого

$$\zeta^{t} = \zeta^{g}, \quad g^m \not\equiv 1 \, (l^2).$$

Ввиду того что $\overline{k} \neq k$, мы имеем также

$$g \not\equiv 1 \, (l).$$

Через s обозначим $t^{m-1} + t^{m-2} g + \cdots + t g^{m-2} + g^{m-1}$. Используем следующие соотношения, имеющие место как для чисел, так и для дивизоров поля $\overline{k}$:

из того, что

$$\alpha^{s} \approx 1, \tag{18}$$

следует, что $\alpha \approx \beta^{t-g}$ при некотором β, и, наоборот, любое такое α удовлетворяет (18);

из того, что

$$\alpha^{t-g} \approx 1, \tag{19}$$

следует, что $\alpha \approx \beta^{s}$ при некотором β, и, наоборот, любое такое α удовлетворяет (19).

Все соображения, необходимые для доказательства (18) и (19), содержатся у Рейхардта ([8]).

Обозначим $1 - g^m$ через lx, где $(l, x) = 1$, и определим y из сравнения $xy \equiv 1 \, (l)$. То, что числа вида β^{t-g} удовлетворяют условию (18), а β^{s} — условию (19), получается непосредственной подстановкой, если воспользоваться тем, что

$$s(t-g) = t^m - g^m = 1 - g^m \equiv 0 \, (l).$$

Пусть $\alpha^{s} = \gamma^{l}$. Возводя обе части в степень $t - g$, получим

$$\alpha^{lx} = \gamma^{l(t-g)}, \text{ т. е. } \alpha^{x} = \zeta^{r}\gamma^{t-g}.$$

Возведем обе части этого равенства в степень y. Мы получим:

$$\alpha \approx \zeta^{ry}\gamma^{y(t-g)}.$$

Нам надо доказать, что множитель $\zeta^{ry} \approx 1$. Подставим для этого полученное выражение для α в (18). Так как $\zeta^t = \zeta^g$, то $\zeta^s = \zeta^{mg^{-1}}$. Таким образом,

$$1 \approx \alpha^s \approx \zeta^{rymg^{-1}}\gamma^{y(t-g)s} \approx \zeta^{rymg^{-1}},$$

а так как $mg^{-1} \not\equiv 0\ (l)$, то и $\zeta^{ry} \approx 1$.

Пусть $\alpha^{t-g} = \gamma^l$. Возводя обе части в степень s, получим, как и раньше,

$$\alpha^{lx} = \gamma^{ls}, \quad \alpha^x = \zeta^r\gamma^{t-g}, \quad \alpha \approx \zeta^{ry}\gamma^{y(t-g)}.$$

Ввиду того что $\zeta^s = \zeta^{mg^{-1}}$, мы имеем $\zeta^{ry} = \zeta^{rym^{-1}gs}$ и

$$\alpha \approx (\zeta^{rymg^{-1}}\gamma^y)^s.$$

Наконец, мы будем пользоваться также тем, что условие (19) является необходимым для того, чтобы поле $\bar{k}(\sqrt[l]{\alpha})$ было композитом поля $\bar{k}$ и циклического поля степени l над k. Доказательство получается непосредственной проверкой.

Переходя к доказательству, мы построим прежде всего, пользуясь теоремой 1, поле $\bar{K}(\sqrt[l]{\bar{\mu}})$, являющееся шольцевым расширением $\bar{K}/\bar{k}$ с нужной нам группой Галуа. Далее, мы воспользуемся результатом, полученным Рейхардтом ([8]). Он показал, что в $\bar{k}$ существует такое число $\bar{m}$, что l-инвариантное число $\mu_0 = \bar{\mu}\bar{m}$ удовлетворяет соотношению

$$\mu_0^{t-g} \approx 1, \tag{20}$$

а поле $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu_0})$ есть прямой композит $\bar{k}$ и некоторого поля Ω, нормального над k и имеющего над ним ту же группу Галуа, что и $\bar{K}(\sqrt[l]{\bar{\mu}})/\bar{k}$. Наша задача была бы решена, если бы мы могли показать, что Ω является шольцевым расширением k. Это эквивалентно тому, что $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu_0})$ является шольцевым расширением $\bar{k}$. Не нарушая свойства (20) числа μ_0, а также описанных выше свойств поля $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu_0})$, мы можем заменить μ_0 числом вида $\mu_0 a^s$, где a — любое число из $\bar{k}$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что таким путем мы сможем получить шольцево поле $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu_0 a^s})/\bar{k}$.

Начнем с условия 1°, определяющего шольцево поле. Пусть $\mathfrak{l}$ — любой простой делитель l в k. Так как поле $\bar{K}(\sqrt[l]{\bar{\mu}})$ шольцево, то

$$\bar{\mu} \approx 1 \text{ в } \bar{K}_{\mathfrak{l}}.$$

Для числа $\mu_0 = \overline{\mu}\overline{m}$ мы получаем отсюда

$$\mu_0 \approx \overline{m} \text{ в } \overline{K}_{\mathfrak{l}},$$

а ввиду (20),

$$\overline{m}^{l-g} \approx 1 \text{ в } \overline{K}_{\mathfrak{l}}.$$

Кольцо $K_{\mathfrak{l}}$ разлагается, так же как и в доказательстве леммы 2, в прямую сумму колец:

$$\overline{K}_{\mathfrak{l}} = \sum \overline{k}_{\mathfrak{l}}^{\sigma},$$

где σ пробегает все автоморфизмы K / k. Все компоненты числа $\overline{m}^{l-g}$ в этом разложении равны ему самому. Таким образом,

$$\overline{m}^{l-g} \approx 1 \text{ в } \overline{k}_{\mathfrak{l}}, \text{ т. е. } \overline{m} \approx b_1^s \text{ в } \overline{k}_{\mathfrak{l}}.$$

Выбирая такое число a_1 из $\overline{k}$, что $a_1 b_1 \approx 1$ в $\overline{k}_{\mathfrak{l}}$, мы получаем l-гиперпримарное число $\mu_0 a_1^s$. Положим

$$\mu_0 a_1^s = \mu_1 = \overline{\mu}\,\overline{m}_1. \tag{21}$$

Условие 2° в нашем случае всегда выполнено, так как $l \neq 2$. Прежде чем перейти к рассмотрению условия 3°, сделаем следующие замечания. Из разложения

$$(\mu_1) = \overline{\mathfrak{C}}^l \overline{\mathfrak{D}}\, \overline{\mathfrak{m}}_1$$

и из (20) и (21) следует, что

$$\overline{\mathfrak{m}}_1^{l-g} \approx 1, \text{ т. е. } \overline{\mathfrak{m}}_1 \approx \overline{\mathfrak{n}}_1^s, \quad \overline{\mathfrak{n}}_1 \in \overline{k}.$$

Пусть $\overline{\mathfrak{p}}$ — простой критический дивизор в $\overline{K} / \overline{k}$, взаимно простой с $\mathfrak{D}(X)$. Из того, что $\overline{K}$, по построению, нормально над k, следует, что $\overline{\mathfrak{p}}^t$ будет критическим в $\overline{K} / \overline{k}$ и взаимно простым с $\mathfrak{D}(X)$. Из (20), (21) и из того, что $\overline{K}(\sqrt[l]{\overline{\overline{\mu}}})$ шольцево, следует, что

$$\left(\frac{\overline{m}_1}{\mathfrak{p}^t}\right)_{\overline{k}} = \left(\frac{\overline{m}_1}{\overline{\mathfrak{P}}^t}\right)_{\overline{K}} = \left(\frac{\overline{\mu}}{\overline{\mathfrak{P}}^t}\right) = \left(\frac{\mu_1^{t-1}}{\overline{\mathfrak{P}}}\right)^g = \left(\frac{\mu_1}{\overline{\mathfrak{P}}}\right) = \left(\frac{\overline{m}_1}{\overline{\mathfrak{p}}}\right), \tag{22}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}$ — простой делитель $\overline{\mathfrak{p}}$ в $\overline{K}$. Ввиду (22), мы будем обозначать $\left(\frac{\overline{m}_1}{\overline{\mathfrak{p}}_1}\right)$ через $\zeta(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p} = N_{\overline{K}/k}(\overline{\mathfrak{p}})$.

Из того, что $\overline{K}$ нормально над k, следует, что

$$\overline{\alpha}_{\chi}^{l-g} \approx 1, \tag{23}$$

где χ — любой характер порядка l группы Галуа $\overline{K}\,/\,k$. (Определение числа $\bar{\alpha}_\chi$ см. в § 1, п. 4). Отсюда, аналогично выводу (22), следует, что для любого простого дивизора $\bar{\mathfrak{q}} \in \bar{k}$

$$\left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{q}}^l}\right) = \left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{q}}}\right).$$

Кроме того, из (23) следует, что

$$(\bar{\alpha}_\chi) \approx \mathfrak{A}_\chi^s. \qquad (24)$$

Заметим, наконец, что если $\bar{a}$ — любое число из k, то

$$\left(\frac{\bar{a}^s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = \prod_{\tau=0}^{m-1}\left(\frac{\bar{a}^{t^\tau g^{m-1-\tau}}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = \prod_{\tau=0}^{m-1}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{\mathfrak{p}}^{t^{-\tau}}}\right)^{g^{m-1}} = \left(\frac{\bar{a}}{N_{\bar{k}/k}(\mathfrak{p})}\right)^{g^{m-1}} = \left(\frac{\bar{a}}{\mathfrak{p}}\right)^{g^{-1}}. \qquad (25)$$

Теперь мы можем перейти к рассмотрению условия 3°, определяющего шольцево поле. Определим числа $\bar{c}_1$ и $\bar{c}_2$ из $\bar{k}$ так, чтобы имели место соотношения:

$$\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{\alpha}_\chi}\right) = \left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{n}}_1}\right), \qquad \left(\frac{\bar{c}_2}{\mathfrak{p}_i}\right)^{g^{-1}} = \zeta(\mathfrak{p}_i)^{-1}, \qquad (26)$$

где χ пробегает все характеры порядка l группы Галуа $\overline{K}\,/\,\overline{k}$, для которых $\bar{\alpha}_\chi$ l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(X)$, а $\bar{\mathfrak{p}}_i$ — все критические простые дивизоры $\overline{K}\,/\,\overline{k}$, взаимно простые с $\mathfrak{D}(X)$.

Существование числа $\bar{c}_2$ очевидно, так как это число должно лишь удовлетворять некоторым сравнениям по взаимно простым модулям $\mathfrak{p}_i$, не являющимся l-ми степенями.

Для того чтобы доказать существование числа $\bar{c}_1$, удовлетворяющего условиям (26), заметим, что эти условия мультипликативны относительно $\bar{\alpha}_\chi$. Выберем из чисел $\bar{\alpha}_\chi$ такие $\bar{\alpha}_{\chi_1}, \ldots, \bar{\alpha}_{\chi_d}$, которые мультипликативно независимы по модулю l-х степеней, и всякое $\bar{\alpha}_\chi$ l-равно их произведению. Нам достаточно найти $\bar{c}_1$, при котором (26) выполнялось бы для $\bar{\alpha}_{\chi_1}, \ldots, \bar{\alpha}_{\chi_d}$. Заметим, что и дивизоры $(\bar{\alpha}_{\chi_1}) \ldots, (\bar{\alpha}_{\chi_d})$ мультипликативно независимы по модулю l-х степеней в группе дивизоров. Действительно, если бы некоторое их произведение было l-й степенью, то это значило бы, что некоторое $\bar{\alpha}_\chi$ сингулярно и гиперпримарно, т. е. $\overline{K}$ пересекается с неразветвленным полем $\bar{\mathfrak{K}}$ по крайней мере по $\bar{k}\left(\sqrt[l]{\bar{\alpha}_\chi}\right)$ в противоречии со сделанным предположением. Таким образом, дивизоры $(\bar{\alpha}_{\chi_1}), \ldots, (\bar{\alpha}_{\chi_d})$ мультипликативно независимы по модулю l-х степеней, и мы можем найти число $\bar{c}_1$, имеющее по ним наперед заданные значения символа Лежандра.

Ввиду (24), число $\bar{c}_1$ определяется значениями символов $\left(\frac{\bar{c}_1}{\bar{\mathfrak{p}}_i^s}\right)$. Так как

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i^{1+l+\ldots+l^{m-1}},$$

то все дивизоры $\mathfrak{p}_i$ и $\bar{\mathfrak{p}}_i^s$ мультипликативно независимы по модулю l-х степеней. Кроме того, все они взаимно просты с l. Поэтому существует l-гиперпримарное число $\bar{c}_0$, для которого выполнены соотношения, аналогичные (26):

$$\left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{\alpha}_\chi}\right) = \left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{n}}_1}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{\bar{c}_0}{\mathfrak{p}_i}\right)^{g^{-1}} = \zeta(\mathfrak{p}_i)^{-1}. \tag{27}$$

Обозначим через $\mathfrak{F}$ произведение всех $\mathfrak{p}_i$ и модуля l-гиперпримарности, через $\bar{S}_{\mathfrak{F}}$ — группу l-х степеней классов дивизоров mod $\mathfrak{F}$, а через L — поле классов к группе $\bar{S}_{\mathfrak{F}}$ над $\bar{k}$. Пусть автоморфизм Артина дивизора $\bar{\mathfrak{n}}\bar{c}_0$ в $\bar{L}$ будет σ_1. Поле $\bar{K} \cap \bar{L}$ получается из $\bar{k}$ присоединением $\sqrt[l]{\bar{\alpha}_\chi}$ для всех $\bar{\alpha}_\chi$, l-взаимно простых с $\mathfrak{D}(X)$. Ввиду (27),

$$\left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{n}}_1\bar{c}_0}\right) = \left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{n}}_1}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{c}_0}\right) = \left(\frac{\bar{\alpha}_\chi}{\bar{\mathfrak{n}}_1}\right)\left(\frac{\bar{c}_0}{\bar{\alpha}_\chi}\right) = 1,$$

так что σ_1 индуцирует в $\bar{K} \cap \bar{L}$ единичный автоморфизм. Из этого следует, что в $\bar{K}\bar{L}$ существует автоморфизм σ, индуцирующий в $\bar{K}$ единичный автоморфизм, а в L — автоморфизм σ_1. Согласно закону плотностей Чеботарева, в $\bar{k}$ существует простой дивизор $\bar{\mathfrak{q}}_1$, принадлежащий к σ в $\bar{K}\,\bar{L}$. Так как $\bar{\mathfrak{q}}$ принадлежит в $\bar{L}$ к тому же автоморфизму, что и $\bar{\mathfrak{n}}_1\bar{c}_0$, то $\bar{\mathfrak{q}}_1$ лежит в том же классе по $\bar{S}_{\mathfrak{F}}$, что и $\bar{\mathfrak{n}}_1\bar{c}_0$, т. е. $\bar{\mathfrak{q}}_1 = \bar{\mathfrak{n}}_1\,\bar{c}_0(\bar{c})\mathfrak{i}^l$, где $\bar{c}$ l-гиперпримарно и сравнимо с 1 по модулю всех $\mathfrak{p}_i$. Докажем, что для числа $\mu_2 = \mu_1(\bar{c}\,\bar{c}_0)$ выполнены условия 1°, 2° и 3°.

Условие 1° не нарушилось, так как $\bar{c}_0\bar{c}$, по построению, гиперпримарно. Условие 2° в нашем случае всегда выполнено автоматически. В связи с условием 3° заметим, что

$$(\mu_2) = \mathfrak{C}_2^l\,\bar{\mathfrak{D}}\bar{\mathfrak{q}}_1^s.$$

Дивизор $\bar{\mathfrak{q}}_1$ имеет в $\bar{K}$ порядок 1, так как он принадлежит, по построению, к единичному автоморфизму в $\bar{K}$. Наконец, дивизоры $\mathfrak{p}_i$, взаимно простые с $\mathfrak{D}(X)$, имеют порядок 1 в $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu_2})$, так как, ввиду (21), (25) и (27),

$$\left(\frac{\mu_2}{\mathfrak{P}_i}\right) = \left(\frac{\mu_1}{\mathfrak{P}_i}\right)\left(\frac{(\bar{c}_0\,\bar{c})}{\mathfrak{P}_i}\right) = \left(\frac{\bar{m}_1}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right)\left(\frac{\bar{c}_0^s}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right)\left(\frac{\bar{c}^s}{\bar{\mathfrak{p}}_i}\right) = 1,$$

а те критические дивизоры $\overline{k}$, которые входят в $\overline{\mathfrak{D}}$, приобретают в $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu_2})$ в l раз больший показатель ветвления и поэтому остаются первого порядка.

Нам осталось еще рассмотреть свойство 4°. Найдем для этого в $\overline{K}$ такое число ξ, что

$$\mathfrak{N}(\xi)^{1-g}\,\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}_1) \equiv 1\ (l^h).$$

Ввиду того что $g \not\equiv 1\,(l)$, а $\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}_1) \equiv 1\,(l)$, так как $\overline{k}$ содержит корень степени l из единицы, такой выбор возможен.

Обозначим через H группу классов дивизоров $\overline{k}$ по модулю, являющемуся общим наименьшим кратным l^h и модуля гиперпримарности, а через $\overline{\mathfrak{K}}_1$ — принадлежащее к ней абелево поле. $\overline{\mathfrak{K}}_1$ имеет в качестве критических простых дивизоров только делители l, а его максимальное неразветвленное подполе, имеющее группу показателя l, совпадает с $\overline{\mathfrak{K}}$.

Так как $\overline{K}$ шольцево, то его критические простые дивизоры отличны от делителей l и поэтому $\overline{K} \cap \overline{\mathfrak{K}}_1$ не разветвлено над $\overline{k}$. Но, по условию, $\overline{\mathfrak{K}} \cap \overline{K} = \overline{k}$, так что $\overline{K} \cap \overline{\mathfrak{K}}_1 = \overline{k}$.

Ввиду этого и на основании закона плотностей Чеботарева, мы можем найти в $\overline{k}$ такое число $\overline{\varkappa}$, что $\overline{\mathfrak{q}}_1(\overline{\varkappa}) = \overline{\mathfrak{q}}$, где $\overline{\mathfrak{q}}$ — простой дивизор, принадлежащий в $\overline{K}$ к единичному автоморфизму, $\overline{\varkappa}^{-1}\,\xi^{l-g} \in H$ и $\overline{\varkappa} \equiv 1\,(\overline{\mathfrak{p}}_i)$ для всех $\overline{\mathfrak{p}}_i$.

Поле $\overline{K}\,(\sqrt[l]{\mu_2\overline{\varkappa}^s})$ не потеряет свойств 1°, 2° и 3°. Для свойств 2° и 3° это очевидно, а для свойства 1° следует из того, что

$$\overline{\varkappa}_2^s H = \xi^{(l-g)s} H = \xi^{lx} H,$$

т. е. $\overline{\varkappa}_2^s$ l-гиперпримарно. Но поле $\overline{K}\,(\sqrt[l]{\mu_2\overline{\varkappa}^s})$ будет обладать также и свойством 4°.

Действительно, единственным простым делителем дискриминанта, для которого нам нужно проверить свойство 4°, является $\overline{\mathfrak{q}}$. Для него мы имеем:

$$\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}) = \mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}_1)\,\mathfrak{N}(\overline{\varkappa}) \equiv \mathfrak{N}(\xi^{l-g})\,\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}_1) \equiv \mathfrak{N}(\xi)^{1-g}\,\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{q}}_1) \equiv 1\ (l^h),$$

так как $\varkappa \equiv \xi^{l-g}\,(l^h)$. Теорема 2 доказана.

3. Пример. В заключение приведем пример, показывающий, что построенные нами инварианты не всегда равны 1, причем мы ограничимся только инвариантами $(\chi,\ X)$.

Пусть K_1/k — некоторое шольцево поле и μ — его l-инвариантное число, не лежащее в единичном классе X. Так как дивизор $\mathfrak{m}$ из разложения (3) взаимно прост с дискриминантом K_1/k, то поле классов к группе, состоящей из l-х степеней классов $\operatorname{mod}\mathfrak{m}$, не пересекается с K_1/k. Ввиду этого мы можем найти, на основании закона плотностей Чеботарева, простое l-гиперпримарное (при $l = 2$ тотально-положительное) число $\pi \in k$, полностью распадающееся в K_1/k, но инертное в $K_1(\sqrt[l]{\mu})$, для которого $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{m}}\right) = 1$.

Если мы обозначим $K_1(\sqrt[l]{\pi})$ через K (см. рис. 2), класс l-инвариантных чисел, в котором лежит μ, — через X, и характер, для которого $\pi = \alpha_\chi$, — через χ, то

$$(\chi, X) = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right)_{K_1}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1} \neq 1, \quad \pi = N_{K_1/k}(\mathfrak{P}).$$

Эти рассуждения при $l = 2$ годятся и для случая, когда k есть поле рациональных чисел R. Простейший конкретный пример этого рода таков.

Пусть $K = R(\sqrt{17}, \sqrt{281})$. K — шольцево, так как

$$17 > 0, \quad 281 > 0, \quad 17 \equiv 281 \equiv 1\,(8) \quad \left(\frac{281}{17}\right) = 1, \quad \left(\frac{17}{281}\right) = 1.$$

Пусть χ — характер группы Галуа K, для которого $\alpha_\chi = 281$, и X — класс, соответствующий погружению $R(\sqrt{17})$ в циклическое поле 4-й степени. Мы докажем, что $(\chi, X) = -1$.

За представитель μ класса X мы можем взять

$$\mu = 17 + 4\sqrt{17} = \sqrt{17}(4 + \sqrt{17}),$$

так как

$$\mu^\sigma = \mu(4 + \sqrt{17})^2.$$

При этом $\mathfrak{m} = 1$, $\mathfrak{D} = \sqrt{17}$, так как $4 + \sqrt{17}$ является единицей в $R(\sqrt{17})$.

В поле $R(\sqrt{17})$

$$281 = N(37 - 8\sqrt{17}).$$

Очевидно, что

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right) = \left(\frac{281}{1}\right) = 1.$$

Найдем $\left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right]$. Так как

$$\alpha_\chi = 281 = N(37 - 8\sqrt{17}),$$

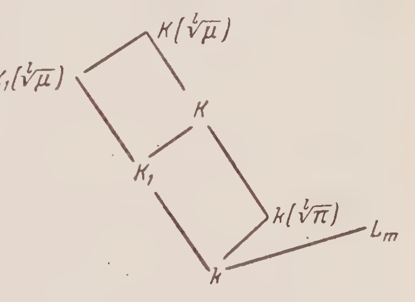


Рис. 2

то

$$\left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right] = \left(\frac{\sqrt{17}(4 + \sqrt{17})}{37 - 8\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{37 - 8\sqrt{17}}{\sqrt{17}(4 + \sqrt{17})}\right),$$

последнее — по закону взаимности. Так как $4 + \sqrt{17}$ является единицей, то

$$\left(\frac{37 - 8\sqrt{17}}{\sqrt{17}(4 + \sqrt{17})}\right) = \left(\frac{37 - 8\sqrt{17}}{\sqrt{17}}\right) = \left(\frac{37}{17}\right)_R = -1.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right) = 1, \quad \left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right] = -1, \quad (\chi, X) = \left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right]\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1} = -1.$$

Хотя инварианты (χ, X) и не равны, вообще говоря, 1, но их значения не могут быть совершенно произвольными. Например, если χ — любой

характер группы Галуа шольцева поля $K = k(\sqrt[l]{\alpha}, \sqrt[l]{\beta})$, а X соответствует погружению K в поле с неабелевой группой порядка l^3 и показателя l, то $(\chi, X) = 1$.

В статье Таннака ([10]), о которой шла речь во введении, утверждается, что если $k \ni \zeta$ и поле K, по нашей терминологии,— шольцево, то его можно погрузить в шольцево поле с наперед заданной группой Галуа, являющейся центральным расширением группы Галуа K/k.

По теореме 1, это возможно только тогда, когда все инварианты (χ, X) и $(X)_h$ равны 1. Построенный пример показывает, что это не всегда так.

Ошибка же в рассуждении Таннака заключается в том, что он сначала умножает l-инвариантное число μ на m так, чтобы все $\mathfrak{p}_i$, критические в K/k, имели первый порядок в $K(\sqrt[l]{\mu})$, а потом на такое m', чтобы все делители $\mu m m'$ имели в K первый порядок, и не замечает, что при втором умножении теряется то, чего удалось добиться при первом.

§ 3. Существование расширений с заданной группой Галуа порядка l^α

1. Канонические гомоморфизмы. Рассмотрим ряд нормальных делителей N_c свободной группы S с d образующими, определяемый индуктивно следующим образом: $N_0 = S$, N_{c+1} есть подгруппа N_c, порожденная коммутаторами элементов N_c с элементами S и l-ми степенями элементов N_c. Факторгруппу S/N_c мы будем обозначать через $\mathfrak{S}_d^{(c)}$ или, если это не будет вызывать недоразумений, просто через $\mathfrak{S}_d$. Во всех дальнейших рассуждениях будет играть роль некоторая фиксированная минимальная система образующих $s_1, \ldots, s_d$ группы $\mathfrak{S}_d$.

Пусть даны группы $\mathfrak{S}_d$ и $\mathfrak{S}_\delta$ с фиксированными в них минимальными системами образующих $s_1, \ldots, s_d$ и $t_1, \ldots, t_\delta$. Мы будем предполагать дальше, что $\delta \leqslant d$. Гомоморфизм $\mathfrak{S}_d$ на $\mathfrak{S}_\delta$ называется каноническим, если при нем $s_1, \ldots, s_d$ переходят только в $t_1, \ldots, t_\delta$ и единицу группы $\mathfrak{S}_\delta$. Очевидно, что канонический гомоморфизм однозначно определяется отображением множества $s_1, \ldots, s_d$ на множество $t_1, \ldots, t_\delta$, 1 и всякое такое отображение определяет некоторый канонический гомоморфизм. Канонические гомоморфизмы мы будем обозначать через S, T и т. д. и иногда называть просто гомоморфизмами.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие канонические гомоморфизмы S, при которых в $t_1, \ldots, t_{\delta-1}$ переходят $s_1, \ldots, s_{\delta-1}$, и только они. Образующие $s_\delta, \ldots, s_d$ мы будем называть свободными. Такой гомоморфизм S однозначно определяется множеством тех свободных образующих, которые переходят в t_δ. Это множество мы будем обозначать через $[S]$. Число элементов $[S]$ будем обозначать через $|S|$. Гомоморфизмы указанного вида мы будем называть гомоморфизмами типа $(s_1, \ldots, s_{\delta-1}; t_1, \ldots, t_{\delta-1} | t_\delta)$.

Два гомоморфизма S и T мы будем называть независимыми, если множества $[S]$ и $[T]$ не пересекаются. Тогда существует один единственный гомоморфизм R, для которого

$$[R] = [S] \cup [T].$$

R мы будем называть композитом S и T и обозначать через $S * T$. Операция компонирования гомоморфизмов коммутативна и ассоциативна и применима к любому множеству попарно независимых гомоморфизмов. Очевидно, что при этом $|S_1 * \cdots * S_m| = |S_1| + \cdots + |S_m|$.

2. Функции гомоморфизмов. В дальнейшем будут рассматриваться и называться коротко функциями гомоморфизмов функции $f(S)$, определенные на множестве всех гомоморфизмов и принимающие значения, являющиеся элементами некоторой абелевой группы порядка g.

Для функций гомоморфизмов одного и того же типа $(s_1, \ldots, s_{\delta-1}; t_1, \ldots, t_{\delta-1} | t_\delta)$ определяется степень относительно образующей t_δ. Рассмотрим функцию

$$\varphi(S, T) = f(S) f(T) f(S * T)^{-1}, \tag{28}$$

определенную для любой пары независимых гомоморфизмов S и T и симметричную относительно S и T. Степень 0 припишем функции, которая для всех S принимает значение 1. Мы будем говорить, что $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$, если $\varphi(S, T)$ для любого S имеет, как функция от T, степень $\leqslant n - 1$. Заметим, что не утверждается, что всякая функция имеет некоторую степень. Например, функция, принимающая для всех S одно и то же, отличное от 1, значение, очевидно не имеет никакой степени.

Определение степени функции можно сформулировать другим эквивалентным образом. Функция $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$, если для любого множества из $n + 1$ попарно независимых гомоморфизмов $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{n+1}}$ удовлетворяется следующее соотношение:

$$\prod_{(j_1 \cdots j_k)} f(S_{j_1} * \cdots * S_{j_k})^{(-1)^k} = 1, \tag{29}$$

где $(j_1, \ldots, j_k)$ пробегает все непустые подмножества множества $(i_1, \ldots, i_{n+1})$.

Докажем эквивалентность обоих определений. Доказательство будем вести по индукции. Покажем предварительно, что для любых попарно независимых $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{n+1}}$ имеет место тождество

$$\prod_{(r_1, \ldots, r_k)} \varphi(S_{i_1}, S_{r_1} * \cdots * S_{r_k})^{(-1)^k} = \prod_{(j_1, \ldots, j_k)} f(S_{j_1} * \cdots * S_{j_k})^{(-1)^k}, \tag{30}$$

где слева $(r_1, \ldots, r_k)$ пробегает все непустые подмножества множества $(i_2, \ldots, i_{n+1})$, а справа $(j_1, \ldots, j_k)$ — непустые подмножества $(i_1, \ldots, i_{n+1})$. Для этого в левой части равенства (30) выразим φ через f согласно (28). Мы получим:

$$\prod_{(r_1, \ldots, r_k)} f(S_{i_1})^{(-1)^k} \prod_{(r_1, \ldots, r_k)} f(S_{r_1} * \cdots * S_{r_k})^{(-1)^k} \cdot$$
$$\cdot \prod_{(r_1, \ldots, r_k)} f(S_{i_1} * S_{r_1} * \cdots * S_{r_k})^{(-1)^{k+1}}. \tag{31}$$

Сравним отдельные множители в (31) и в правой части (30). Первое произведение есть $f(S_{i_1})$, возведенное в степень, равную

$$\sum_{(r_1, \ldots, r_k)} (-1)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k = -1,$$

т. е. совпадает с множителем $f(S_{i_1})^{-1}$ в правой части (30). Каждый множитель второго и третьего произведений очевидным образом совпадает с определенным множителем в правой части (30). Таким образом, тождество (30) доказано.

Если мы предположим, что $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$ согласно первому определению, то по индуктивному предположению это значит, что левая часть (30) обращается в 1. Тогда и правая часть равна 1, а это и значит, что $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$ согласно второму определению. Если же $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$ согласно второму определению, то правая, а следовательно, и левая часть (30), равна 1. Но, согласно индуктивному предположению, это значит, что $\varphi(S_{i_1}, T)$ имеет при любом S_{i_1} степень $\leqslant n-1$ относительно T, т. е. что $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$ согласно первому определению.

3. Теорема существования. Докажем теорему, гарантирующую в некоторых случаях существование решений у уравнений $f_i(S)=1$, где $f_i(S)$ — имеющие определенную степень функции гомоморфизма. При этом мы будем рассматривать канонические гомоморфизмы группы $\mathfrak{S}_d$ с меняющимся числом образующих d на раз навсегда фиксированную группу $\mathfrak{S}_\delta$, причем все гомоморфизмы будут одного и того же типа.

ТЕОРЕМА 3. *Для любых натуральных чисел k и n существует зависящее только от них натуральное число $C(k, n)$ со следующим свойством: какие бы k функций гомоморфизмов $f_1(S), \ldots, f_k(S)$ степени $\leqslant n$ ни были заданы на группе $\mathfrak{S}_d$ с $d \geqslant C(k, n)$, всегда найдется такой гомоморфизм S этой группы, что $f_i(S)=1$, $i=1, \ldots, k$.*

Доказательство ведется индукцией по степени n функций $f_1, \ldots, f_k$. Выберем некоторый гомоморфизм T_1, для которого $|T_1|=1$, и рассмотрим функции

$$\varphi_i(T_1, T) = f_i(T_1) f_i(T) f_i(T_1 * T)^{-1}, \qquad i=1, \ldots, k,$$

как функции от T. Они определены только для гомоморфизмов T, не зависимых от T_1, или, можно считать, для гомоморфизмов группы $d-1$ образующих, которая получится, если в группе $\mathfrak{S}_d$ перевести в 1 образующую $[T_1]$.

Предположим, что $d \geqslant C(k, n-1)+1$, и выделим из числа свободных образующих группы $\mathfrak{S}_d$ подмножество M_1 из $C(k, n-1)$ образующих, не содержащее $[T_1]$. Рассмотрим функции $\varphi_i(T_1, T)$ только на множестве тех гомоморфизмов T, для которых $[T] \subset M_1$, или, что то же самое, на группе с $\delta + C(k, n-1)$ образующими. Мы можем применить к ним индуктивное предположение и получим, что существует такой гомоморфизм T_2 с $[T_2] \subset M_1$, что

$$\varphi_i(T_1, T_2) = 1,$$

т. е.

$$f_i(T_1 * T_2) = f_i(T_1) f_i(T_2), \quad i=1, \ldots, k.$$

Рассмотрим теперь $3k$ функций:

$$\varphi_i(T_1, T), \quad \varphi_i(T_2, T), \quad \varphi_i(T_1 * T_2, T), \quad i=1, \ldots, k. \tag{32}$$

Эти функции определены на гомоморфизмах T, не зависимых от T_1 и T_2, или можно считать, на группе с $d-1-C(k, n-1)$ образующими,

которая получится, если перевести в 1 все образующие группы $\mathfrak{G}_d$, входящие в $[T_1] \cup M_1$. Предположим, что

$$d \geqslant 1 + C(k, n-1) + C(3k, n-1),$$

и выделим из числа свободных образующих группы $\mathfrak{G}_d$ подмножество M_2, не пересекающееся с $[T] \cup M_1$ и состоящее из $C(3k, n-1)$ образующих. Рассмотрим функции (32) только на множестве тех гомоморфизмов T, для которых $[T] \subset M_2$, т. е. на группе с $C(3k, n-1)$ образующими. Мы можем применить к ним индуктивное предположение и получим, что существует такой гомоморфизм T_3 с $[T_3] \subset M_2$, что

$$\varphi_i(T_1, T_3) = 1,$$
$$\varphi_i(T_2, T_3) = 1,$$
$$\varphi_i(T_1 * T_2, T_3) = 1,$$

т. е.

$$f_i(T_1 * T_3) = f_i(T_1) f_i(T_3),$$
$$f_i(T_2 * T_3) = f_i(T_2) f_i(T_3),$$
$$f_i(T_1 * T_2 * T_3) = f_i(T_1) f_i(T_2) f_i(T_3)$$
$$(i = 1, \ldots k).$$

Продолжая этот процесс на r шагов, мы получим, как легко видеть, что если

$$d \geqslant 1 + C(k, n-1) + C(3k, n-1) + \cdots + C\left((2^{r-1}-1)k, n-1\right),$$

то существуют попарно независимые гомоморфизмы $T_1, \ldots, T_r$, для которых имеют место соотношения:

$$f_i(T_{j_1} * \ldots * T_{j_s}) = f_i(T_{j_1}) \ldots f_i(T_{j_s}) \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{33}$$

если $(j_1, \ldots, j_s)$ — любое подмножество $(1, \ldots, r)$. Мы положим $r = g^{k+1}$ и, соответственно,

$$C(k, n) = 1 + C(k, n-1) + C(3k, n-1) + \cdots + C\left((2^{g^{k+1}-1}-1)k, n-1\right).$$

Поскольку, согласно предположению теоремы, $d \geqslant C(k, n)$, гомоморфизмы $T_1, \ldots, T_r$ с указанным свойством существуют. Так как мы имеем k функций $f_i(S)$, каждая из которых может принимать g значений, а число гомоморфизмов T в нашем множестве равно g^{k+1}, то существует система гомоморфизмов $T_{j_1}, \ldots, T_{j_g}$, для которой выполнены соотношения

$$f_i(T_{j_1}) = f_i(T_{j_2}) = \ldots = f_i(T_{j_g}) \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{34}$$

Положим

$$T_{j_1} * T_{j_2} * \ldots * T_{j_g} = S.$$

Ввиду (33) и (34), имеем:

$$f_i(S) = f_i(T_{j_1}) f_i(T_{j_2}) \ldots f_j(T_{i_g}) = f_i(T_{j_1})^g = 1,$$

так как значения функций f_i принадлежат группе порядка g. Таким образом, гомоморфизм S удовлетворяет всем требованиям теоремы.

Заметим, что если группа $\mathfrak{G}_{d_1}^{(c)}$ с $d_1 \leqslant d$ является гомоморфным образом группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ при некотором каноническом гомоморфизме, то любая функция гомоморфизма на $\mathfrak{G}_{d_1}^{(c)}$ является также функцией гомоморфизма

на $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, так как любой канонический гомоморфизм $\mathfrak{G}_{d_1}^{(c)}$ является в то же время каноническим гомоморфизмом $\mathfrak{G}_d^{(c)}$.

Следствие. *Если при предположениях теоремы* 3 *в группе* $\mathfrak{G}_d$ *указаны* m *свободных образующих* $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ *и* $d \geqslant C(k, n) + m$, *то группу* $\mathfrak{G}_d$ *можно отобразить при помощи канонического гомоморфизма на группу* $\mathfrak{G}_{\delta+m}$ *с образующими* $s'_1, \ldots, s'_{\delta+m}$, *у которой все функции* $f_1, \ldots, f_k$ *обращаются в единицу на гомоморфизме* $s'_1 \to t_1, \ldots, s'_\delta \to t_\delta$, $s'_{\delta+1} \to 1, \ldots, s'_{\delta+m} \to 1$.

Доказательство. Отобразим группу $\mathfrak{G}_d$ на $\mathfrak{G}_{d-m}$, положив

$$s_{i_1} \to 1, \ldots, s_{i_m} \to 1.$$

К полученной группе $\mathfrak{G}_{d-m}$ можно применить теорему 3 и найти канонический гомоморфизм S, для которого

$$f_1(S) = 1, \ldots, f_k(S) = 1.$$

S будет также каноническим гомоморфизмом $\mathfrak{G}_d$. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\mathfrak{G}_d$ на группу $\mathfrak{G}_{\delta+m}$ с образующими $s'_1, \ldots, s'_\delta, s'_{\delta+1}, \ldots$ $\ldots, s'_{\delta+m}$, который для всех образующих, кроме $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$, определен так же, как S, а $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}$ отображает на $s'_{\delta+1}, \ldots, s'_{\delta+m}$. Очевидно, $\mathfrak{G}_{\delta+m}$ будет обладать указанными в формулировке следствия свойствами.

4. Инварианты (χ, X) и $(X)_h$ полей с группой $\mathfrak{G}_d^{(c)}$. Предположим, что мы имеем шольцево поле K/k, группа Галуа которого есть группа $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ с выделенной в ней системой образующих $s_1, \ldots, s_d$. Изучим инварианты (χ, X) и $(X)_h$ в этом случае. Прежде всего рассмотрим базис группы характеров порядка l $\chi_1, \ldots, \chi_d$, взаимный к системе образующих $s_1, \ldots, s_d$, т. е. удовлетворяющий соотношениям

$$\chi_i(s_j) = 1, \quad i \neq j,$$
$$\chi_i(s_i) \neq 1.$$

Числа α_{χ_i} будем сокращенно обозначать через α_i. В дальнейшем будем предполагать, что числа α_i попарно l-взаимно просты.

Заметим, что если представить $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ в виде факторгруппы N/S свободной группы с d образующими, как мы это делали в § 1, то N будет совпадать с N_c, а N' из леммы 1 — с N_{c+1}. Очевидно, что N/N' есть не что иное, как ядро гомоморфизма $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$ на $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, а это есть центр группы $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$.

Таким образом, для исследования характеров X нам нужно знать центр Z группы $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$. Он был исследован в работе А. И. Скопина ([3]), который показал, что Z разлагается в прямую сумму подгрупп

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{c+1}, \tag{35}$$

где Z_ν изоморфно модулю многочленов Ли степени ν от d неизвестных $x_1, \ldots, x_d$ над полем вычетов по модулю l. При этом неизвестные x_i связаны с образующими s_i соотношениями $s_i = 1 + x_i$. Из этого следует, что гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$, при котором некоторое s_i переходит в 1, индуцирует в модуле многочленов Ли гомоморфизм, при котором соответствующее x_i переходит в 0.

Из конструкции А. И. Скопина следует также, что образующие x_i модуля Z_1 при изоморфном отображении Z_1 на центр $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$ отображаются на $s_i^{l^{c+1}}$. Отсюда вытекает, что при расширении группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$,

соответствующем характеру X группы Z, аннулирующему подгруппу Z_1, ни один из элементов вида $s_i^r u$, где $(r, l)=1$ и u принадлежит подгруппе Фраттини группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, не повышает своего порядка.

Чтобы показать это, докажем, что в группе S

$$(s_i^r u)^{l^c} \equiv s_i^{rl^c}(N_{c+1}), \text{ если } u \in N_1.$$

Проще всего доказать это соотношение индукцией по c. Мы имеем:

$$(s_i^r u)^{l^{c-1}} \equiv s_i^{rl^{c-1}}(N_c),$$

т. е.

$$(s_i^r u)^{l^{c-1}} = s_i^{rl^{c-1}} v, \quad v \in N_c.$$

Возведем обе части в степень l и воспользуемся тем, что элементы N_c коммутируют с элементами S по модулю N_{c+1}.

$$(s_i^r u)^{l^c} \equiv (s_i^{rl^{c-1}} v)^l \equiv s_i^{rl^c} v^l \equiv s_i^{rl^c}(N_{c+1}),$$

так как $v^l \in N_{c+1}$, если $v \in N_c$.

Из доказанного соотношения и следует, что любой элемент вида $s_i^r u$ имеет в $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ порядок l^c, а в расширении, соответствующем X, имеет порядок l^{c+1} только при $\chi(s_i^{rl^c}) \neq 1$.

В соответствии с разложением (35) мы можем представить каждый характер X группы Z в виде

$$X = X_1 + X',$$

где X_1 аннулирует все подгруппы Z_i, кроме Z_1, а X' аннулирует подгруппу Z_1. Для дивизоров $\mathfrak{D}(X)$, введенных в п. 3 § 1, мы имеем при этом:

$$\mathfrak{D}(X) \approx \mathfrak{D}(X_1)\,\mathfrak{D}(X').$$

Так как было доказано, что $\mathfrak{D}(X)$ содержит те и только те простые дивизоры, образующие автоморфизмы групп инерции которых повышают свой порядок при расширении, соответствующем X, то из сказанного выше следует, что

$$\mathfrak{D}(X') \approx 1, \quad \mathfrak{D}(X) \approx \mathfrak{D}(X_1).$$

Нам остается исследовать подробнее характеры X_1. Группа Z_1 изоморфна

$$\mathfrak{G}_d^{(1)} = \mathfrak{G}_d^{(c+1)} / \Phi(\mathfrak{G}_d^{(c+1)}),$$

где $\Phi(\mathfrak{G}_d^{(c+1)})$ означает подгруппу Фраттини группы $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$, причем естественный гомоморфизм дается отображением $s \to s^{l^c}$. В самом деле, отображение

$$x \to x^{l^c} N_{c+1}$$

является гомоморфизмом, что следует из соотношения

$$(xy)^{l^c} \equiv x^{l^c} y^{l^c}(N_{c+1}),$$

непосредственно доказываемого индукцией по c. Мы знаем, что $u \in \varphi(\mathfrak{G}_d^{(c+1)})$ при этом гомоморфизме переходят в 1, а образующие s_i — в образующие Z_1, что и доказывает наше утверждение.

Таким образом, характеры X_1 группы Z_1 находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами χ порядка l группы $\mathfrak{G}_d^{(c+1)}$.

Характер X_1, соответствующий характеру χ, будем обозначать через $\widetilde{\chi}$. Выясним, для каких пар характеров χ_i, χ_j определен инвариант $(\chi_i, \widetilde{\chi}_j)$. Для того чтобы он был определен, необходимо и достаточно, чтобы α_i было l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(\widetilde{\chi}_j)$. Как мы знаем, α_i не будет l-взаимно просто с $\mathfrak{D}(\widetilde{\chi}_j)$, если оно содержит простой делитель $\mathfrak{p}$ в степени, не делящейся на l, образующая группы инерции которого повышает свой порядок при расширении, соответствующем $\widetilde{\chi}_j$. Как легко видеть, ввиду того что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ попарно l-взаимно просты, образующей группы инерции такого дивизора будет автоморфизм σ, для которого $\chi_i(\sigma) \neq 1$, $\chi_j(\sigma) = 1$ при $l \neq j$. Такой автоморфизм повышает свой порядок при расширении, соответствующем характеру $\widetilde{\chi}_j$, только при $i = j$.

Действительно, элемент σ, для которого $\chi_i(\sigma) \neq 1$, $\chi_j(\sigma) = 1$ при $i \neq j$ имеет вид $s_i^r u$, где $(l, r) = 1$ и u — элемент подгруппы Фраттини. Такой элемент повышает свой порядок при расширении, соответствующем $\widetilde{\chi}_j$, только если

$$\widetilde{\chi}_j((s_i^r u)^{l^c}) \neq 1.$$

Так как

$$(s_i^r u)^{l^c} = s_i^{rl^c}, \quad \widetilde{\chi}_j(s_i^{rl^c}) = \chi_j(s_i^r),$$

то это имеет место только при $i = j$. Таким образом, инварианты (χ_i, X') определены для всех характеров χ_i и X', а инварианты $(\chi_i, \widetilde{\chi}_j)$ тогда и только тогда, когда $i \neq j$.

5. Инварианты (χ, X) и $(X)_h$ как функции гомоморфизмов. Как и в п. 4, мы будем рассматривать шольцево поле K, группа Галуа которого есть группа $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ с выделенной в ней системой образующих $s_1, \ldots, s_d$, причем числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ попарно l-взаимно просты. Рассмотрим канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ на некоторую группу $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$. Его ядро $\mathfrak{N}$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, так что $\mathfrak{N}$ принадлежит нормальное подполе поля K. Это подполе мы будем обозначать через K^S. Очевидно, K^S имеет группу Галуа $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$ с выделенной системой образующих $t_1, \ldots, t_\delta$, состоящей из образов образующих $s_1, \ldots, s_d$. Числа $\alpha_1, \ldots \alpha_\delta$, соответствующие подполю K^S, получаются перемножением чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_d$, причем разные произведения не имеют общих множителей, так что $\alpha_1, \ldots, \alpha_\delta$ попарно l-взаимно просты. Это следует из того, что если $[S] = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_m})$, то числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\delta-1}$, соответствующие полю K^S, совпадают с такими числами, соответствующими полю K, а число α_δ поля K^S имеет вид $\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_m}$, где $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_m}$ — числа, соответствующие полю K. Последнее утверждение можно проверить непосредственно. Именно $\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_{\delta-1}}$ и $\sqrt[l]{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_m}}$ — инварианты относительно автоморфизмов поля K, составляющих ядро гомоморфизма S, и соответствуют характерам $\chi_1, \ldots, \chi_d$.

Рассмотрим характеры $\chi_1, \ldots, \chi_\delta$ группы $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$ и характеры $\widetilde{\chi}_1, \ldots, \widetilde{\chi}_\delta$ и X' центра Z группы $\mathfrak{G}_\delta^{(c+1)}$.

Пусть S есть произвольный канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ на $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$. В поле K^S определены инварианты

$$(\chi_i, X'), \quad (\chi_i, \widetilde{\chi}_j) \quad \text{при } i \neq j, \ (X')_h^{\cdot} \text{ и } (\widetilde{\chi}_i)_h. \tag{36}$$

При фиксированном поле K каждый из них однозначно определяется гомоморфизмом S и является, таким образом, функцией гомоморфизма. Число инвариантов (36) будем обозначать через k или, если надо будет подчеркнуть зависимость от числа образующих δ группы $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$,—через k_δ. Мы имеем, таким образом, k функций гомоморфизма: $f_1(S), \ldots, f_k(S)$. Нашей ближайшей задачей будет исследование их степеней.

Так как в силу (35) каждый характер X является суммой характеров X_ν групп Z_ν, аннулирующих Z_μ при $\mu \neq \nu$, то мы ограничимся рассмотрением только характеров X_ν. Каждый такой характер есть характер модуля многочленов Ли степени ν от d неизвестных $x_1, \ldots, x_d$ над полем вычетов по модулю l. Мы будем говорить, что характер имеет степень $\leqslant n$ относительно образующей x_i, если он аннулирует все одночлены Ли, в которые x_i входит в степени, бо́льшей n. Совершенно аналогично тому, как мы это делали для групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, определим канонические гомоморфизмы для модулей Ли заданной степени от d переменных. Если $\Lambda_\delta^{(\nu)}$ есть модуль Ли многочленов степени ν от переменных $y_1, \ldots, y_\delta$, а $\Lambda_d^{(\nu)}$ — от d переменных $x_1, \ldots, x_d$ и S — канонический гомоморфизм $\Lambda_d^{(\nu)}$ на $\Lambda_\delta^{(\nu)}$, то каждый характер X_ν модуля $\Lambda_\delta^{(\nu)}$ будет также характером модуля $\Lambda_d^{(\nu)}$. Этот характер мы обозначим через X_ν^S.

ЛЕММА 3. *Если характер X_ν модуля $\Lambda_\delta^{(\nu)}$ имеет степень $\leqslant n$ относительно y_δ и аннулирует все многочлены, зависящие только от $y_1, \ldots, y_{\delta-1}$, то*

$$\sum_{(i_1, \ldots, i_k)} (-1)^k X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}} = 0, \tag{37}$$

где $S_{i_1}, \ldots S_{i_k}$ пробегает все непустые подмножества множества $S_1, \ldots, S_{n+1}$ из $n+1$ попарно независимых гомоморфизмов одного и того же типа $(x_1, \ldots, x_{\delta-1};\ y_1, \ldots, y_{\delta-1} \mid y_\delta)$.

Доказательство. Пусть φ есть произвольный многочлен Ли модуля $\Lambda_d^{(\nu)}$. Оператор замены на y_δ всех неизвестных, входящих в множество $[S_i]$, обозначим через p_i. Оператор замены нулем всех свободных образующих, входящих в $[S_i]$, обозначим через q_i и оператор замены нулем всех свободных образующих, кроме входящих в $[S_1] \cup \ldots \cup [S_{n+1}]$, обозначим через q_0. Тогда условие (37) можно переписать так:

$$X_\nu \left(\sum (-1)^k p_{i_1} \ldots p_{i_k} q_{j_1} \ldots q_{j_{n+1-k}} q_0 \varphi \right) = 0, \tag{38}$$

где сумма распространена на все разбиения $(i_1 \ldots i_k j_1 \ldots j_{n+1-k})$ множества $(1, \ldots, n+1)$ на две части, из которых первая не пустая.

Заметим, что операторы p_i и p_j коммутируют между собой, так как они действуют на разные образующие. Это же относится и к операторам q_i, q_j и p_i, q_j при $i \neq j$, причем q_0 коммутирует со всеми операторами. Ввиду этого имеем:

$$\begin{aligned} &\sum (-1)^k p_{i_1} \ldots p_{i_k} q_{j_1} \ldots q_{j_{n+1-k}} q_0 = \\ &= q_0 (q_1 - p_1) \ldots (q_{n+1} - p_{n+1}) - q_0 q_1 \ldots q_{n+1}. \end{aligned} \tag{39}$$

Применим оператор (39) к произвольному многочлену Ли φ. Если для некоторого i φ не содержит ни одной образующей, входящей в состав $[S_i]$, то $q_i\varphi = q_i\varphi = \varphi$ и поэтому оператор

$$q_0(q_1 - p_1)\dots(q_{n+1} - p_{n+1}) \tag{40}$$

переводит φ в 0. Если же φ содержит хоть по одной образующей из каждого $[S_i]$, то оператор (40) переводит φ в многочлен, имеющий относительно y_δ степень по крайней мере $n+1$. Наконец, оператор $q_0 q_1 \dots \dots q_{n+1}$ переводит φ в многочлен, зависящий только от $y_1, \dots, y_{\delta-1}$. Таким образом, оператор (39) переводит любой многочлен Ли в сумму многочлена, имеющего степень по крайней мере $n+1$ относительно y_δ, и многочлена, зависящего только от $y_1, \dots, y_{\delta-1}$. На таких многочленах характер X_ν обращается в 0, что и доказывает (38), а следовательно, и (37).

Следствие. *В предположениях леммы 3 для любого гомоморфизма S_0, независимого от $S_1, \dots, S_{n+1}$,*

$$\sum_{(i_1 \dots i_k)} (-1)^k X_\nu^{S_0 * S_{i_1} * \dots * S_{i_k}} = 0. \tag{41}$$

Для доказательства достаточно произвести сначала канонический гомоморфизм, который на образующие, входящие в $[S_0]$, действует как S_0, а все остальные образующие не меняет, и к полученному модулю Ли применить лемму.

В дальнейшем мы будем применять мультипликативную запись, так что формулы (37) и (41) примут вид:

$$\prod_{(i_1 \dots i_k)} (X_\nu^{S_{i_1} * \dots * S_{i_k}})^{(-1)^k} = 1 \tag{42}$$

и

$$\prod_{(i_1 \dots i_k)} (X_\nu^{S_0 * S_{i_1} * \dots * S_{i_k}})^{(-1)^k} = 1. \tag{43}$$

ТЕОРЕМА 4. *Если характер X_ν имеет относительно y_δ степень $\leqslant n$, не аннулирует хоть один многочлен, зависящий от y_δ, и аннулирует все многочлены, зависящие только от $y_1, \dots, y_{\delta-1}$, то инварианты (χ_i, X_ν) и $(X_\nu)_h$ имеют, как функции гомоморфизмов типа $(s_1, \dots, s_{\delta-1}; t_1, \dots t_{\delta-1} \mid t_\delta)$ группы Галуа $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ шольцева поля K, следующие степени:*

$$(X_\nu)_h \text{ — степень } \leqslant n,$$
$$(\chi_i, X_\nu) \text{ при } i \neq \delta \text{ — степень } \leqslant n,$$
$$(\chi_\delta, X_\nu) \text{ — степень } \leqslant n+1.$$

Таким образом, все эти инварианты имеют степень $\leqslant c+2$.

Доказательство. Мы воспользуемся вторым из двух данных в п. 2 определений степени и проведем доказательство отдельно для каждого из трех перечисленных в формулировке теоремы случаев.

Обозначим инвариант $(X_\nu)_h$ подполя K^S через $f(S)$ и докажем для него соотношение (29). Характер X_ν, связанный с группой Галуа

поля K^S, определяет характер X_ν^S, связанный с группой Галуа поля K, причем, согласно формуле (13) § 1,

$$f(S) = (X_\nu)_h = (X_\nu^S)_h.$$

Формула (29) сводится, таким образом, к формуле

$$\prod_{(i_1, \ldots, i_k)} (X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})_h^{(-1)^k} = 1.$$

Ввиду формулы (12) § 1 мы имеем:

$$\prod_{(i_1, \ldots, i_k)} (X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})_h^{(-1)^k} = \Big(\prod_{(i_1, \ldots, i_k)} (X^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k} \Big)_h;$$

правая же часть этой формулы равна 1 в силу (42).

Обозначим теперь через $f(S)$ инвариант (χ_i, X_ν) подполя K^S поля K, причем напомним, что он определен, если X_ν есть один из характеров X', т. е. $\nu > 1$, или есть характер $\tilde{\chi}_j$ с $j \neq i$. Характер χ группы Галуа поля K^S является характером χ^S группы Галуа поля K, а характер X_ν, связанный с группой Галуа поля K^S, определяет характер X_ν^S, связанный с группой Галуа поля K. В рассматриваемом случае все характеры χ_i^S совпадают между собой, так как характер χ_i не зависит от образующей t_δ. Мы будем обозначать их все через $\bar{\chi}_i$. Заметим, что инварианты $(\bar{\chi}_i, X_\nu^S)$ определены тогда же, когда определены инварианты (χ_i, X_ν). Ввиду (7), имеем:

$$f(S) = (\chi_i, X_\nu) = (\bar{\chi}_i, X_\nu^S),$$

и формула (29) сводится в нашем случае к равенству:

$$\prod_{(i_1 \ldots i_k)} (\bar{\chi}_i, X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k} = 1.$$

Ввиду (6), мы имеем:

$$\prod_{(i_1 \ldots i_k)} (\bar{\chi}_i, X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k} = \Big(\bar{\chi}_i, \prod_{(i_1 \ldots i_k)} (X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k}\Big);$$

правая же часть этой формулы равна 1 в силу (42).

Нам осталось рассмотреть последний случай. Как и в предыдущем случае, имеем:

$$f(S) = (\chi_\delta, X_\nu) = (\chi_\delta^S, X_\nu^S).$$

Левая часть соотношения (19) приводится в данном случае к выражению

$$\prod_{(i_1 \ldots i_k)} (\chi_\delta^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}}, X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k}, \qquad (44)$$

где $(S_{i_1}, \ldots, S_{i_k})$ пробегает непустые подмножества множества $(S_0, S_1, \ldots, S_{n+1})$ из $n+2$ независимых гомоморфизмов. Применим лемму 3 к характеру χ_δ; мы получим, что

$$\chi_\delta^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}} = \chi_\delta^{S_{i_1}} \cdots \chi_\delta^{S_{i_k}}.$$

Заметим, что, как можно непосредственно проверить, инварианты $(\chi_\delta^{S_i}, X_\nu^{S_i})$ определены, если были определены инварианты (χ_δ, X_ν), так что мы можем записать (44) в виде

$$\prod_{(i_1 \ldots i_k)} \prod_{r=1}^{k} (\chi_\delta^{S_{i_r}}, X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k}.$$

Если в этом произведении собрать все множители, у которых на первом месте стоит $\chi_\delta^{S_j}$, то мы получим выражение

$$\prod (\chi_\delta^{S_j}, X_\nu^{S_j * S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^{k+1}},$$

где $S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}$ пробегает все подмножества множества $S_0, \ldots, S_{n+1}$, не содержащие S_j. Мы можем переписать это выражение в виде

$$(\chi_\delta^{S_j}, \prod_{(i_1 \ldots i_k)} (X_\nu^{S_{i_1} * \cdots * S_{i_k}})^{(-1)^k})^{-1},$$

что равно 1 в силу (43). Теорема доказана.

Заметим, что если в предположениях теоремы 4 X аннулирует все многочлены, зависящие от y_δ, то при $i \neq \delta$ (χ_i, X) не имеет степени, а (χ_δ, X) имеет степень 1.

6. Существование расширений с заданной группой порядка l^α.

ТЕОРЕМА 5. *Для каждого натурального числа δ существует натуральное число $C(\delta)$ со следующим свойством: в любом шольцевом поле K с группой Галуа $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, $d > C(\delta)$, с выделенной системой образующих $s_1, \ldots, s_d$ и попарно l-взаимно простыми $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, существует подполе K^S с группой Галуа $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$ и всеми инвариантами (χ, X) и $(X)_h$, равными* 1.

Доказательство. Выберем в модуле многочленов Ли степени $c+1$ базис, состоящий из одночленов Ли, и рассмотрим базис группы характеров, взаимный к этому базису.

Если в базисный одночлен Ли φ_i входят неизвестные $x_1, \ldots, x_d$ в степенях $m_1, \ldots, m_d$, то соответствующий базисный характер X_i будет аннулировать все одночлены Ли, в которые переменные входят в других степенях. Если при этом $m_{i_1} \neq 0, \ldots, m_{i_r} \neq 0$, а остальные степени $m_j = 0$, то мы будем говорить, что X_i зависит только от $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$. Так как любой характер составляется из базисных, а инварианты (χ, X) и $(X)_h$ мультипликативны, то мы будем добиваться равенства единице только тех инвариантов, в которые входят базисные характеры.

Перепишем все инварианты (χ, X) и $(X)_h$ с базисными характерами χ и X в определенном порядке. Сначала напишем те инварианты, в которые входят характеры X, зависящие только от x_1 и x_2, и характеры χ_1 и χ_2. При этом, как легко видеть, если характер χ есть χ_1, то X зависит от x_2, а если χ есть χ_2, то X зависит от x_1. Число инвариантов этой первой группы обозначим через k_2. Затем напишем инварианты, в которых χ есть χ_1, χ_2 или χ_3, а X зависит только от x_1, x_2, x_3, причем или χ есть χ_3, или X зависит от x_3. Число инвариантов этой группы обозначим через k_3. Аналогично, через k_i обозначим число инвариантов,

в которых χ есть одно из $\chi_1, \ldots, \chi_i$, а X зависит только от $x_1, \ldots, x_i$, причем или $\chi = \chi_i$, или X зависит от x_i. Очевидно, что число таких групп будет δ, и каждый инвариант, в который входят только базисные характеры, попадет в одну из этих групп. Пусть $C(k, n)$ — те числа, существование которых установлено в теореме 3. Там число образующих δ группы, на которую отображают группу $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ канонические гомоморфизмы, было фиксировано. Так как теперь мы будем его менять, то соответствующее число $C(k, n)$ будем обозначать через $C(k, n, \delta)$. Мы докажем, что число $C(\delta)$, существование которого утверждается теоремой, можно определить формулой:

$$C(\delta) = 1 + C(k_2, c+2, 2) + c(k_3, c+2, 3) + \cdots + C(k_\delta, c+2, \delta).$$

Действительно, пусть $f_1^{(2)}(S), \ldots, f_{k_\delta}^{(2)}(S); \ldots; f_1^{(\delta)}(S), \ldots, f_{k_\delta}^{(\delta)}(S)$ — группы инвариантов, которые мы только что описали, причем мы рассматриваем инварианты как функции гомоморфизмов группы Галуа заданного нам шольцева поля K. Рассмотрим гомоморфизмы типа $(s_1; t_1 | t_2)$. При этих гомоморфизмах инварианты первой группы имеют, согласно теореме 4, степень $\leqslant c+2$. Применим следствие из теоремы 3; мы получим, что у поля K существует подполе K^{S_1}, группа Галуа которого имеет

$$2 + C(k_3, c+2, 3) + \cdots + C(k_\delta, c+2, \delta)$$

образующих и у которого, в свою очередь, существует подполе K^{T_1}, группа Галуа которого имеет две образующих и для которого все k_2 инвариантов первой группы обращаются в единицу.

Будем в дальнейшем рассматривать только поле K^{S_1} и на его группе Галуа — гомоморфизмы типа $(s_1, s_2; t_1, t_2 | t_3)$. При этих гомоморфизмах инварианты первой группы не меняются, т. е. остаются равными 1, а инварианты второй группы имеют, согласно теореме 4, степень $\leqslant c+2$. Применяем опять следствие из теоремы 3 и получаем подполя K^{S_2} и K^{T_2}. Группа Галуа поля K^{S_2} имеет $3 + C(k_4, c+1, 4) + \cdots + C(k_\delta, c+1, \delta)$ образующих. Группа Галуа поля K^{T_2} имеет три образующих. У поля K^{T_2} все инварианты первой и второй групп равны 1 Проделав таким образом δ шагов, мы придем к полю $K^{S_\delta} = K^{T_\delta}$, группа Галуа которого есть группа $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$ и у которого все инварианты равны 1. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Над каждым полем алгебраических чисел существует расширение с наперед заданной группой Галуа порядка l^α.*

Доказательство. Так как каждая группа класса c с d образующими является факторгруппой группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, то нам достаточно доказать существование расширения с группой $\mathfrak{G}_d^{(c)}$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. k содержит корень степени l из 1. Мы докажем даже существование шольцева расширения с группой $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ и с l-взаимно простыми числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Доказательство проведем для любого числа образующих d индукцией по классу c. Нам надо доказать существование поля с указанными свойствами с группой $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$, причем мы можем предполагать построенным поле с теми же свойствами с группой $\mathfrak{G}_d^{(c-1)}$ с любым d. Возьмем $d = C(\delta)$, где $C(\delta)$ — число, существование которого установлено теоремой 5. Пусть K — шольцево поле с группой $\mathfrak{G}_d^{(c-1)}$, существование которого следует из индуктивного предположения. Согласно теореме 5,

в нем существует подполе K^S с группой Галуа $\mathfrak{G}_\delta^{(c-1)}$, у которого все инварианты равны 1. Как подполе шольцева поля K, поле K^S — шольцево. Как было отмечено в п. 5 этого параграфа, у поля K^S все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_\delta$ попарно l-взаимно просты. Ввиду следствия из теоремы 1, поле K^S может быть погружено в шольцево поле K_1 с группой Галуа $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$. Нам остается только доказать, что у поля K_1 числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_\delta$ попарно l-взаимно просты. Если $c > 1$, то это очевидно, так как они — те же самые, что и у поля K. Нам нужно, таким образом, рассмотреть только первый шаг индукции. В этом случае $K_1 = k(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_\delta})$, причем, согласно доказательству следствия из теоремы 1, это поле строится последовательным присоединением $\sqrt[l]{\alpha_i}$ к $k(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_{i-1}})$ на основании теоремы 1. Остается только вспомнить, что при доказательстве теоремы 1 дивизор $\mathfrak{m}$ (в нашем случае это и есть (α_i)) мог быть сделан взаимно простым с любым наперед заданным дивизором.

2. k не содержит корня степени l из 1. Мы будем пользоваться теми же обозначениями, которые были приняты при доказательстве теоремы 2. Как и в первом случае, мы докажем, что поле K_1 можно построить шольцевым и таким, чтобы у поля $\overline{K}_1$ числа $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_\delta$ были попарно l-взаимно просты. Доказательство снова будем вести индукцией по c и начнем с рассмотрения поля K, обладающего всеми этими свойствами и имеющего группу Галуа $\mathfrak{G}_d^{(c-1)}$ с $d = C(\delta)$. Согласно теореме 5, у поля $\overline{K}$ существует подполе $\overline{K}^S$ с нужными нам свойствами и всеми инвариантами, равными 1. Но легко видеть, что тогда в поле K существует такое подполе $K_0 = K^S$, что $\overline{K}_0 = \overline{K}^S$. Ввиду теоремы 2, K_0 может быть погружено в шольцево поле K_1 с группой $\mathfrak{G}_d^{(c)}$. То, что у $\overline{K}_1$ числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_\delta$ можно выбрать попарно l-взаимно простыми, доказано нами при рассмотрении случая 1. Теорема доказана.

Поступило
13. XI. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ван дер Варден, Современная алгебра, т. I, Москва, 1947.

[2] Курош А. Г., Теория групп, Москва, 1953.

[3] Скопин А. И., Факторгруппы одного верхнего центрального ряда, Доклады Ак. наук СССР, LXXIV, 3 (1950), 425—428.

[4] Чеботарев Н. Г., Основы теории Галуа, ч. II, Москва, 1937.

[5] Brauer R., Über die Konstruktion der Schiefkörper, die von endlichem Rang in Bezug auf ein gegebenes Zentrum sind, J. reine und angew. Math., Bd. 168 (1932), 44—64.

[6] Deuring M., Neuer Beweis des Bauerschen Satzes, J. reine und angew. Math., Bd. 173 (1935) 1—4.,

[7] Hasse H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht D. M. V., Bd. 35 (1926), Bd. 36 (1927), Erg.-Bd. 6, 1930.

[8] Reichardt H., Konstruktion von Zahlkörpern mit gegebener Galoisgruppe von Primzahlpotenzordnung, J. reine und angew. Math., Bd. 177 (1937), 1—5.

[9] Scholz A., Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung. I, Math. Zeitschrift, Bd. 42 (1936), 161—188.

[10] Tannaka T., Über die Konstruktion der Galoisschen Körper mit vorgegebener p-Gruppe, Tôhoku Math. Journ., v. 43 (1937), 252—260.

[11] Witt E., Der Existenzsatz für Abelsche Funktionenkörper, J. reine und angew. Math., Bd. 173 (1935), 43—51.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 297–306

А. О. ГЕЛЬФОНД

О РАЗБИЕНИИ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА НА КЛАССЫ ГРУППОЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

В работе рассмотрены некоторые свойства последовательностей целых чисел, на которые разбивается натуральный ряд группой линейных подстановок.

Хорошо известно, что если задано целое число $m > 1$ в качестве модуля, то натуральный ряд разбивается по этому модулю на m классов, причем два числа принадлежат к одному классу, если их разность делится на m. Это же разбиение на m классов может быть определено иначе: именно, зададим подстановку $L = x + m$ и назовем два числа N и n принадлежащими к одному классу, если они связаны цепочкой подстановок

$$N = L[L[\cdots[L(n)]\cdots]].$$

Такое определение разбиения натурального ряда на классы по модулю m уже допускает интересное обобщение, найденное А. Г. Курошем. Пусть заданы положительные целые числа $a_1, \ldots, a_\nu$ и неотрицательные целые числа $b_1, \ldots, b_\nu$. Рассмотрим группу подстановок (L)

$$L_k = a_k x + b_k, \quad a_k + b_k \geqslant 2, \quad k = 1, \ldots, \nu;$$

$L_k^{-1}(x)$ будет обратная подстановка, возможная, если $x \equiv b_k \bmod a_k$. Будем называть два натуральных числа N и n принадлежащими к одному классу, если они связаны цепочкой подстановок

$$L_{k_1}^{\varepsilon_1}[L_{k_2}^{\varepsilon_2}[\cdots L_{k_s}^{\varepsilon_s}(N)]] = L_{n_1}^{\delta_1}[\cdots[L_{n_q}^{\delta_q}(n)]],$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_j = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

Первый естественный вопрос, возникающий относительно подобного разбиения натурального ряда на классы, — это вопрос о необходимых и достаточных условиях, наложенных на a_k и b_k, $1 \leqslant k \leqslant \nu$, при выполнении которых число классов будет конечно. Ответом на этот вопрос служит следующее утверждение: если a есть общее наименьшее кратное чисел $a_1, \ldots, a_\nu$, то необходимым и достаточным условием конечности числа классов будет существование при любом целом q, $0 \leqslant q \leqslant a-1$, такого k, $1 \leqslant k \leqslant \nu$, что число $\frac{q - b_k}{a_k}$ будет целым числом. Действительно, если это условие выполнено, то уравнение

$$N = a_k x + b_k, \quad N \geqslant b_k,$$

разрешимо в целых числах $x \geqslant 0$, и его решение $x_N < N$. Поэтому к каждому классу должны принадлежать натуральные числа, меньшие некоторой границы, зависящей только от a_k и b_k, $1 \leqslant k \leqslant \nu$. В случае невыполнения нашего условия существует q такое, что ни одно из уравнений

$$an + q = a_k x + b_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu,$$

не разрешимо в целых числах. Поэтому числа $an_1 + q$ и $an_2 + q$ должны принадлежать к разным классам и число классов бесконечно.

Мы займемся теперь наиболее, с нашей точки зрения, интересным случаем группы подстановок, в которой подстановки абсолютно некоммутативны, дающей разбиение на конечное число классов натурального ряда.

Рассмотрим группу линейных подстановок:

$$L_k(x) = mx + p_k m + k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1, \tag{1}$$

где $m \geqslant 2$, $p_0 \geqslant 1$, $p_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$ — целые числа. Среди чисел натурального ряда имеется лишь конечное число чисел ν, $\nu \geqslant 0$, для которых неразрешимо ни одно из уравнений

$$\nu = mx + p_k m + k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1, \tag{2}$$

в целых неотрицательных x. Это будут, очевидно, числа

$$\nu = nm + k, \quad 0 \leqslant n \leqslant p_k - 1, \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1. \tag{3}$$

Число таких чисел ν мы обозначим через q, причем непосредственно видно, что

$$= \sum_{k=0}^{m-1} p_k \geqslant 1.$$

Совокупность этих чисел ν будем называть множеством начальных чисел или множеством E. Возьмем какое-нибудь число ν из чисел множества E и подставим его вместо x в наши подстановки. Мы получим m чисел

$$m\nu + p_k m + k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m - 1.$$

Эти числа, в свою очередь, при помощи нашей группы подстановок переходят в m^2 чисел, и, продолжая этот процесс образования чисел неограниченно, мы при помощи нашей группы подстановок, получаем из начального числа ν бесконечную последовательность чисел натурального ряда:

$$n_0 = \nu, n_1, n_2, \ldots . \tag{4}$$

Числа этой последовательности обладают тем свойством, что любые два из них связаны между собой соотношением:

$$L_{k_1}^{\varepsilon_1}[L_{k_2}^{\varepsilon_2}[\cdots L_{k_s}^{\varepsilon_s}(N)]] = L_{q_1}^{\delta_1}[\cdots L_{q_r}^{\delta_r}(n)], \tag{5}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_j = \pm 1$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Найдем общий вид чисел, порождаемых числом ν, другими словами, чисел класса ν. Нетрудно заметить, что для всякого числа класса ν верно представление:

$$N = m^{s}\nu + m \sum_{n=0}^{s-1} p_{k_n} m^n + \sum_{n=0}^{s-1} k_n m^n, \tag{6}$$

где s — целое число, а k_n независимо друг от друга принимают значения $0, 1, \ldots, m-1$. Нетрудно заметить, что если N_1 принадлежит к классу ν_1, где ν_1 совпадает или отлично от ν, и

$$N_1 = m^{s_1}\nu_1 + m \sum_{n=0}^{s_1-1} p_{k'_n} m^n + \sum_{n=0}^{s_1-1} k'_n m^n,$$

то из равенства $N = N_1$ следует, что

$$s = s_1, \quad \nu = \nu_1, \quad k_n = k'_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant s-1.$$

Это есть прямое следствие того, что $k'_n - k_n$ может делиться на m только в случае $k'_n = k_n$.

Итак, мы видим, что при помощи подстановок (1) натуральный ряд разбивается на q классов, не пересекающихся между собой, каждый из которых порождается своим начальным числом ν. Обозначим через $N_\nu(x)$ число чисел класса ν, не превосходящих x, где $x \geqslant 0$ — любое действительное число. При $x \geqslant \nu$, очевидно, имеет место соотношение:

$$N_\nu(x) = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} N_\nu\left(\frac{x}{m} - p_k - \frac{k}{m}\right). \tag{7}$$

Это соотношение непосредственно следует из конструкции процесса получения чисел класса ν.

Относительно $N_\nu(x)$ мы докажем теперь теорему, выясняющую его поведение.

ТЕОРЕМА I.

$$N_\nu(x) = x\varphi_\nu\left(\frac{\ln x}{\ln m}\right) + O(1), \tag{8}$$

где $\varphi_\nu(t)$ — периодическая, с периодом 1, удовлетворяющая условиям Липшица функция.

Доказательство. Из соотношения (7) имеем:

$$\frac{N_\nu(x)}{x} = \frac{m}{x} N_\nu\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{m-1} \left[N_\nu\left(\frac{x}{m}\right) - N_\nu\left(\frac{x}{m} - p_k - \frac{k}{m}\right)\right] =$$
$$= \frac{m}{x} N_\nu\left(\frac{x}{m}\right) + \frac{1}{x} R_\nu(x), \quad |R_\nu(x)| < q + m.$$

Полагая в этом соотношении

$$x = m^{t+s}, \quad t = \left\{\frac{\ln x}{\ln m}\right\}, \quad s = \left[\frac{\ln x}{\ln m}\right],$$

мы получим, что

$$\frac{N_\nu(m^{t+s})}{m^{t+s}} = \frac{N_\nu(m^{t+s-1})}{m^{t+s-1}} + O\left(\frac{1}{m^s}\right), \tag{9}$$

откуда уже непосредственно следует существование предела

$$\lim_{s\to\infty} \frac{N_\nu(m^{t+s})}{m^{t+s}} = \varphi_\nu(t), \quad \varphi_\nu(t+1) = \varphi_\nu(t), \tag{10}$$

и справедливость соотношения

$$\frac{N_\nu(m^{t+s})}{m^{t+s}} = \varphi_\nu(t_2) + \sum_{k=s}^{\infty} O\left(\frac{1}{m^k}\right) = \varphi_\nu(t) + O\left(\frac{1}{m^{t+s}}\right)$$

или соотношения

$$N_\nu(x) = x\varphi_\nu\left(\frac{\ln x}{\ln m}\right) + O(1).$$

Из этого последнего равенства следует, что

$$\varphi_\nu(t_1) - \varphi_\nu(t_2) = \frac{N_\nu(m^{t_1+s})}{m^{t_1+s}} - \frac{N_\nu(m^{t_2+s})}{m^{t_2+s}} + O\left(\frac{1}{m^s}\right) =$$

$$= \frac{N_\nu(m^{t_1+s}) - N_\nu(m^{t_2+s})}{m^{t_1+s}} - (1 - m^{t_2-t_1})\frac{N_\nu(m^{t_2+s})}{m^{t_2+s}} + O\left(\frac{1}{m^s}\right).$$

Далее, при достаточно большом s

$$|\varphi_\nu(t_1) - \varphi_\nu(t_2)| < C_1|t_1 - t_2| + O\left(\frac{1}{m^s}\right) < C|t_1 - t_2|,$$

где C — постоянная. Этим наша теорема полностью доказана.

Определение функции $\varphi_\nu(t)$ достаточно просто только в частном случае:

$$p_0 = p_1 = \cdots = p_{m-1} = p \geqslant 1.$$

В общем же случае для нахождения $\varphi_\nu(t)$ можно использовать аналитические соображения. Рассмотрим функцию $f_\nu(x)$, определенную рядом:

$$f_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{n_k}, \quad n_0 = \nu,$$

где n_k пробегает все числа класса ν. Эта функция, очевидно, удовлетворяет функциональному уравнению:

$$f_\nu(e^{-x}) = e^{-\nu x} + \left[\sum_{k=0}^{m-1} e^{-(p_k m+k)x}\right] f_\nu(e^{-mx}). \tag{11}$$

Положим

$$p = \min_{0\leqslant k\leqslant m-1}(p_k m + k), \quad u(z) = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} z^{p_k m+k-p}}{\sum_{k=0}^{m-1} z^k}.$$

Тогда уравнение (11) можно записать в форме:

$$(1 - e^{-x}) f_\nu(e^{-x}) = e^{-\nu x}(1 - e^{-x}) + e^{-px}u(e^{-x})(1 - e^{-mx}) f_\nu(e^{-mx}). \tag{12}$$

Так как

$$u(e^{-rx}) = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{m-1} e^{-rkx} \sum_{k=0}^{m-1} e^{-(p_k m+k-p)rx} + 1}{\sum_{k=0}^{m-1} e^{-rkx}} = 1 + O(e^{-rx}rx)$$

при больших или малых rx, то, решая уравнение (12) итерациями, мы получим, что

$$(1-e^{-x}) f_\nu(e^{-x}) = (1-e^{-x}) e^{-\nu x} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-p\frac{m^k-1}{m-1} - \nu m^k x} (1-e^{-m^k x}) \prod_{n=0}^{k-1} u(e^{-m^n x}), \quad (13)$$

причем сумма в правой части будет сходящейся при $\operatorname{Re} x > 0$.

Положим в равенстве (13) $x = m^{t-s}$, $0 \leqslant t < 1$, s — целое число, перейдем к пределу в левой и правой части (13). Мы будем иметь тогда

$$\lim_{s\to\infty} m^{t-s} f_\nu(e^{-m^{t-s}}) = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{p}{m-1}+\nu\right) m^{k+t}} (1-e^{-m^{k+t}}) \prod_{n=0}^{\infty} u(e^{-m^{t+k-n-1}}) = \\ = \psi_\nu(t), \quad \psi_\nu(t+1) = \psi_\nu(t). \quad (13')$$

Положим также

$$w_\nu(z) = \psi_\nu\left(\frac{\ln z}{\ln m}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\left(\nu+\frac{p}{m-1}\right)m^k z} (1-e^{-m^k z}) \prod_{n=0}^{\infty} u(e^{-m^{k-n-1} z}). \quad (14)$$

Эта функция $w_\nu(z)$ будет регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функцией так как $u(z)$ — многочлен.

Между функциями $w_\nu(z)$ и $\varphi_\nu(t)$ существует связь.

ЛЕММА 1. *Если*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad S(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n \quad (15)$$

и при любом t существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S(m^{k+t})}{m^{k+t}} = \varphi(t), \quad \varphi(t) = \varphi(t+1), \quad (16)$$

где k пробегает все целые числа, причем $\varphi(t)$ — непрерывная функция t при всех действительных t, то при любом z, $\operatorname{Re} z > 0$, существует предел

$$\lim_{k=\infty} m^{-k} z f(e^{-zm^{-k}}),$$

где k пробегает натуральный ряд, причем

$$\lim_{k=\infty} m^{-k} z f(e^{-zm^{-k}}) = \\ = \ln m z^2 \int_{-\infty}^{\infty} m^{2t} e^{-tz} \varphi(t)\, dt. \quad (17)$$

Доказательство. Из условий леммы мы имеем непосредственно, что при $0 \leqslant z < 1$

$$(1-z) f(z) = (1-z)^2 \sum_{n=0}^{\infty} S(n) z^n =$$

$$= (1-z)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi\left(\frac{\ln n}{\ln m}\right) + (1-z)^2 o\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right).$$

Заменяя в этом соотношении z на $e^{-zm^{-k}}$ при $z > 0$, мы получаем непосредственно, что при k, принимающем целые значения,

$$\lim_{k \to \infty} zm^{-k} f(e^{-zm^{-k}}) =$$

$$= \lim_{k \to \infty} zm^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} nzm^{-k} \varphi\left(\frac{\ln nzm^{-k}}{\ln m} - \frac{\ln z}{\ln m}\right) e^{-\frac{nz}{m^k}} =$$

$$= \int_0^{\infty} x\varphi\left(\frac{\ln x}{\ln m} - \frac{\ln z}{\ln m}\right) e^{-x}\, dx = \ln m z^2 \int_{-\infty}^{\infty} m^{2x} e^{-zm^x} \varphi(x)\, dx.$$

Переход от суммы к интегралу законен в силу непрерывности $\varphi(t)$. Заметим, что непрерывность $\varphi(t)$ 'для справедливости нашей леммы не обязательна. В силу периодичности $\varphi(t)$, достаточно только сходимости интегральных сумм к интегралу на отрезке $[0,1]$.

Теперь мы видим, что функция $\varphi_\nu(t)$ из теоремы I удовлетворяет уравнению:

$$w_\nu(z) = z^2 \ln m \int_{-\infty}^{\infty} m^{2x} e^{-zm^x} \varphi_\nu(x)\, dx, \tag{18}$$

доказанному для действительных неотрицательных z, но остающемуся праведливым для любого комплексного z, $\operatorname{Re} z > 0$, в силу принципа аналитического продолжения и регулярности левой и правой части в правой полуплоскости, причем функция $w_\nu(z)$ определяется равенством (14).

ТЕОРЕМА II. *Функция* $\varphi_\nu(t)$, *определенная в теореме* I, *имеет вид*

$$\varphi_\nu(x) = \frac{m^{-2x}}{2\pi i} \frac{d}{dx} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w_\nu(z)}{z^3 \ln m} e^{zm^x}\, dz, \quad \sigma > 0, \tag{19}$$

где функция $w_\nu(z)$ *определяется равенством* (14).

Действительно, из равенства (18) следует, что при $\sigma > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w_\nu(z)}{z^4 \ln m} e^{zm^t}\, dz = \int_{-\infty}^{t} m^{2x} (m^t - m^x) \varphi_\nu(x)\, dx,$$

откуда, дифференцируя по t, мы получаем, что

$$\int_{-\infty}^{t} m^{2x} \varphi_\nu(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w_\nu(z)}{z^3 \ln m} e^{zm^t}\, dz,$$

и далее, что

$$\varphi_\nu(x) = \frac{m^{-2x}}{2\pi i} \frac{d}{dx} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{w_\nu(z)}{z^3 \ln m} e^{zm^x}\, dz.$$

Заметим, что, в силу того что $\varphi_\nu(x)$ удовлетворяет условию Липшица, абсолютная величина интеграла в правой части равенства (18) есть $O\left(\frac{1}{\tau}\right)$, если $z=\sigma+i\tau$. Поэтому

$$|z^{-3}w_\nu(z)|=O(\tau^{-2}),$$

другими словами, интеграл в правой части (19) абсолютно сходится.

В случае, когда $p_0=p_1=\ldots=p_{m-1}=p$, функция $\varphi_\nu(x)$ может быть записана в гораздо более простом виде. Действительно, в этом случае $u(x)=1$ и

$$w_\nu(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{-\left(\nu+\frac{pm}{m-1}\right)m^k z}(1-e^{-m^k z}). \tag{20}$$

Выполняя интегрирование в правой части (19) и положив

$$\alpha=\left\{\frac{\ln\left(\nu+\frac{pm}{m-1}\right)}{\ln m}\right\},\quad \beta=\left\{\frac{\ln\left(\nu+1+\frac{pm}{m-1}\right)}{\ln m}\right\},$$
$$S(x)=0,\quad x\leqslant 0,\quad S(x)=1,\quad x>0,$$

мы будем иметь, что при $0\leqslant t<1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{w_\nu(z)}{z^3\ln m}e^{zm^t}\,dz=$$
$$=\frac{1}{\ln m}\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[e^{(m^t-m^{\alpha+k})z}-e^{(m^t-m^{\beta+k})z}\right]\frac{dz}{z^3}=$$
$$=\frac{1}{2\ln m}\Big[S(t-\alpha)(m^t-m^\beta)^2-S(t-\beta)(m^t-m^\beta)^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\{(m^t-m^{\alpha-k})^2-(m^t-m^{\beta-k})^2\}\Big].$$

Далее, дифференцируя по t, получим, что при $\alpha<\beta$

$$\varphi_\nu(t)=\frac{m^{-t}}{m-1}(m^\beta-m^\alpha)+S(t-\alpha)(1-m^{\alpha-t})-S(t-\beta)(1-m^{\beta-t}).$$

Если же $\alpha>\beta$, то

$$\varphi_\nu(t)=1+\frac{m^{-t}}{m-1}(m^\beta-m^\alpha)+S(t-\alpha)(1-m^{\alpha-t})-S(t-\beta)(1-m^{\beta-t}).$$

Эти формулы показывают, что $\varphi_\nu(t)$ действительно не имеет производной.

Представляет интерес и дзета-функция, связанная с классом целых чисел, порождаемых группой подстановок (1) и начальным элементом ν.

Положим

$$\zeta_\nu(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n_k^s},\quad n_0=\nu,\quad \nu>0;\quad n_0=p,\quad \nu=0, \tag{21}$$

где $p = \min\limits_{0 \leqslant k \leqslant m-1} (p_k m + k)$. Нетрудно видеть, что

$$\zeta_\nu(s) = \frac{1}{n_0^s} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{m^s n_k^s} \frac{1}{\left(1 + \frac{p_r m + r}{m n_k}\right)^s},$$

откуда

$$\left(1 + \frac{1}{m^{s-1}}\right) \zeta_\nu(s) = \frac{1}{n_0^s} + \sum \frac{1}{m^s n_k^s} \sum_{r=0}^{m-1} \left[\left(1 + \frac{p_2 m + r}{m n_k}\right)^{-1} - 1\right]. \qquad (22)$$

Уже из этого соотношения видно, что $\zeta_\nu(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, за исключением, может быть, точек

$$s = 1 + \frac{2k\pi i}{\ln m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Можно дать другое представление $\zeta_\nu(s)$ при помощи $f_\nu(s)$, а именно:

$$\zeta_\nu(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f_\nu(e^{-x}) x^{s-1}\, dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 f_\nu(e^{-x}) x^{s-1}\, dx + \eta(s), \qquad (23)$$

где $f_\nu(x)$ удовлетворяет уравнению (11), а $\eta(s)$ — целая функция s. И уравнения (12) следует, что

$$(1 - e^{-x}) f_\nu(e^{-x}) - (1 - e^{-mx}) f_\nu(e^{-mx}) = O(x),$$

откуда, в свою очередь, непосредственно следует, что при $1 \leqslant x < m$

$$\left(1 - e^{-\frac{x}{m^n}}\right) f_\nu\left(e^{-\frac{x}{m^n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - e^{-\frac{x}{m^n}}\right) f_\nu\left(e^{-\frac{x}{m^n}}\right) + O\left(\frac{1}{m^n}\right),$$

где n пробегает натуральный ряд, или, в силу (13′), (14) и (18), что

$$f_\nu\left(e^{-\frac{x}{m^n}}\right) = \frac{m^n}{x} \int_0^\infty t e^{-t} \varphi_\nu\left(\frac{\ln \frac{t}{x}}{\ln m}\right) dt + O(1).$$

Далее, заменяя $x m^{-n}$ на x, $0 < x \leqslant 1$, мы получаем, что в силу периодичности $\varphi_\nu(t)$ имеет место соотношение:

$$f_\nu(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty t e^{-t} \varphi_\nu\left(\frac{\ln \frac{t}{x}}{\ln m}\right) dt + O(1). \qquad (24)$$

Сопоставляя это соотношение с соотношением (23), находим, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta_\nu(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 x^{s-2} \int_0^\infty t e^{-t} \varphi_\nu\left(\frac{\ln \frac{t}{x}}{\ln m}\right) dt\, dx + \eta_1(s),$$

где функция $\eta_1(s)$ регулярна при $\operatorname{Re} s > 0$.

Если $A_{n,\nu}$ — коэффициенты ряда Фурье $\varphi_\nu(t)$ на $[0,1]$, то во всяком случае

$$|A_{n,\nu}| = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и при помощи легких вычислений мы получим, что

$$\zeta_\nu(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{n,\nu} \Gamma\left(2 + \frac{2\pi in}{\ln m}\right) \frac{1}{s - 1 - \frac{2\pi in}{\ln m}} + \eta_1(s), \tag{25}$$

другими словами, в точках

$$1 + \frac{2\pi in}{\ln m}$$

функция $\zeta_\nu(s)$ имеет полюсы с вычетами

$$\left(1 + \frac{2\pi in}{\ln m}\right) A_{n,\nu}.$$

Соотношения (25) и (22) позволяют утверждать, что в точке $s = 1$ у функции $\zeta_\nu(s)$ полюс первого порядка с вычетом

$$\int_0^1 \varphi_\nu(t)\, dt$$

и что в точках

$$-k \pm \frac{2n\pi i}{\ln m}, \quad k = -1, 0, 1 \ldots, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$\zeta_\nu(s)$ может иметь полюсы первого порядка с вычетами

$$\omega_{k,n} = (-1)^k \lambda_{k+1} \frac{m^k \left(1 + \frac{2\pi in}{\ln m}\right)}{\Gamma\left(-k + \frac{2\pi in}{\ln m}\right)} \int_0^1 e^{-2\pi i nt} \varphi_\nu(t)\, dt, \tag{26}$$

где λ_k определяется соотношением:

$$\sum_0^\infty \lambda_k t^k = \prod_{\nu=0}^\infty \frac{m}{\sum_{q=0}^{m-1} e^{(p_q m + q) m^{-\nu} t}}, \tag{27}$$

если $\omega_{k,n} \neq 0$. В остальных точках плоскости s $\zeta_\nu(s)$ регулярна. Представляется интересным использовать $\zeta_\nu(s)$ для решения вопроса о распределении простых чисел в ряду $n_0, n_1, n_2, \ldots$. В случае, когда

$$p_0 = p_1 = \ldots = p_{m-1} = p,$$

вопрос о распределении простых чисел решается без труда, и мы можем легко доказать предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m^{k+t}} \sum_{n < m^{k+t}} [N_\nu(n) - N_\nu(n-1)]\, \Lambda(n) = \varphi_\nu(t), \tag{28}$$

где k пробегает натуральный ряд, а $\Lambda(n)$ — функция Мангольта. Вместо предельного соотношения здесь можно указать оценку остаточного члена и притом такую же, как и для остаточного члена в формуле распределения простых чисел. Это связано с тем, что при одинаковых p_k группа подстановок (1) разбивает натуральный ряд на последовательности длинных и сплошных его отрезков.

В заключение заметим, что лемма 1 допускает обращение типа тауберовой теоремы Гарди.

Поступило
1. III. 1954

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 307—326

Н. С. КОШЛЯКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНОГО И КВАДРАТИЧНОГО ПОЛЯ. III

Настоящая статья представляет собою продолжение работ автора ([4]), ([5]). Статья содержит доказательство для квадратичного поля ряда интегральных тождеств, выведенных для рационального поля известным индусским математиком Рамануджаном.

§ 5. О формулах, аналогичных равенствам Рамануджана

31°. Равенства (19.9) и (30.3) по своему внешнему виду принадлежат к числу замечательных интегральных соотношений, установленных для рационального поля индусским математиком Рамануджаном. В ряде заметок, помещенных в Докладах Ак. наук СССР [см. ([1])], мы распространили такие равенства на интегралы, зависящие от числовой функции $d(n)$ — числа делителей n.

Установим теперь ряд аналогичных соотношений для изучаемого нами алгебраического поля.

Формула (19.9) была установлена нами как следствие сумматорной формулы (II) n° 14. Приведем теперь другой вывод этого соотношения. Для этой цели возьмем равенство

$$\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{A^{1-2s}\,G(s)\,\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\,\frac{ds}{x^{1-s}},\quad 0<\beta<1,\quad (31.1)$$

установленное нами в n° 6; тогда, принимая во внимание соотношение

$$\int\limits_0^\infty Y_{r_1,r_2}(ax)\,x^s\,ds=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\,a^{s+1}},$$
$$-1<\operatorname{Re}(s)<\frac{r_2+3}{\chi(\chi-1)}-1,\qquad (31.2)$$

мы убедимся, что

$$\int\limits_0^\infty xY_{r_1,r_2}(ax)\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi A^{1-2s}\,\zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\pi s\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}\,\frac{ds}{a^{s+1}},\quad 0<\beta<1.\qquad (31.3)$$

Применяя функциональное уравнение

$$\zeta_{\Omega}(1-s) = A^{1-2s} G(1-s)\zeta_{\Omega}(s),$$

а затем подстановку $s = 1 - \sigma$, мы приведем интеграл (31.3) к виду:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{\pi \zeta_{\Omega}(1-s)\, ds}{2 \sin \pi s \Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma^{r_2}(s)\, a^{s+1}} =$$

$$= \frac{1}{A^3 a^3} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta_1 - i\infty}^{\beta_1 + i\infty} \frac{\pi A^{1-2\sigma} \zeta_{\Omega}(1-\sigma)\, d\sigma}{2 \sin \pi\sigma \Gamma^{r_1}\left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \Gamma^{r_2}(1-\sigma) \left(\frac{1}{aA^2}\right)^{\sigma+1}},$$

где $0 < \beta_1 < 1$; сравнивая этот результат с формулой (31.3), мы снова получаем найденное нами соотношение:

$$\sqrt{a^3} \int\limits_0^{\infty} x Y_{r_1, r_2}(ax) \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi} \frac{1}{x}\right\} dx =$$

$$= \sqrt{b^3} \int\limits_0^{\infty} x Y_{r_1, r_2}(bx) \left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_{\Omega}(0)}{\pi} \frac{1}{x}\right\} dx, \qquad (31.4)$$

где постоянные числа a и b связаны между собою равенством

$$ab = \frac{1}{A^2}. \qquad (31.5)$$

Как мы отмечали выше, для рационального поля это равенство переходит в одну из формул Рамануджана.

Для мнимого квадратичного поля это соотношение дает равенство

$$\sqrt{a} \int\limits_0^{\infty} \sin ax \left\{\sigma(x) - \frac{1}{\pi x}\right\} dx = \sqrt{b} \int\limits_0^{\infty} \sin bx \left\{\sigma(x) - \frac{1}{\pi x}\right\} dx, \qquad (31.6)$$

где

$$ab = \frac{4\pi^2}{|\Delta|}.$$

Но так как для этого поля оказывается

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-na} = -1 + \frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}} \frac{1}{a} + 2 \int\limits_0^{\infty} \sin ax \sigma(x)\, dx,$$

то равенство (31.6) может быть переписано так:

$$\sqrt{a} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-na}\right\} = \sqrt{b} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) e^{-nb}\right\}, \qquad (31.7)$$

где

$$ab = \frac{4\pi^2}{|\Delta|}.$$

Для вещественного квадратичного поля формула (31.4) переходит в соотношение:

$$\sqrt{a^3} \int\limits_0^{\infty} x J_0(2ax) \sigma(x)\, dx = \sqrt{b^3} \int\limits_0^{\infty} x J_0(2bx) \sigma(x)\, dx, \qquad (31.8)$$

где

$$ab = \frac{\pi^2}{\Delta}.$$

Заметим еще, что формула (31.4) может быть установлена и другим путем, а именно при помощи обобщенного интеграла Пуассона-Лежандра:

$$\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(x)}{\pi x} = \frac{2}{A\pi}\int_0^\infty M_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^2}\right)\left\{\sigma(y) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi y}\right\} dy, \qquad (31.9)$$

где

$$M_{r_1, r_2}\left(\frac{xy}{A^2}\right) = \frac{K_{r_1, r_2}\left(-\frac{ixy}{A^2}\right) - K_{r_1, r_2}\left(\frac{ixy}{A^2}\right)}{2i}.$$

Действительно, из соотношения (31.9) путем интегрирования по параметру найдем, что

$$\int_0^\infty xY_{r_1, r_2}(ax)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\} dx =$$

$$= \frac{2}{A\pi}\int_0^\infty xY_{r_1, r_2}(ax)\,\frac{K_{r_1, r_2}\left(-\frac{ixy}{A^2}\right) - K_{r_1, r_2}\left(\frac{ixy}{A^2}\right)}{2i}\int_0^\infty \left\{\sigma(y) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi y}\right\} dy\, dx;$$

но в n^0 5 нами было доказано, что

$$\int_0^\infty xY_{r_1, r_2}(ax)\,\frac{K_{r_1, r_2}(-ibx) - K_{r_1, r_2}(ibx)}{2i}\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{b}{a^3}\,Y_{r_1, r_2}\left(\frac{b}{a}\right), \; a > 0, \; b > 0,$$

вследствие чего предыдущее равенство принимает вид:

$$\int_0^\infty xY_{r_1, r_2}(ax)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\} dx = \frac{1}{A^3 a^3}\int_0^\infty xY_{r_1, r_2}\left(\frac{y}{aA^2}\right)\left\{\sigma(y) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi y}\right\} dy,$$

откуда уже непосредственно вытекает соотношение (31.4).

Установим еще одно равенство, относящееся к случаю вещественного квадратичного поля.

Для этой цели обратимся к формуле (6.12), которая для случая вещественного квадратичного поля имеет вид:

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-2s}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}\,\frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\,\frac{ds}{x^{1-s}}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Отсюда, принимая во внимание интеграл

$$\int_0^\infty J_0(2ax)\,x^{s-1}\,dx = \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}}{2\pi a^s}, \quad 0 < s < \frac{3}{2},$$

мы найдем, что

$$\int_0^\infty J_0(2ax)\,\sigma(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s}\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta_\Omega(1-s)\frac{ds}{4\left(\frac{\sqrt{\Delta}a}{\pi}\right)^s}, \quad 0<\beta<1. \qquad (31.10)$$

Применяя сначала функциональное уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-s}\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta_\Omega(1-s) = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{s}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta_\Omega(s), \qquad (31.11)$$

а затем вводя подстановку $s = 1-\sigma$, мы приведем интеграл (31.10) к виду:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}a}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-\sigma}\Gamma^2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)\zeta_\Omega(1-\sigma)\frac{d\sigma}{4\left(\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}a}\right)^\sigma}, \quad 0<\beta_1<1. \qquad (31.12)$$

Из формулы (31.10) вытекает искомое интегральное соотношение:

$$\sqrt{a}\int_0^\infty J_0(2ax)\,\sigma(x)\,dx = \sqrt{b}\int_0^\infty J_0(2bx)\,\sigma(x)\,dx, \qquad (31.13)$$

где

$$ab = \frac{\pi^2}{\Delta}.$$

Возьмем теперь сумматорную формулу (I) n° 12 и положим в ней

$$f(x) = K_0(2\,ax), \quad a>0.$$

Тогда, учитывая, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ особенность логарифмического характера, будем иметь:

$$\sum_{n=1}^\infty F(n)\,K_0(2\,na) = -\frac{\pi\zeta'_\Omega(0)}{\sqrt{\Delta}\cdot a} + \pi\int_0^\infty J_0(2ax)\,\sigma(x)\,dx,$$

и формула (31.13) перепишется так:

$$\sqrt{a}\left\{\zeta'_\Omega(0) - \sum_{n=1}^\infty F(n)\,K_0(2na)\right\} = \sqrt{b}\left\{\zeta'_\Omega(0) - \sum_{n=1}^\infty F(n)\,K_0(2nb)\right\}, \qquad (31.14)$$

где

$$ab = \frac{\pi^2}{\Delta}.$$

Нетрудно видеть, что формулы (31.7) и (31.14) представляют собою не что иное, как формулы (4.9) и (4.10), установленные нами другим способом в n° 4.

Возвратимся снова к формуле (31.1) и рассмотрим случай вещественного квадратичного поля; тогда при помощи интегрирования по пара-

метру мы найдем, что

$$\int_0^\infty e^{-2ax}\sigma(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-2s}\frac{\pi\Gamma(s)}{2\sin\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}\,\frac{\zeta_\Omega(1-s)\,ds}{(2a)^s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{\pi\Gamma(1-s)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^2(1-s)}\,\frac{\zeta_\Omega(s)\,ds}{2\cdot(2a)^s},\quad 0<\beta<1. \tag{31.15}$$

Сделаем в последнем интеграле подстановку $s = 1-\sigma$ и примем затем во внимание формулу

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{s-1}}{\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)};$$

тогда правая часть равенства (31.15) примет вид

$$\frac{\pi}{a\sqrt{\Delta}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\right)^{1-2\sigma}\frac{\pi\Gamma(\sigma)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1-\sigma}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\sigma}{2}\right)}\,\frac{\zeta_\Omega(1-\sigma)\,d\sigma}{\left(\frac{2\pi^2}{a\Delta}\right)^\sigma},\quad 0<\beta_1<1,$$

и мы получаем следующее интегральное соотношение:

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-2ax}\sigma(x)\,dx = \sqrt{b}\int_0^\infty e^{-2bx}\sigma(x)\,dx, \tag{31.16}$$

где

$$ab = \frac{\pi^2}{\Delta}.$$

32°. Введем в рассмотрение две функции:

$$\Phi(a) = \int_0^\infty \frac{Y(\bar{\varepsilon}a\sqrt{x}) + Y(\varepsilon a\sqrt{x})}{2}\,\sigma(\sqrt{x})\,dx \tag{32.1}$$

и

$$\Psi(a) = \int_0^\infty \frac{Y(\bar{\varepsilon}a\sqrt{x}) - Y(\varepsilon a\sqrt{x})}{2i}\,\sigma(\sqrt{x})\,dx - \frac{\zeta_\Omega(0)}{A\sqrt{\pi^2}}\,\frac{1}{a^2}, \tag{32.2}$$

где для краткости положено $Y(\alpha x) = Y_{r_1,r_2}(\alpha x)$, и докажем, что между двумя этими функциями существуют зависимости, выражаемые равенствами

$$\Psi(a) - \Phi(a) = \sqrt{\frac{2b^3}{a^3}}\,\Phi(b),\quad a>0,\quad b>0, \tag{32.3}$$

$$\Psi(a) + \Phi(a) = \sqrt{\frac{2b^3}{a^3}}\,\Psi(b),\quad a>0,\quad b>0, \tag{32.4}$$

где числа a и b связаны между собою зависимостью

$$ab = \frac{1}{A^2}. \tag{32.5}$$

Для доказательства формулы (32.3) возьмем известное нам равенство

$$\sigma(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{A^{1-2s} G(s) \zeta_\Omega(1-s)}{2\sin\frac{\pi s}{2}} \frac{ds}{x^{\frac{1-s}{2}}}, \quad \alpha > 1; \qquad (32.6)$$

отсюда на основании интеграла (6.1) мы найдем, что

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{A^{1-2s}\pi\cos\frac{\pi}{4}(s+1)\zeta_\Omega(1-s)}{\sin\pi s\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)} \frac{ds}{a^{s+1}}, \quad \alpha > 1. \qquad (32.7)$$

Равным образом,

$$\Psi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{A^{1-2s}\pi\sin\frac{\pi}{4}(s+1)\zeta_\Omega(1-s)}{\sin\pi s\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)} \frac{ds}{a^{s+1}} - \frac{\zeta_\Omega(0)}{A\sqrt{\pi^{r_1}}}\frac{1}{a^2}, \ \alpha > 1, \ (32.8)$$

и, следовательно,

$$\Psi(a) - \Phi(a) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{A^{1-2s}\sqrt{2}\,\pi\sin\frac{\pi s}{4}\zeta_\Omega(1-s)}{\sin\pi s\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)} \frac{ds}{a^{s+1}} - \frac{\zeta_\Omega(0)}{A\sqrt{\pi^{r_1}}}\frac{1}{a^2}, \quad \alpha > 1. \quad (32.9)$$

Проинтегрируем входящую сюда подинтегральную функцию по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(\beta + iT), \quad D(\beta - iT),$$

где $0 < \beta < 1$; так как внутри этого прямоугольника находится полюс $s = 1$ подинтегральной функции с вычетом, равным

$$\frac{\zeta_\Omega(0)}{A\sqrt{\pi^{r_1}}}\frac{1}{a^2},$$

то в пределе при $T \to +\infty$ мы получим равенство

$$\Psi(a) - \Phi(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{A^{1-2s}\sqrt{2}\,\pi\sin\frac{\pi s}{4}\zeta_\Omega(1-s)\,ds}{\sin\pi s\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\,a^{s+1}}, \quad 0 < \beta < 1. \ (32.10)$$

Пользуясь теперь функциональным уравнением

$$\zeta_\Omega(1-s) = A^{2s-1} G(1-s)\zeta_\Omega(s),$$

а затем подстановкой $s = 1 - \sigma$, мы приведем правую часть равенства (32.10) к виду

$$\frac{\sqrt{2}}{A^3 a^3}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} \frac{A^{1-2\sigma}\pi\cos\frac{\pi}{4}(\sigma+1)\zeta_\Omega(1-\sigma)\,d\sigma}{\sin\pi\sigma\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)\left(\frac{1}{aA^2}\right)^{\sigma+1}}, \qquad (32.11)$$

где $0 < \beta_1 < 1$.

Проинтегрируем подинтегральную функцию в выражении, стоящем здесь справа, по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\beta_1 - iT),\quad B(\beta_1 + iT),\quad C(\alpha_1 + iT),\quad D(\alpha_1 - iT),$$

где $\alpha_1 > 1$; тогда, принимая во внимание, что подинтегральная функция голоморфна внутри этого четырехугольника, мы найдем, что равенство (32.11) приведется к интегралу

$$\frac{\sqrt{2}}{A^3a^3}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1-i\infty}^{\alpha_1+i\infty}\frac{A^{1-2\sigma}\pi\cos\frac{\pi}{4}(\sigma+1)\zeta_\Omega(1-\sigma)}{\sin\pi\sigma\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\Gamma^{r_2}(\sigma)}\frac{d\sigma}{\left(\frac{1}{aA^2}\right)^{\sigma+1}},\quad \alpha_1 > 1.$$

Сравнивая это выражение с формулой (32.7), найдем, что

$$\Psi(a) - \Phi(a) = \frac{\sqrt{2}}{A^3a^3}\Phi\left(\frac{1}{aA^2}\right),$$

откуда уже непосредственно вытекает формула (32.3).

Что касается равенства (32.4), то оно доказывается при помощи аналогичных рассуждений [см. ([2]) и ([3])].

33°. Возвратимся к формуле (31.4) и выведем из нее интегральное представление функции

$$\Xi_\Omega(t) = \xi_\Omega\left(\frac{1}{2} + it\right), \tag{33.1}$$

где

$$\xi_\Omega(s) = A^s\left(\frac{s(s-1)}{2}\right)^{r+1}\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)\zeta_\Omega(s). \tag{33.2}$$

Для этой цели положим в этой формуле

$$a = \frac{nu}{A},\quad b = \frac{1}{nuA}$$

и преобразуем ее к следующему виду:

$$\int\limits_0^1 u^s\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{nu}{A}x\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x}\right\}dx\,du =$$
$$= n^{-3}\int\limits_0^1 u^{s-3}\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{x}{nuA}\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\frac{1}{x}\right\}dx\,du.$$

Заменим в правой части этого равенства переменную u на $\frac{1}{v}$ и промежуток интегрирования по $v(1,\infty)$ разобьем на два интервала (1,0) и $(0,\infty)$; тогда мы можем написать, что

$$\int\limits_0^1 u^s\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{nu}{A}x\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx\,du +$$
$$+ n^{-3}\int\limits_0^1 v^{1-s}\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx\,dv =$$
$$= n^{-3}\int\limits_0^\infty v^{1-s}\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx\,dv. \tag{33.3}$$

Будем считать, что $0<s<1$; тогда правая часть этого равенства, на основании формул

$$\int\limits_0^\infty v^{1-s}\,Y_{r_1,\,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)dv=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(s)}\left(\frac{nA}{x}\right)^{2-s},$$

$$-2-\frac{r_2+3}{\chi(\chi-1)}<s<2, \tag{33.4}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{s-1}\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi x}\right\}dx=\frac{A^{2s-1}}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,G(1-s)\,\zeta_\Omega(s),\quad 0<s<1, \tag{33.5}$$

может быть переписана в таком виде:

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^{s+1}}\,\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\frac{A^{s+1}\zeta_\Omega(s)}{\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)}=$$

$$=\frac{(-1)^{r+1}A}{n^{s+1}\,\pi^{r+r_1}\,2^{2r_1+1}}\,\sin^r\pi s\,\frac{\Gamma^{r_1}\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_1}\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\left[\frac{s(1-s)}{2}\right]^{r_2}}\,\xi_\Omega(s), \tag{33.6}$$

где функция $\xi_\Omega(s)$ определяется формулой (33.2).

Обратимся теперь к преобразованию левой части равенства (33.4).

Функция $Y_{r_1,\,r_2}(z)$ может быть представлена степенным рядом

$$Y_{r_1,\,r_2}(z)=1-\frac{z^2}{\{(2r_2+1)!\}^{r+1}}+\frac{z^4}{\{(3r_2+2)!\}^{r+1}}-\frac{z^6}{\{(4r_2+3)!\}^{r+1}}+\ldots,$$

сходящимся при всех значениях z; поэтому

$$\int\limits_0^1 u^s\,Y_{r_1,\,r_2}\left(\frac{nu\,x}{A}\right)du=\frac{1}{s+1}-\frac{n^2}{A^2}\,\frac{x^2}{\{(2r_2+1)!\}^{r+1}}\,\frac{1}{s+3}+$$

$$+\frac{n^4}{A^4}\,\frac{x^4}{\{(3r_2+2)!\}^{r+1}}\cdot\frac{1}{s+5}-\ldots$$

и, кроме того,

$$\int\limits_0^\infty Y_{r_1,\,r_2}\left(\frac{nu}{A}\,x\right)dx=\frac{\pi}{2\sqrt{\pi^{r_1}}}\,\frac{A}{nu}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 u^s\int\limits_0^\infty x\,Y_{r_1,\,r_2}\left(\frac{nu\,x}{A}\right)\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\,\frac{1}{x}\right\}dx\,du=\frac{\zeta_\Omega(0)}{2\sqrt{\pi^{r_1}}}\,\frac{A}{n}\,\frac{1}{s}+$$

$$+\int\limits_0^\infty\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{n^2}{A^2}\,\frac{x^2}{\{(2r_2+1)!\}^{r+1}}\cdot\frac{1}{s+3}+\right.$$

$$\left.+\frac{n^4}{A^4}\,\frac{x^4}{\{(3r_2+2)!\}^{r+1}}\,\frac{1}{s+5}-\ldots\right\}x\sigma(x)\,dx,$$

и аналогичное равенство может быть написано для второго интегрального члена левой части равенства (33.3).

Положим

$$a = \frac{n}{A}, \quad b = \frac{1}{An},$$

так что

$$ab = \frac{1}{A^2}, \tag{33.7}$$

и умножим обе части равенства (33.3) на $\sqrt{a^3}$; тогда, принимая во внимание сделанные преобразования, мы получим соотношение:

$$\frac{(-1)^{r+1}2^{r_2-2r_1-1}}{\sqrt{A}}\frac{\sin^2 \pi s}{\pi^{r_1+r}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\frac{\Gamma^{r_1}\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma^{r_1}\left(\frac{s-1}{2}\right)}{[s(1-s)]^{r_2}}\xi_\Omega(s) =$$

$$= \Omega_0(a, s) + \Omega_0(b, 1-s), \tag{33.8}$$

где

$$\Omega_0(c, \rho) = \sqrt{c}\,\frac{\zeta_\Omega(0)}{2\sqrt{\pi^{r_1}}}\,\frac{1}{\rho} +$$

$$+ \sqrt{c^3}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\rho+1} - \frac{c^2}{\{(2r_2+1)!\}^{r+1}}\,\frac{x^2}{\rho+3} + \cdots\right\} x\sigma(x)\,dx. \tag{33.9}$$

Для рационального поля это соотношение переходит в формулу, данную Рамануджаном.

Полагая в (33.8)

$$s = \frac{1}{2} + \frac{it}{2},$$

получим:

$$\frac{(-1)^{r+1}2^{3r_2-2r_1-1}}{\sqrt{A}}\frac{\operatorname{ch}^r \frac{\pi t}{2}}{\pi^{r+r_1}}\,\frac{\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}-\frac{it}{4}\right)}{(1+t^2)^{r_2}}\cos\left\{\frac{t}{4}\log\frac{a}{b}\right\}\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \Omega_1(a) + \Omega_1(b), \tag{33.10}$$

где

$$\Omega_1(c) =$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi^{r_1}}}\,\frac{\zeta_\Omega(0)}{1+t^2} + 2\sqrt{c^3}\int_0^\infty \left\{\frac{3}{3^2+t^2} - \frac{c^2}{\{(2r_2+1)!\}^{r+1}}\,\frac{7x^2}{7^2+t^2} + \cdots\right\} x\sigma(x)\,dx. \tag{33.11}$$

Остановимся на частном случае этой формулы, когда

$$a = b = \frac{1}{A}.$$

Выражение, стоящее здесь под знаком интеграла в фигурных скобках, может быть преобразовано в интеграл, для чего достаточно воспользоваться формулой

$$\frac{4k+3}{(4k+3)^2+t^2} = \int_0^\infty e^{-(4k+3)z}\cos tz\,dz, \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

тогда правая часть равенства (33.10) принимает вид:

$$2\,\Omega(a) = \frac{4}{\sqrt{A^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-3z}\cos tz\,xY_{r_1, r_2}\left(\frac{e^{-2z}x}{A}\right)\left\{\sigma(x) + \frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\,\frac{1}{x}\right\}dx\,dz,$$

и мы получаем следующее представление функции $\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)$ в форме интеграла типа Фурье:

$$\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{(-1)^{r+1}\sqrt{A}\,\pi^{r+r_1}\,2^{2r_1-3r_2+3}\,(1+t^2)^{r_2}}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi t}{2}\,\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\Gamma^{r_1}\left(\frac{1}{4}-\frac{it}{4}\right)}\int_0^\infty \Psi(z)\cos tz\,dr, \qquad (33.12)$$

где функция $\Psi(z)$ определяется равенством

$$\Psi(z)=\frac{e^{-3z}}{\sqrt{A^3}}\int_0^\infty x\,Y_{r_1,r_2}\left(e^{-2z}\frac{x}{A}\right)\left\{\sigma(x)+\frac{\zeta_\Omega(0)}{\pi}\,\frac{1}{x}\right\}dx. \qquad (33.13)$$

Обращая интеграл (33.12) по формуле Фурье, получим формулу

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}^r\frac{\pi t}{2}}{(t^2+1)^{r_2}}\left|\Gamma^{r_1}\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2\cos zt\,\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=(-1)^{r+1}\sqrt{A}\,\frac{\pi^{2r_1+r_2}}{2^{3r_2-2r_1-2}}\,\Psi(z), \qquad (33.14)$$

доказанную нами в n° 19 совершенно другим способом.

34°. Возьмем формулу, доказанную нами в n° 29:

$$\sqrt{a}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}(ax)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\,\pi^{r_2}\,\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx=$$

$$=\sqrt{b}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}(bx)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\,\pi^{r_2}\,\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx, \qquad (34.1)$$

где $ab=\frac{1}{A^2}$, и преобразуем ее следующим образом:

$$\int_0^1 u^{s-1}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{nu}{A}\,x\right)F_0(x)\,dx\,du+n^{-1}\int_0^1 v^{-s}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)F_0(x)\,dx\,dv=$$

$$=n^{-1}\int_0^\infty v^{-s}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)F(x)\,dx\,dv, \qquad (34.2)$$

где

$$F_0(x)=\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\,\pi^{r_2}\,\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1.$$

Полагая $0<s<1$, преобразуем сначала правую часть этого равенства. Так как

$$\int_0^\infty v^{-s}X_{r_1,r_2}\left(\frac{xv}{nA}\right)dv=\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\left(\frac{nA}{x}\right)^{1-s}, \quad s<1,$$

и

$$\int_0^\infty x^{s-1}F(x)\,dx=-\frac{\pi}{\sin\pi s}\,\zeta_\Omega(1-s), \quad 0<s<1,$$

то правая часть равенства (34.2) приводится к виду:

$$-\frac{1}{n^s}\frac{\pi}{\sin \pi s} A^{1-s}\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{r_2}(1-s)\,\zeta_\Omega(1-s) = -\frac{1}{n^s}\frac{2^{r+1}}{[s(s-1)]^{r+1}}\frac{\pi}{\sin \pi s}\xi_\Omega(s), \tag{34.3}$$

где функция $\xi_\Omega(s)$ выражается формулой (33.5).

Для преобразования левой части равенства (34.2) удобнее рассмотреть отдельно два случая: 1) рациональное и мнимое квадратичное поле и 2) вещественное квадратичное поле.

В первом случае функция $X_{r_1, r_2}(z)$ разлагается в степенной ряд:

$$X_{r_1, r_2}(z) = 2^{2-\chi}\left\{1 - \frac{z^{r_1+1}}{1!} + \frac{z^{2r_1+2}}{2!} - \frac{z^{3r_1+3}}{3!} + \dots\right\}$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 u^{s-1}\int_0^\infty X_{r_1, r_2}\left(\frac{nux}{A}\right) F_0(x)\,dx\,du =$$

$$=2^{2-\chi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{s} - \left(\frac{n}{A}\right)^{r_1+1}\frac{x^{r_1+1}}{1!}\frac{1}{s+r_1+1} - \left(\frac{n}{A}\right)^{2r_1+2}\frac{x^{2r_1+2}}{2!}\frac{1}{s+2r_1+2} + \dots\right\}F_0(x)\,dx.$$

Подобную форму имеет и второй интегральный член левой части равенства (34.2).

Положим теперь в этом равенстве

$$a = \frac{n}{A} \quad \text{и} \quad b = \frac{1}{nA}$$

и умножим обе его части на $\sqrt{a}$; тогда мы приведем его к виду:

$$\frac{(-1)^r}{\sqrt{A}}\frac{\pi}{\sin \pi s}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\frac{2^{r+1}}{[s(1-s)]^{r+1}}\xi_\Omega(s) = \Omega_1(a, s) + \Omega_1(b, 1-s), \tag{34.4}$$

где функция $\xi_\Omega(s)$ определяется равенством (33.5), а

$$\Omega_1(c_1\rho) = 2^{2-\chi}\sqrt{c}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{\rho} - \frac{c^{r_1+1}}{1!}\frac{x^{r_1+1}}{\rho+r_1+1} + \frac{c^{2r_1+2}}{2!}\frac{x^{2r_1+2}}{\rho+2r_1+2} - \dots\right\}F_0(x)\,dx.$$

Если здесь положить $s = \frac{1}{2} + \frac{it}{2}$, то будем иметь:

$$\frac{(-1)^r 2^{3r+3}}{\sqrt{A}}\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\cos\left(\frac{t}{4}\log\frac{a}{b}\right)\frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{(t^2+1)^{r+1}} = \Omega_2(a) + \Omega_2(b), \tag{34.5}$$

где

$$\Omega_2(c) = 2^{3-\chi}\sqrt{c}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{t^2+1} - \frac{c^{r_1+1}}{1!}\frac{(2r_1+3)\,x^{r_1+1}}{t^2+(2r_1+3)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^{2r_1+2}}{2!}\frac{(4r_1+5)\,x^{2r_1+2}}{t^2+(4r_1+5)^2} - \dots\right\}F_0(x)\,dx.$$

Положим в формуле (34.5)

$$a = b = \frac{1}{A}$$

и примем во внимание, что

$$\frac{2kr_1+2k+1}{(2kr_1+2k+1)^2+t^2}=\int\limits_0^\infty e^{-(2kr_1+2k+1)z}\cos tz\,dz,\qquad k=0,1,2,\ldots;$$

тогда правая часть формулы (34.5) может быть преобразована в интеграл:

$$2\Omega_2(a)=\frac{4}{\sqrt{A}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-z}\cos tz X_{r_1,r_2}\left(\frac{e^{-2z}x}{A}\right)F_0(x)\,dx\,dz,$$

после чего из соотношения (34.5) вытекает следующее интегральное представление функции $\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)$:

$$\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)=\frac{(-1)^r\sqrt{A}}{\pi 2^{3r+1}}\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}\cdot(t^2+1)^{r+1}\int\limits_0^\infty\Psi_1(z)\cos tz\,dz,\tag{34.6}$$

где

$$\Psi_1(z)=\frac{e^{-z}}{\sqrt{A}}\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{e^{-2z}x}{A}\right)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx.\tag{34.7}$$

Обращая интеграл (34.6) по формуле Фурье, найдем, что

$$\int\limits_0^\infty\frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{(t^2+1)^{r+1}}\frac{\cos zt}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\,dt=\frac{(-1)^r}{2^{3r+2}}\sqrt{A}\,\Psi_1(z),\tag{34.8}$$

где функция $\Psi_1(z)$ определяется равенством (34.7).

Так как левая часть равенства (34.8) инвариантна относительно замены z на $-z$, то инвариантна и правая часть, и мы, таким образом, снова приходим к соотношению (34.1).

Если принять во внимание равенства

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(e^{-2z}\frac{x}{A}\right)dx=\sqrt{\pi^{r_1}}\,Ae^{2z}$$

и

$$\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(e^{-2z}\frac{x}{A}\right)\log x\,dx=\sqrt{\pi^{r_1}}\,Ae^{2z}\left\{2z-r_1\frac{C+\log 4}{2}-r_2C+\log A\right\},$$

где C обозначает постоянную Эйлера, то равенство (34.8) может быть переписано в такой форме:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{(t^2+1)^{r+1}}\frac{\cos zt}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^rA\pi^{\frac{r_1}{2}}e^z}{2^{3r+2}}\left\{-E_1+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\left[2z-r_1\frac{C+\log 4}{2}-r_2C+\log A\right]\right\}+$$
$$+\frac{(-1)^re^z}{2^{3r+2}}\int\limits_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{e^{-2z}x}{A}\right)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}\right\}dx.\tag{34.9}$$

Полагая здесь $r=0$, $r_1=1$, $r_2=0$, $A=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, получаем формулу Харди для рационального поля:

$$\int_0^\infty \frac{\Xi\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2+1}\frac{\cos zt}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\,dt=\frac{1}{4}e^z\left\{-2z+\frac{C}{2}+\frac{1}{2}\log 2\pi+\log 2\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^\infty e^{-\pi e^{-4z}x^2}\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}\,dx. \qquad (34.10)$$

Для мнимого квадратичного поля формула (34.9) дает:

$$\int_0^\infty \frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2+1}\frac{\cos zt}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\,dt=\frac{1}{8}e^z\left\{-4z+2C-\zeta'_\Omega(0)+\frac{3}{2}\log\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{4}e^{-z}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{|\Delta|}}e^{-2z}x}\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}\right\}dx. \qquad (34.11)$$

Остается рассмотреть случай вещественного квадратичного поля.

В этом случае функция $X_{r_1,r_2}(z)$ представляется рядом

$$X_{r_1,r_2}(z)=-4\log zI_0(2z)+4\sum_{m=0}^\infty\frac{z^{2m}}{(m!)^2}\Psi(m+1), \qquad (34.12)$$

следовательно,

$$\int_0^1 u^{s-1}\int_0^\infty X_{r_1,r_2}\left(\frac{nux}{A}\right)F_0(x)\,dx=$$

$$=4\int_0^\infty\left\{\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\frac{nx}{A}\right)^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{(s+2m)^2}-\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\frac{nx}{A}\right)^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{s+2m}\log\frac{nx}{A}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=0}^\infty\frac{\left(\frac{nx}{A}\right)^{2m}}{(m!)^2}\frac{\Psi(m+1)}{s+2m}\right\}F_0(x)\,dx.$$

Аналогичную форму имеет и второй интегральный член левой части формулы (34.2).

Полагая здесь, как и в предыдущем случае,

$$a=\frac{n}{A},\quad b=\frac{1}{nA}$$

и умножая затем обе части равенства (34.2) на $\sqrt{a}$, преобразуем это равенство к виду:

$$\frac{(-1)^r}{\sqrt{A}}\frac{\pi}{\sin\pi s}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\frac{2^{r+1}}{[s(1-s)]^{r+1}}\xi_\Omega(s)=\Omega_3(a,s)+\Omega_3(b,1-s), \qquad (34.13)$$

где

$$\Omega_3(c,\rho)=4\sqrt{c}\int_0^\infty\Bigg\{\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{(\rho+2m)^2}-\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\frac{1}{\rho+2m}\log(cx)+$$

$$+\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\frac{\Psi(m+1)}{\rho+2m}\Bigg\}\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx.$$

Полагая здесь, как и раньше, $s=\frac{1}{2}+\frac{it}{2}$, найдем, что

$$\frac{(-1)^r2^{3r+3}}{\sqrt{A}}\frac{\pi}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\cos\left(\frac{t}{4}\log\frac{a}{b}\right)\frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{(t^2+1)^{r+1}}=\Omega_4(a)+\Omega_4(b), \qquad (34.14)$$

где

$$\Omega_4(c)=8\sqrt{c}\int_0^\infty\Bigg\{2\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\frac{(4m+1)^2-t^2}{[(4m+1)^2+t^2]^2}-\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\frac{4m+1}{(4m+1)^2+t^2}\log(cx)+$$

$$+\sum_{m=0}^\infty\frac{(cx)^{2m}}{(m!)^2}\Psi(m+1)\frac{4m+1}{(4m+1)^2+t^2}\Bigg\}\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx. \qquad (34.15)$$

Если здесь положить

$$a=b=\frac{1}{A}$$

и принять во внимание формулы

$$\frac{4m+1}{(4m+1)^2+t^2}=\int_0^\infty e^{-(4m+1)z}\cos tz\,dz, \qquad m=0,1,2,\ldots,$$

$$\frac{(4m+1)^2-t^2}{[(4m+1)^2+t^2]^2}=\int_0^\infty e^{-(4m+1)z}z\cos tz\,dz, \qquad m=0,1,2,\ldots,$$

то правая часть равенства (34.14) приведется к виду:

$$2\Omega_4(a)=\frac{4}{\sqrt{A}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z}\cos tz X_{r_1,r_2}\left(e^{-2z}\frac{x}{2}\right)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}+\frac{2^{r+1}\pi^{r_2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)}{\sqrt{|\Delta|}}\log x-E_1\right\}dx. \qquad (34.16)$$

Таким образом мы видим, что функция $\Omega_4(a)$ для случая вещественного квадратичного поля совпадает с функцией $\Omega_2(a)$ для случая рационального и мнимого квадратичного поля и, следовательно, мы можем уже не различать эти два случая; другими словами, формулы (34.5), (34.8) и (34.9) имеют место и для вещественного квадратичного поля.

Если написать формулу (34.9) для этого поля в развернутом виде, то получим соотношение:

$$\int_0^\infty\frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{(t^2+1)^2}\frac{\cos zt}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}dt=\frac{1}{8}e^z\left\{\frac{1}{2}\zeta''_\Omega(0)-2z\zeta'_\Omega(0)+C\zeta'_\Omega(0)-\right.$$

$$\left.-\log\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\zeta'_\Omega(0)\right\}-\frac{1}{2}e^{-z}\int_0^\infty K_0\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}e^{-2z}x\right)\left\{\frac{\Gamma'_\Omega(x)}{\Gamma_\Omega(x)}+\frac{1}{x}\right\}dx. \qquad (34.17)$$

35°. Выведем еще одно соотношение, аналогичное только что установленным равенствам, взяв за исходную формулу соотношение (31.16):

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-2ax}\sigma(x)\,dx=\sqrt{b}\int_0^\infty e^{-2bx}\sigma(x)\,dx,\qquad ab=\frac{\pi^2}{\Delta},$$

имеющее место для вещественного квадратичного поля.

Напишем это равенство в форме

$$\int_0^1 u^{s-1}\int_0^\infty e^{-2\pi\frac{u}{A}x}\sigma(x)\,dx\,du+\frac{1}{n}\int_0^1 v^{-s}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi v}{A}x}\sigma(x)\,dx\,dv=$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^\infty v^{-s}\int_0^\infty e^{-\frac{2nvx}{A}}\sigma(x)\,dx\,dv \qquad (35.1)$$

и будем считать, что $0<s<1$; тогда правая часть этого соотношения, на основании равенств

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2v}{nA}}v^{-s}\,dv=\Gamma(1-s)\left(\frac{An}{2}\right)^{1-s},\quad s<1,$$
$$\int_0^\infty x^{s-1}\sigma(x)\,dx=\frac{A^{2s-1}}{2\cos\frac{\pi s}{2}}G(1-s)\zeta_\Omega(s),\quad 0<s<1,$$

может быть представлена так:

$$\frac{1}{n^s}\,\frac{2^{s-1}A^s}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right)}\Gamma(1-s)\zeta_\Omega(s)=\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{s(1-s)}\xi_\Omega(s), \qquad (35.2)$$

где функция $\xi_\Omega(s)$ определяется равенством (33.5).

Для преобразования первого члена левой части равенства (35.1) заметим, что

$$\int_0^1 u^{s-1}\int_0^\infty e^{-\frac{2nu}{A}x}\sigma(x)\,dx\,du=$$
$$=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{1!}\,\frac{n}{A}\,\frac{2x}{s+1}+\frac{1}{2!}\,\frac{n^2}{A^2}\,\frac{(2x)^2}{s+2}-\cdots\right\}\sigma(x)\,dx;$$

аналогичное равенство можно написать и для второго члена левой части соотношения (35.1).

Полагая здесь, как и раньше,

$$a=\frac{n}{A},\qquad b=\frac{1}{nA},$$

найдем, что

$$\frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\,\frac{1}{\sqrt{A}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}\frac{\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{s(1-s)}\xi_\Omega(s)=\Omega_5(a,s)+\Omega_5(b,1-s), \qquad (35.3)$$

где

$$\Omega_5(c, \rho) = \sqrt{c}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\rho} - \frac{c}{1!}\frac{2x}{\rho+1} + \frac{c^2}{2!}\frac{(2x)^2}{\rho+2} - \cdots\right\}\sigma(x)\,dx.$$

При $s = \frac{1}{2} + \frac{it}{2}$ это равенство принимает вид:

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{A}}\cos\left(\frac{t}{4}\log\frac{a}{b}\right)\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{it}{4}\right)}{1+t^2}\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right) = \Omega_6(a) + \Omega_6(b), \quad (35.4)$$

где

$$\Omega_6(c) = 2\sqrt{c}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{1+t^2} - \frac{c}{1!}\frac{2x\cdot 3}{3^2+t^2} + \frac{c^2}{2!}\frac{(2x)^2\cdot 5}{5^2+t^2} - \cdots\right\}\sigma(x)\,dx.$$

Положим здесь

$$a = b = \frac{1}{A};$$

тогда правая часть соотношения (35.4) принимает форму интеграла:

$$2\Omega_6(a) = \frac{4}{\sqrt{A}}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z}\cos tz\, e^{-2e^{-2z}\cdot\frac{x}{A}}\sigma(x)\,dx\,dz,$$

после чего мы получаем следующее интегральное представление функции $\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)$, имеющее место для вещественного квадратичного поля:

$$\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{A}(1+t^2)}{\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{4}-\frac{it}{4}\right)}\int_0^\infty \Psi_3(z)\cos tz\,dz, \quad (35.5)$$

где

$$\Psi_3(z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{A}}\int_0^\infty e^{-2e^{-2z}\cdot\frac{x}{A}}\sigma(x)\,dx. \quad (35.6)$$

Обращая интеграл (35.5) по формуле Фурье, найдем, что

$$\int_0^\infty \frac{\Xi_\Omega\left(\frac{t}{2}\right)}{t^2+1}\left|\Gamma\left(-\frac{1}{4}+\frac{it}{4}\right)\right|^2\cos zt\,dt = 2\pi^{\frac{5}{2}}\sqrt{A}\,\Psi_3(z), \quad (35.7)$$

где функция $\Psi_3(z)$ определяется формулой (35.6).

36°. В собрании сочинений Рамануджана встречаются равенства вида

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{n^{13}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{1}{24}$$

и т. п. Эти равенства были обобщены Ватсоном, который доказал, что

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n^{4m+1}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{B_{2m+4}}{8m+4} + \varepsilon_m, \quad (36.1)$$

где $\varepsilon_m = 0$ при $m > 0$ и $\varepsilon_0 = -\frac{1}{8\pi}$.

Покажем, каким образом равенство (36.1) распространяется на квадратичное поле.

Возьмем известную нам формулу

$$\sigma(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)}{2\cos\frac{\pi c}{2}} \frac{ds}{x^s}, \quad \alpha > 1, \tag{36.2}$$

и обозначим через m целое положительное число или нуль.

Выбрав в формуле (36.2) $\alpha > 4m+2$, найдем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, n^{4m+1} \sigma(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, ds, \tag{36.3}$$

причем произведенная здесь перестановка порядков суммирования и интегрирования совершена на законном основании, в чем мы убеждаемся, приняв во внимание абсолютную сходимость как бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{s-4m-1}},$$

так и соответствующего интеграла.

Проинтегрируем функцию, стоящую под знаком интеграла в формуле (36.3), по обводу четырехугольника с вершинами

$$A(\alpha - iT), \quad B(\alpha + iT), \quad C(-\beta + iT), \quad D(-\beta - iT),$$

где

$$\beta = \alpha - 4m - 2.$$

Внутри этого четырехугольника находятся полюсы $s=0$ и $s=4m+2$ подинтегральной функции, причем при $m=0$ внутри этого контура находится еще и полюс $s=1$. Принимая во внимание, что при больших значениях T имеет место оценка

$$\frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}} = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|T|}|T|^{\xi}\right),$$

мы убедимся, что в пределе при $T \to \infty$ интегралы, взятые вдоль отрезков BC и DA, обращаются в нуль, вследствие чего мы приходим к равенству:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, ds =$$

$$= R_0 + R_{4m+2} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\beta - i\infty}^{-\beta + i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\, ds, \tag{36.4}$$

где $m>0$; если же $m=0$, то к сумме вычетов $R_0 + R_{m+2}$ следует еще прибавить вычет R_1 относительно полюса $s=1$.

Преобразуем интеграл, стоящий в формуле (36.4) справа, к новой переменной $\sigma = 4m + 2 - s$; тогда мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\zeta_\Omega(\sigma-4m-1)\,\zeta_\Omega(1-\sigma)}{2\cos\frac{\pi\sigma}{2}}\,d\sigma,$$

вследствие чего равенство (36.4) примет вид:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\zeta_\Omega(1-s)\,\zeta_\Omega(s-4m-1)}{2\cos\frac{\pi s}{2}}\,ds = \frac{1}{2}R_0 + \frac{1}{2}R_{4m+2}, \quad m > 0. \tag{36.5}$$

Принимая во внимание, что

$$R_0 = R_{4m+2} = \frac{2^{r_1-1}}{\sqrt{\pi^{r_1}}}A^{8m-2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{\zeta_\Omega(4m+2)}{G(4m+2)} \tag{36.6}$$

и замечая, что

$$R_1 = -\frac{1}{\pi}\zeta_\Omega^2(0), \tag{36.7}$$

мы из формул (36.3) и (36.5) найдем следующий результат:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\,n^{4m+1}\,\sigma(n) = \frac{2^{r_1-1}}{\sqrt{\pi^{r_1}}}A^{8m+2}\zeta_\Omega^{(r)}(0)\frac{\zeta_\Omega(4m+2)}{G(4m+2)} + \varepsilon_m, \tag{36.8}$$

где

$$\varepsilon_m = 0 \text{ при } m > 0 \text{ и } \varepsilon_0 = -\frac{\zeta_\Omega^2(0)}{2\pi}. \tag{36.9}$$

Для рационального поля, когда

$$r = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad G(4m+2) = -\frac{\sqrt{\pi}\,2^{4m+1}}{(4m+1)!},$$

$$\sigma(x) = \frac{1}{e^{2\pi x}-1}, \quad \zeta(4m+2) = \frac{(2\pi)^{4m+2}B_{2m+1}}{2\cdot(4m+2)!},$$

мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4m+1}}{e^{2\pi n}-1} = \frac{B_{2m+1}}{2\cdot(4m+2)} + \varepsilon_m, \tag{36.10}$$

где

$$\varepsilon_m = 0 \text{ при } m > 0 \text{ и } \varepsilon_0 = -\frac{1}{8\pi},$$

т. е. мы получаем, как частный случай формулы (36.8), равенство Рамануджана-Ватсона.

Для мнимого квадратичного поля, когда

$$r=0, \quad r_1=0, \quad r_2=1, \quad \zeta_\Omega(0)=-1,$$

$$A=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}, \quad G(4m+2)=\infty,$$

мы имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, n^{4m+1} \sigma(n)=0 \text{ при } m>0 \tag{36.11}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)\, n\sigma(n)=-\frac{1}{2\pi}. \tag{36.12}$$

Наконец, для вещественного квадратичного поля, когда

$$r=1, \quad r_1=1, \quad r_2=0, \quad \zeta_\Omega(0)=0,$$

$$A=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}, \quad G(4m+2)=\frac{\pi 2^{8m+2}}{[(4m+1)!]^2},$$

формула (36.8) дает:

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(n)\, n^{4m+1} \sigma(n)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\right)^{8m+2}[(4m+1)!]^2\, \zeta_\Omega'(0)\, \zeta_\Omega(4m+2), \quad m\geqslant 0. \tag{36.13}$$

Поступило
26. I. 1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Кошляков Н. С., О выражении через определенные интегралы квадрата римановой функции $\Xi(t)$, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер. т. II, № 7 (1934), 401—405;

О некоторых сумматорных формулах, имеющих приложения в теории чисел. I, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. III, № 6 (1934), 401—404;

О некоторых сумматорных формулах, имеющих приложения в теории чисел. II, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. III, № 8—9 (1934), 342—556;

Об одной общей сумматорной формуле и ее приложениях, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. IV, № 4 (1934), 187—191;

О выражении через определенный интеграл квадрата функции Римана, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. II, № 3 (1936), 83—86.

[2] Кошляков Н. С. О некоторых тождествах в квадратичных числовых областях, Доклады Ак. наук СССР, нов. сер., т. II, № 9 (1934), 527—531.

[3] Кошляков Н. С., On an extension of some formula of Ramanujan, Proc. London math. Soc., ser. 2, vol. XII, p. I (1936), 26—32.

[4] Кошляков Н. С., Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. I, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 113—144.

[5] Кошляков Н. С., Исследование некоторых вопросов аналитической теории рационального и квадратичного поля. II, Известия Ак. наук СССР, серия матем., 18 (1954), 213—260.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 327—334

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ В ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается существование алгебраических чисел, для которых символы Лежандра по дивизорам, сопряженным с простыми делителями этих чисел, имеют заданные значения, и которые удовлетворяют некоторым другим условиям.

В некоторых задачах теории Галуа играют роль алгебраические числа, которые связаны теми или иными арифметическими соотношениями со своими сопряженными, например, для которых символы Лежандра по сопряженным с ними числам или по простым делителям сопряженных чисел имеют заданные значения.

Задачу подобного типа впервые рассмотрел Н. Г. Чеботарев [см. (1), стр. 164]. Именно он поставил вопрос о существовании примарных главных дивизоров π в нормальном поле K/k, для которых символ Лежандра $\left(\frac{\pi^{\Sigma u}}{\pi}\right)$ имеет наперед заданное значение. Здесь сумма в показателе распространена на все отличные от 1 автоморфизмы u поля K/k, символ Лежандра предполагается простой степени l и корни степени l из 1 содержатся в k.

Н. Г. Чеботарев показал [см. (1), стр. 226—234], что если K есть поле гауссовых чисел и $l=2$, то символ Лежандра $\left(\frac{\pi^u}{\pi}\right)$ для примарного числа π равен 1, и поэтому поставленная им задача не всегда имеет положительное решение. С другой стороны, он показал, что во многих квадратичных полях эта задача разрешима. В дальнейшем мы воспользуемся соображениями, которые применял при этом Н. Г. Чеботарев [см. доказательство формулы (6)].

Задача, которой мы будем заниматься, отличается от задачи Н. Г. Чеботарева. Мы исследуем вопрос о существовании алгебраических чисел α, для которых символ Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^u}\right)$ по дивизорам $\mathfrak{p}^u$, сопряженным с простыми делителями $\mathfrak{p}$ числа α, имеет наперед заданное значение. Мы будем также требовать, чтобы α удовлетворяло некоторым другим условиям. Решение этой задачи необходимо для построения полей с разрешимой группой Галуа.

В дальнейшем будут применяться следующие обозначения: K/k — нормальное поле с группой Галуа F, l — такое простое число, что первообразный корень ζ степени l из 1 содержится в K, причем $\zeta^u = \zeta^{g(u)}$, $u \in F$, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ — дивизоры K, взаимно простые друг с другом и с l.

ТЕОРЕМА. *Как бы ни были заданы корни степеней l из 1 $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и функция $\zeta(u)$ на F со значениями в группе корней степени l из 1, удовлетворяющая условию $\zeta(u^{-1}) = \zeta(u)^{g(u)}$, существует бесконечное количество чисел α поля K, удовлетворяющих условиям:*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}_i}\right) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^u}\right) = \zeta(u) \text{ *для всех простых* } \mathfrak{p} \mid \alpha \text{ и } u \in F,\ u \neq 1. \tag{2}$$

Условие (2) предполагает, что если $\mathfrak{p} \mid \alpha$ и $u \neq 1$, то $\mathfrak{p}^u$ не делит α.

При $l = 2$ мы должны наложить следующие дополнительные ограничения:

1'. $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ взаимно просты с дискриминантом K/k.

2'. Все простые делители двойки в k полностью распадаются в K.

3'. Вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры k остаются вещественными в K.

4'. Если u_i — инволютивные автоморфизмы $(u_i^2 = 1)$, K_{u_i} — принадлежащие им подполя и $\mathfrak{D}_{u_i}$ — дифференты K/K_{u_i}, то из того, что $\mathfrak{D}_{u_1} \ldots \mathfrak{D}_{u_m}$ есть квадрат дивизора K, следует, что

$$\zeta(u_1) \ldots \zeta(u_m) = 1.$$

Доказательство распадается на две части, в зависимости от того, нечетно ли l или $l = 2$.

I случай. Пусть $l \neq 2$. Мы докажем, что α можно выбрать в виде произведения двух простых главных дивизоров абсолютно первого порядка. Для этого построим в K последовательность простых l-гиперпримарных главных дивизоров $\pi_1, \ldots, \pi_t, \ldots$, имеющих абсолютный порядок 1, не делящих l и удовлетворяющих условию:

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{q}_i}\right) = \xi_i^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Показатель $\frac{1}{2}$ имеет здесь смысл ввиду того, что $l \neq 2$.

Указанные условия мы будем предполагать выполненными для всех членов последовательности, в остальном же строим ее рекуррентно, выбирая π_t при построенных $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ так, чтобы было выполнено условие:

$$\left(\frac{\pi_t}{\pi_s^u}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\pi_s^u}\right)^{-1} \zeta(u), \quad s = 1, 2, \ldots, t-1. \tag{4}$$

Условия (3) и (4), наложенные на число π_t, предписывают значения символа Лежандра числа π_t по взаимно простым дивизорам $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$, $(\pi_1), \ldots, (\pi_{t-1})$ [в условии (3) подразумевается, что $(\pi_t, \mathfrak{q}_i) = 1$]. Ввиду обобщенной теоремы об арифметической прогрессии, существует простой главный дивизор π_t, удовлетворяющий всем поставленным нами условиям. Таким образом, мы можем продолжить последовательность $\pi_1, \ldots, \pi_t$ сколь угодно далеко.

Так как для любого числа π выражения $\left(\frac{\pi}{\pi^u}\right)$ могут принимать лишь конечное число значений (не больше, чем l^n, $n = (K:k)$), то при достаточно

большом числе членов в нашей последовательности найдутся два таких числа, скажем, π_s и π_t $(s < t)$, что

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^u}\right) = \left(\frac{\pi_t}{\pi_t^u}\right) \text{ для всех } u \in F, \quad u \neq 1. \tag{5}$$

Докажем, что число $\alpha = \pi_s \pi_t$ удовлетворяет условиям теоремы. Очевидно, что из условия (3) для π_s и π_t следует условие (1) для α. Условие (2) для α имеет теперь вид:

$$\left(\frac{\pi_s \pi_t}{\pi_s^u}\right) = \zeta(u), \quad \left(\frac{\pi_s \pi_t}{\pi_t^u}\right) = \zeta(u).$$

Первое из них выполнено ввиду условия (4), наложенного на π_t. Нам остается доказать, что выполнено и второе условие. Для этого заметим, что

$$\left(\frac{\pi_t}{\pi_s^u}\right) = \left(\frac{\pi^{u^{-1}}}{\pi_s}\right)^{g(u^{-1})} = \left(\frac{\pi_s}{\pi_t^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})}$$

и точно так же, ввиду (5),

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^u}\right) = \left(\frac{\pi_s^{u^{-1}}}{\pi_s}\right)^{g(u^{-1})} = \left(\frac{\pi_s}{\pi_s^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})} = \left(\frac{\pi_t}{\pi_t^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\pi_s \pi_t}{\pi_s^u}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\pi_t^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})} \left(\frac{\pi_t}{\pi_t^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})} = \left(\frac{\pi_s \pi_t}{\pi_t^{u^{-1}}}\right)^{g(u^{-1})} = \zeta(u^{-1})^{g(u^{-1})} = \zeta(u).$$

Таким образом, в этом случае теорема доказана.

II случай. Пусть $l = 2$. К сожалению, в этом случае доказательство значительно более громоздко ввиду того, что мы не можем наложить условие (3) (показатель $\frac{1}{2}$ теряет смысл), а поэтому нельзя считать, что α состоит из двух множителей. Мы покажем, однако, что можно найти нужное нам число α, состоящее из трех множителей. Предположим сначала, что u есть инволютивный автоморфизм: $u^2 = 1$. В этом случае можно найти такое простое гиперпримарное число π, что

$$\left(\frac{\pi}{\pi^u}\right) = \zeta(u).$$

В самом деле, пусть K_u есть подполе элементов, инвариантных относительно u, $K = K_u(\sqrt{\Delta_u})$ и $\mathfrak{D}_u$ — дифферента K/K_u. Докажем, что для любого гиперпримарного тотально-положительного ξ имеет место соотношение:

$$\left(\frac{\xi}{\xi^u}\right) = \left(\frac{\xi}{\mathfrak{D}^u}\right), \text{ если } (\xi, \xi^u) = 1. \tag{6}$$

Пусть $\xi = \alpha + \beta\sqrt{\Delta_u}$. Так как $\xi + \xi^u = 2\alpha$ и ξ^u гиперпримарно, то

$$\left(\frac{\xi}{\xi^u}\right) = \left(\frac{\xi + \xi^u}{\xi^u}\right) = \left(\frac{2\alpha}{\xi^u}\right) = \left(\frac{\alpha}{\xi^u}\right) = \left(\frac{\xi^u}{\alpha}\right).$$

Может случиться, что α имеет общие множители с двойкой. В случае, если числитель символа Лежандра гиперпримарен, а знаменатель имеет общие множители с двойкой, мы будем вычислять символ Лежандра при помощи соотношения:

$$\left(\frac{\nu}{\mathfrak{l}}\right)=1,\ \text{если } \nu \text{ гиперпримарно, } \mathfrak{l}\,|\,2.$$

Как легко видеть, закон взаимности при этом сохраняет свою силу.

Мы имеем, далее:

$$\left(\frac{\xi^u}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha-\beta\sqrt{\Delta_u}}{\alpha}\right)=\left(\frac{-\beta\sqrt{\Delta_u}}{\alpha}\right)=\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\sqrt{\Delta_u}}{\alpha}\right)=\left(\frac{\sqrt{\Delta_u}}{\alpha}\right).$$

По поводу этих равенств мы должны прежде всего заметить, что α взаимно просто с ξ^u, так как $2\alpha=\xi+\xi^u$ и $(\xi, \xi^u)=1$. Во-вторых, символ $\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)$ в поле K равен, ввиду того что $\alpha \in K_u$, символу $\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)$ в поле K_u, т. е. единице. Аналогичным образом имеем:

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta_u}}{\alpha}\right)=\left(\frac{\Delta_u}{\alpha}\right),$$

где левый символ вычисляется в K, а правый — в K_u.

Ввиду условия $2'$, Δ_u должно быть гиперпримарным и тотально-положительным. Таким образом,

$$\left(\frac{\Delta_u}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\Delta_u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta_u}}\right),$$

где последний символ опять вычисляется в K.

Если $\mathfrak{D}_u$ — дифферента K/K_u, то

$$(\sqrt{\Delta_u})=\mathfrak{D}_u\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}\in K_u,$$

$$\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta_u}}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}_u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}_u}\right),$$

так как опять

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right)_K=\left(\frac{\alpha^2}{\mathfrak{C}}\right)_{K_u}=1.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\xi}{\xi^u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}_u}\right).$$

Аналогично проверяем, что

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{D}_u}\right)=\left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{\Delta_u}}{\mathfrak{D}_u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}_u}\right),$$

что и доказывает формулу (6).

Условие $4'$ и обобщенная теорема об арифметической прогрессии гарантирует нам существование таких простых гиперпримарных тотально-положительных π, что

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{D}_u}\right)=\zeta(u)$$

для любого инволютивного автоморфизма. Ввиду формулы (6), получаем:

$$\left(\frac{\pi}{\pi^u}\right) = \zeta(u).$$

Теперь мы переходим к рассмотрению также и неинволютивных автоморфизмов. Пусть $v^2 \neq 1$, т. е. $v \neq v^{-1}$. Предположим, что мы нашли три простых гиперпримарных и тотально-положительных числа π, $\varkappa$ и ρ, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\pi}{\varkappa^v}\right) = 1, && \left(\frac{\pi}{\varkappa^{v^{-1}}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\zeta(v), \\ &\left(\frac{\pi}{\rho^v}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)\zeta(v), && \left(\frac{\pi}{\rho^{v^{-1}}}\right) = 1, \\ &\left(\frac{\varkappa}{\rho^v}\right) = 1, && \left(\frac{\varkappa}{\rho^{v^{-1}}}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)\zeta(v), \\ &\left(\frac{\pi}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho^v}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Докажем, что тогда число $\alpha = \pi\varkappa\rho$ удовлетворяет условиям:

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\alpha}{\varkappa^v}\right) = \left(\frac{\alpha}{\rho^v}\right) = \zeta(v). \tag{8}$$

В самом деле,

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\pi\varkappa\rho}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\pi}{\pi^v}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi^v}\right)\left(\frac{\rho}{\pi^v}\right).$$

Так как

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\varkappa^{v^{-1}}}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{\varkappa^{v^{-1}}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\zeta(v),$$

$$\left(\frac{\rho}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\rho^{v^{-1}}}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{\rho^{v^{-1}}}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{\pi}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right),$$

то

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^v}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\zeta(v) = \zeta(v).$$

Точно так же

$$\left(\frac{\alpha}{\varkappa^v}\right) = \left(\frac{\pi}{\varkappa^v}\right)\left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\left(\frac{\rho}{\varkappa^v}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\varkappa^v}\right)\left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)\zeta(v) = \zeta(v),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\rho^v}\right) = \left(\frac{\pi}{\rho^v}\right)\left(\frac{\varkappa}{\rho^v}\right)\left(\frac{\rho}{\rho^v}\right) = \left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)^2\zeta(v) = \zeta(v).$$

Аналогично проверяется, что

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^{v^{-1}}}\right) = \zeta(v), \quad \left(\frac{\alpha}{\varkappa^{v^{-1}}}\right) = \zeta(v), \quad \left(\frac{\alpha}{\rho^{v^{-1}}}\right) = \zeta(v). \tag{9}$$

Мы проверим только первое равенство:

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^{v^{-1}}}\right) = \left(\frac{\pi}{\pi^{v^{-1}}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi^{v^{-1}}}\right)\left(\frac{\rho}{\pi^{v^{-1}}}\right).$$

Так как

$$\left(\frac{\pi}{\pi^{v^{-1}}}\right)=\left(\frac{\pi^v}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\pi^v}\right)=\left(\frac{\rho}{\rho^v}\right),$$

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi^{v^{-1}}}\right)=\left(\frac{\varkappa^v}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\varkappa^v}\right)=1,$$

$$\left(\frac{\rho}{\pi^{v^{-1}}}\right)=\left(\frac{\rho^v}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\rho^v}\right)=\left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)\zeta(v),$$

то

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^{v^{-1}}}\right)=\left(\frac{\rho}{\rho^v}\right)^2\zeta(v)=1.$$

Разобьем теперь совокупность всех отличных от 1 автоморфизмов K/k на три части. В первую часть, которую мы обозначим через U, соберем все инволютивные автоморфизмы. Неинволютивные автоморфизмы разобьем на две части, отнеся по произволу из каждой пары взаимно обратных автоморфизмов v и v^{-1} один к одной части, а другой автоморфизм — к другой. Эти части обозначим через V и V^{-1}. Таким образом,

$$F=1+U+V+V^{-1}.$$

Теперь, как мы это делали при нечетном l, построим последовательность простых гиперпримарных и тотально-положительных чисел $\pi_1, \ldots$ $\pi \ldots \pi_t, \ldots$. Мы будем считать, что все числа π_t удовлетворяют условиям:

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{q}_i}\right)=\xi_i, \quad i=1, \ldots, r,$$

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{D}_u}\right)=\zeta(u), \quad u\in U.$$

В остальном мы будем строить нашу последовательность рекуррентно по следующему, довольно сложному, правилу. Пусть построены числа $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$. Разобьем их совокупность на две части, которые будем называть первой и второй. Каким именно образом производится разбиение на эти две части, будет указано несколько позже. Теперь выберем π_t так, чтобы, кроме указанных выше условий, оно удовлетворяло еще следующим:

$$\left(\frac{\pi_t}{\pi_s^u}\right)=1, \quad u\in U,$$

$$\left(\frac{\pi_t}{\pi_s^v}\right)=1, \quad \left(\frac{\pi_t}{\pi_s^{v^{-1}}}\right)=\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^v}\right)\zeta(v),$$

если $v\in V$ и π_s принадлежит первой части, и

$$\left(\frac{\pi_t}{\pi_s^v}\right)=\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^v}\right)\zeta(v), \quad \left(\frac{\pi_t}{\pi_s^{v^{-1}}}\right)=1,$$

если $v\in V$, но π_s принадлежит второй части.

Предположим, что мы определили разбиение на первую и вторую части так, что выполнено следующее условие: каково бы ни было натуральное число N, существует такое M, что при любом разбиении последовательности $\pi_1, \ldots, \pi_M$ на N частей хотя бы в одну часть попадут

три числа π_r, π_s, π_t $(r < s < t)$ со следующим свойством: при разбиении последовательности $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ на первую и вторую части π_r и π_s попали в разные части, а при разбиении последовательности $\pi_1, \ldots, \pi_{s-1}$ π_r попало не в ту часть, в которую оно попало при разбиении последовательности $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$. В этом случае наша задача решена.

Действительно, обозначим через ν число элементов множеств v и возьмем 2^ν за N. В качестве разбиения на N частей возьмем разбиение сообразно значениям $\left(\frac{\pi_i}{\pi_i^v}\right)$, $v \in V$, объединяя в одну часть все π_i, для которых все $\left(\frac{\pi_i}{\pi_i^v}\right)$ одинаковы. Пусть π_r, π_s, π_t — числа, удовлетворяющие изложенным выше условиям. Если мы примем их за π, $\varkappa$ и ρ, то условия (7) будут выполнены. Действительно, если при разбиении последовательности $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ на две части π_s принадлежит к первой части, а π_r — ко второй, то условия (7) удовлетворяются, если мы положим $\pi_t = \pi$, $\pi_s = \varkappa$, $\pi_r = \rho$. Если же π_s принадлежит ко второй части, а π_r — к первой, то надо положить $\pi_t = \pi$, $\pi_s = \rho$, $\pi_r = \varkappa$.

Нам остается только указать, как производить разбиение на первую и вторую части. Возможность такого разбиения устанавливается следующей, чисто комбинаторной, леммой.

ЛЕММА. *Для каждого натурального t можно указать такое разбиение чисел $1, 2, \ldots, t-1$ на две части — первую и вторую, — чтобы для любого натурального N существовало M со следующим свойством: при произвольном разбиении чисел $1, 2, \ldots, M$ на N частей хотя бы в одной части найдутся такие три числа r, s и t $(r < s < t)$, что при разбиении чисел $1, 2, \ldots, t-1$ на две части r и s попадают в разные части, а при разбиении $1, 2, \ldots, s-1$ на две части r попадает не в ту часть, в которую оно попадает при разбиении чисел $1, 2, \ldots, t-1$.*

Решение этой задачи заключается в следующем. При разбиении чисел $1, 2, \ldots, t-1$ на две части надо в первую часть относить все числа k, для которых $t-k$ делится на нечетную степень двойки, а остальные — во вторую.

Чтобы доказать, что при этом будет выполняться нужное нам свойство, мы применим теорему Ван дер Вардена об арифметических прогрессиях [см. ([2])] для частного случая прогрессий длины три. Согласно утверждению этой теоремы, для любого N существует такое M, что при любом разбиении чисел $1, 2, \ldots, M$ на N частей хотя бы в одной части найдутся три числа, образующие арифметическую прогрессию. Чтобы вывести из этого утверждения нужный нам результат, нам остается только проверить, что при указанном разбиении на первую и вторую части любые три числа r, s и t, образующие арифметическую прогрессию, будут удовлетворять нашим условиям. Это почти очевидно.

По предположению, $t-s = s-r$. Пусть $t-s$ делится на нечетную степень двойки. Тогда при разбиении чисел $1, 2, \ldots, t-1$ на две части s попадает в первую часть. Так как

$$t-r = (t-s)+(s-r) = 2(t-s),$$

то $t-r$ делится на четную степень двойки, и поэтому r попадает во вторую часть. При разбиении чисел $1, 2, \ldots, s-1$ r попадает, очевидно, в первую часть. Если $t-s$ делится на четную степень двойки, то это рассуждение нужно дословно повторить. Лемма доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, мы видим, что если положить

$$\pi=\pi_t, \quad \varkappa=\pi_s, \quad \rho=\pi_r, \quad \alpha=\pi\varkappa\rho,$$

то для α будут выполняться условия (8) и (9) для любого $v \in V$, т. е. условия (8) для любого неинволютивного автоморфизма v.

Аналогичные условия

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\varkappa^u}\right)=\left(\frac{\alpha}{\rho^u}\right)=\zeta(u) \tag{10}$$

будут выполнены также и для любого инволютивного автоморфизма u. В самом деле, по построению,

$$\left(\frac{\pi_i}{\pi_j^u}\right)=1 \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{D}_u}\right)=\zeta(u),$$

т. е., согласно (6), $\left(\frac{\pi_i}{\pi_i^u}\right)=\zeta(u)$. Таким образом,

$$\left(\frac{\alpha}{\pi^u}\right)=\left(\frac{\pi}{\pi^u}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi^u}\right)\left(\frac{\rho}{\pi^u}\right)=\left(\frac{\pi}{\pi^u}\right)=\zeta(u).$$

Аналогично проверяются два других соотношения (10). Таким образом, для числа α выполнены все условия (2). Но и условия (1) также выполнены, так как, по построению,

$$\left(\frac{\pi}{q_i}\right)=\left(\frac{\varkappa}{q_i}\right)=\left(\frac{\rho}{q_i}\right)=\xi_i \quad \text{и} \quad \left(\frac{\alpha}{q_i}\right)=\xi_i^3=\xi_i.$$

Мы доказали существование одного числа α, удовлетворяющего условиям теоремы. Так как мы можем, однако, при построении выбирать все π_i, а следовательно, и α взаимно простыми с любым наперед заданным модулем, то таких чисел α существует бесконечно много. Теорема доказана.

Заметим, что при построении последовательности простых чисел $\pi_1, \ldots, \pi_t, \ldots$ имеется большой произвол, которым можно в случае необходимости воспользоваться. Например, если задано какое-либо нормальное поле Ω/K, то мы можем выбирать π_t так, чтобы все они принадлежали в Ω к заданному классу автоморфизмов σ:

$$\left[\frac{\Omega}{\pi_t}\right]=\sigma.$$

При этом нужно только, чтобы существовало бесконечное количество простых примарных чисел π, принадлежащих к классу σ в Ω и удовлетворяющих наложенным нами условиям:

$$\left(\frac{\pi}{q_i}\right)=\xi_i^{\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad l \neq 2 \text{ или } \left(\frac{\pi}{q_i}\right)=\xi_i \quad \text{при} \quad l=2.$$

Поступило
11. III. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чеботарев Н. Г., Собрание сочинений, т. 1, М. — Л., 1949.
[2] Хинчин А. Я., Три жемчужины теории чисел, М. — Л., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 335—378

А. И. ЛАПИН

ОБЩИЙ ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ И НОВОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ КЛАССОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит решение следующей задачи *: вывести интегральную теорию полей классов из локально построенной локальной теории полей классов. Основную роль при этом играет закон взаимности, который был сформулирован и доказан в общем виде И. Р. Шафаревичем ([1]). Однако доказательство, данное им, опиралось на теорию полей классов. Существенной частью настоящей работы является элементарное доказательство общего закона взаимности, не использующее теории полей классов.

Введение

Основные определения и обозначения. Пусть k — конечное расширение поля рациональных чисел R, содержащее первообразный корень l^n-й степени из единицы ζ, где l — нечетное простое число. Пусть, далее, $\mathfrak{p}$ — простой идеал из k, не делящий l, и $k_\mathfrak{p}$ — поле классов вычетов идеала $\mathfrak{p}$. Оно содержит ζ, и в нем ζ также является первообразным корнем степени l^n из единицы. Мультипликативная группа $k_\mathfrak{p}^*$ классов вычетов по модулю $\mathfrak{p}$ — циклическая (ω) порядка $N\mathfrak{p}-1$, и ω^{l^n} порождает в ней ее единственную подгруппу H порядка $\frac{N\mathfrak{p}-1}{l^n}$. Соответствие, относящее каждому классу $\mathfrak{K}$ из $k_\mathfrak{p}^\times$ класс $\mathfrak{K}H$, есть гомоморфизм $k_\mathfrak{p}^\times$ на подгруппу, порожденную ζ. Если α — число из k, не делящееся на $\mathfrak{p}$, и $\mathfrak{K}$ — класс вычетов по модулю $\mathfrak{p}$, содержащий α, то та степень ζ, на которую отображается $\mathfrak{K}$ при этом гомоморфизме, обозначается через $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ и называется символом Лежандра l^n-й степени. Из этого определения следует формула:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\equiv\alpha^{\frac{N\mathfrak{p}-1}{l^n}}\ (\mathrm{mod}\,\mathfrak{p}),$$

где $N\mathfrak{p}$ берется в k/R (R — поле рациональных чисел).

Если $\mathfrak{p}\mid l$, то, по определению, $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)=1$. Наконец, если $\mathfrak{a}=\prod_\mathfrak{p}\mathfrak{p}^{e_\mathfrak{p}}$, то положим

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)=\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)^{e_\mathfrak{p}}.$$

* Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность И. Р. Шафаревичу указавшему мне на эту проблему, за ценные советы и замечания, которыми я воспользовался при написании этой работы.

Из этих определений непосредственно следует, что:

1. если α и β взаимно просты с $\mathfrak{m}$ и l, то $\left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{m}}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right)\left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right)$.

2. Если $\alpha\equiv\beta\pmod{\mathfrak{m}}$, то $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right)=\left(\frac{\beta}{\mathfrak{m}}\right)$.

3. Необходимым и достаточным условием того, чтобы простой идеал $\mathfrak{p}$ из k, не делящий l, полностью разлагался в $k(\sqrt[l^n]{\alpha})$, где α просто с l и $\mathfrak{p}$, является равенство единице символа Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$.

Кроме того, имеют место следующие свойства этого символа:

4. $$\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)=\zeta^{\frac{S(\lg\alpha)}{l^n}},$$

причем след берется в $k(\mathfrak{l})/R_0$, где R_0 — поле рациональных l-адических чисел, а $k(\mathfrak{l})$ — кольцо $\mathfrak{l}$-адических чисел над K; $\mathfrak{l}=(1-\zeta)$.

Пусть K — нормальное расширение k и $\mathfrak{a}=N_{K/k}(\mathfrak{A})$, $\alpha=N_{K/k}(A)$. Тогда

5. $$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_k=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{A}}\right)_K, \tag{1}$$

6. $$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_k=\left(\frac{A}{\mathfrak{a}}\right)_K, \tag{2}$$

причем в обоих последних равенствах символ Лежандра слева берется в k, а справа — в K.

Обозначим отношение символов Лежандра $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}$ через $[\alpha,\beta]$. Из двух последних свойств следует, что если $\alpha=N_{K/k}(A)$, то

$$[\alpha,\beta]_k=[A,\beta]_K. \tag{3}$$

7. Эйзенштейновский закон взаимности: для любого рационального числа a и семипримарного числа $\beta\in k$ имеет место равенство:

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)=\left(\frac{\beta}{a}\right).$$

Очень простое и элементарное доказательство см. в (²).

Определение. Пусть k — произвольное поле алгебраических чисел, содержащее не равный единице корень l-й степени из 1, и $\mu\neq1$, $\nu\neq1$ — два числа из k. Для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$ из k определим символ $\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)$ следующим образом:

Если $\mathfrak{p}\mid l$, то

$$\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=(\mu,\nu)_{\mathfrak{p}},$$

где $(\mu,\nu)_{\mathfrak{p}}$ — символ Шафаревича.

Если $\mathfrak{p}\nmid l$ и μ делится точно на $\mathfrak{p}^a$, а ν — на $\mathfrak{p}^b$, то

$$\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\mu^b,\nu^{-a}}{\mathfrak{p}}\right).$$

ТЕОРЕМА. *Символ* $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right)$ *обладает следующими свойствами:*

1. $\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right)$ *есть невырожденная, кососимметрическая билинейная форма переменных* μ, ν.

2. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы* ν *было норменным вычетом в* k_μ, *т. е. удовлетворяло сравнению*

$$\nu \equiv N_\mu A(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}),$$

где A — *надлежащее число из* k_μ, *а* $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ *есть та степень идеала* $\mathfrak{p}$, *в которой* $\mathfrak{p}$ *входит в ведущий идеал* $\mathfrak{f}$ *расширения* k_μ / k, *является равенство единице символа* $\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)$.

Доказательство. Для $\mathfrak{p} \mid l$ эти свойства следуют из аналогичных свойств символа Шафаревича (μ, ν), а для $\mathfrak{p} \nmid l$ доказательство их, очень элементарное, приведено в работе ([3]).

3. *Если* K — *абелево расширение* k *показателя* l *и* $\nu = N_{K(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{p})}(B)$, *где* B — *число из* K, $k(\mathfrak{p})$ — $\mathfrak{p}$-*адическое замыкание* k *и* $K(\mathfrak{p})$ — *кольцо* $\mathfrak{p}$-*адических чисел над* K, то

$$\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} \left(\frac{\mu, B}{\mathfrak{P}}\right)_{K(\mathfrak{P})}, \tag{4}$$

где произведение берется по всем простым делителям $\mathfrak{p}$ *из* K.

Доказательство. Для $\mathfrak{p} \mid l$ эта формула была доказана в работе автора ([4]), а для $\mathfrak{p} \nmid l$ доказательство ее, очень элементарное, приведено в работе ([5]).

§ 1. Группы чисел и группы идеалов. Сингулярные примарные числа

Пусть G — конечная абелева группа и l — рациональное простое число. l-рангом $r = r(G)$ группы G называется число базисных элементов G, порядок которых есть степень l. Если G^l — подгруппа l-х степеней всех элементов из G, а G_l — подгруппа тех элементов из G, l-я степень которых равна 1, то $G/G^l \simeq G_l$ и имеет l-членный тип $(l, \ldots, l)$. В частности,

$$(G : G^l) = (G_l : 1) = l^r.$$

Группу G/G^l классов по подгруппе G^l назовем группой соединений, а ее единичный элемент — главным соединением. Если $c_1, \ldots, c_r$ — r независимых соединений и $g_i \in c_i$ — элементы из G, то каждый элемент $g \in G$ может быть представлен в виде

$$g = g_1^{x_1} \cdots g_r^{x_r} \bar{g}^l \quad (0 \leqslant x_i < l;\ i = 1, 2, \ldots, r), \tag{1}$$

где $\bar{g}$ — надлежащим образом выбранный элемент из G.

Пусть k — конечное расширение поля рациональных чисел R, содержащее $\neq 1$ корень l-й степени из единицы ζ. Если $(k : R(\zeta)) = m$, то

$$(k : R) = m(l - 1) = 2m'.$$

Определим в k те группы, соединения и связанные с ними константы, которые потребуются нам в дальнейшем:

1°. Группа E единиц из k. Ее ранг $r(E)$ равен m'.

2°. Группа H_0 классов идеалов поля k. Ее ранг $r(H_0)$ обозначим через e.

Если $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ — идеалы, лежащие в независимых соединениях, то, согласно (1), всякий идеал может быть представлен в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_e} \mathfrak{r}^l (\alpha), \quad 0 \leqslant w_i < l,$$

что коротко будем записывать:

$$(\alpha) = \mathfrak{a}[\mathfrak{r}].$$

3°. Группа $\mathscr{E}$ сингулярных чисел, т. е. чисел, являющихся l-ми степенями идеалов. Ранг ее $r(\mathscr{E})$ равен $m' + e$. Действительно, по n^0 2 и ранее сказанному, существует e идеалов $\mathfrak{r}_1^*, \ldots, \mathfrak{r}_e^*$, лежащих в независимых классах, l-е степени которых равны единичному классу: $\mathfrak{r}_i^* = (\rho_i)$. e чисел $\rho_1, \ldots, \rho_e$ вместе с m' единицами базиса группы E определяют $m' + e$ независимых соединений сингулярных чисел. Если $\mathscr{E} / E = \Xi$, то $r(\Xi) = e$.

4°. Группа классов вычетов mod $\mathfrak{f}$, взаимно простых с $\mathfrak{f}$, где

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{l}^l \mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_t,$$

$\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$, а $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$ — не делящие l простые идеалы из k. Обозначим ее ранг через n.

ЛЕММА 1. $n = 2m' + t$.

Доказательство. Так как группа классов вычетов mod $\mathfrak{F}$, взаимно простых с $\mathfrak{f}$, есть прямая сумма групп классов вычетов mod $\mathfrak{l}^l$, простых с $\mathfrak{l}$, и групп классов вычетов mod $\mathfrak{p}_i$, простых с $\mathfrak{p}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$, то n равно сумме рангов этих групп. Вычислим ранг первой группы. Пусть $(1 - \zeta) = \mathfrak{l}$ разлагается в k по закону

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z}. \tag{2}$$

Сравнение

$$\xi^l = 1 \pmod{\mathfrak{l}^l}$$

эквивалентно z сравнениям

$$\xi^l \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}^{l e_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, z)$$

и, значит, z сравнениям

$$(\xi - 1)(\xi - \zeta) \ldots (\xi - \zeta^{l-1}) \equiv 0 (\mathfrak{l}_i^{l e_i}) \quad (i = 1, 2, \ldots, z). \tag{3}$$

Из сравнения (3) следует, что хоть один множитель левой части этого сравнения, например, $\xi - \zeta^a$, делится на $\mathfrak{l}_i^{e_i}$:

$$\xi - \zeta^a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}_i^{e_i}},$$

а значит, и

$$\xi - 1 = \xi - \zeta^a + \zeta^a - 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{l}_i^{l_i}}.$$

Это сравнение имеет место для всех $i=1,2,\ldots,z$, поэтому

$$\xi \equiv 1 \pmod{\mathfrak{l}}, \quad \xi = 1+\lambda\omega \quad (\lambda = 1-\zeta)$$

с целым ω, а среди этих чисел будет ровно

$$(N\mathfrak{l}^{l-1}) = l^{m(l-1)} = l^{2m}$$

не сравнимых $\operatorname{mod} \mathfrak{l}^l$ и, таким образом, ранг этой группы равен $2m'$.

С другой стороны, ранг группы классов вычетов $\operatorname{mod} \mathfrak{p}_i$, взаимно простых с $\mathfrak{p}_i$, равен 1, так как эта группа — циклическая, порядка $N\mathfrak{p}_i - 1 \equiv O(l)$. Соединяя все сказанное, получаем утверждение леммы 1.

Пусть μ — число из k, взаимно простое с l и не являющееся l-й степенью никакого числа из k, и $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ — куммерово поле.

Если $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ — простые идеалы, входящие в μ в степенях, не кратных l, то идеал $\mathfrak{f}$, определенный в 4°, будем называть ведущим идеалом расширения K/k, за исключением того случая, когда K/k не разветвлено. В этом случае ведущий идеал, по определению, будем считать равным 1.

5°. Группой комплексов поля K назовем факторгруппу группы классов идеалов поля K по подгруппе классов идеалов поля k; единичный элемент 1 этой группы назовем главным комплексом. Комплекс P, для которого $P^{1-\sigma}=1$, где σ — образующий автоморфизм расширения K/k, называется инвариантным. Если $\mathfrak{A}$ — произвольный идеал из P, то, очевидно,

$$\mathfrak{A}^{1-\sigma} = A\mathfrak{j},$$

где A — число из K, а $\mathfrak{j}$ — идеал из k. Пусть $\mathfrak{A}^*$ — группа инвариантных комплексов, образованных инвариантными идеалами, и $\mathfrak{A}$ — группа всех инвариантных комплексов. Обозначим их ранги соответственно через a^* и a.

6°. Обозначим через Ξ^* подгруппу тех идеалов из Ξ, которые в K будут l-ми степенями главных идеалов; ранг ее $r(\Xi^*)$ обозначим через e^*. Далее, через Ξ_* обозначим подгруппу тех идеалов из Ξ, которые являются нормами главных идеалов из K. Имеем:

$$\Xi^* \leqslant \Xi_*.$$

Действительно, если $(\varepsilon^*) = \mathfrak{a}^l = (A^l) = (A)^l$, то $\mathfrak{a} = (A)$ и тогда $\varepsilon^* = \mathfrak{a}^l = (NA)$.

7°. Пусть $\mathfrak{V}^*$ будет группой тех единиц из E, которые являются нормами единиц поля K, а $\mathfrak{V}$ — группой тех единиц из E, которые являются нормами целых или дробных чисел поля K. Обозначим через v^* и v их ранги. Имеет место

ЛЕММА 2. *Если t — число простых делителей дискриминанта K/k, а e, e^*, m', a, a^*, v, v^* имеют значения, указанные в 1° — 7°, то*

$$a^* \leqslant t + v^* - m' - 1 + e^*, \tag{4}$$

$$a \leqslant t + v - m' - 1 + e. \tag{5}$$

Здесь мы докажем только неравенство (4). Неравенство (5) будет доказано позже.

Доказательство неравенства (4). При доказательстве этого неравенства мы будем пользоваться следующей, легко доказываемой леммой.

ЛЕММА (Гильберта). *В поле* $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ *существует* m' *единиц* $E_1, \ldots, E_{m'}$ *таких, что.*

1. *Каждая единица* E *из* K *может быть представлена в виде*:

$$E = E_1^{f_1(\sigma)} \ldots E_{m'}^{f_{m'}(\sigma)} \overline{E}^l [\varepsilon],$$

где $f_i(\sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, m'$,— *многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени не выше* $l - 2$, *а* $[\varepsilon]$ *означает такую единицу из* K, l-*я степень которой есть единица в* k.

2. *Для любой единицы* E *из* K *из равенства*

$$E^{1-\sigma} = E_1^{f_1(\sigma)} \ldots E_{m'}^{f_{m'}(\sigma)} [\varepsilon]$$

следуют сравнения

$$f_i(\sigma) \equiv 0 \ (1 - \sigma), \quad i = 1, 2, \ldots, m'.$$

Доказательство этой леммы см., например, в ([3]).

Из этой леммы, в частности, следует, что любая единица $\eta \in \mathfrak{B}^*$ представляется в виде

$$\eta = \eta_1^{a_1} \ldots \eta_{m'}^{a_{m'}} [\varepsilon]^l,$$

где

$$\eta_i = N_{K/k}(E_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m'.$$

Переходим к доказательству неравенства (4). Пусть сначала $\mu \neq \alpha^l \varepsilon$, где $\alpha \in k$, а ε — единица из k. Так как среди единиц $\eta_1, \ldots, \eta_{m'}$, по n^0. 7, имеется v^* независимых $\eta_1, \ldots, \eta_{v^*}$, то имеем $m' - v^*$ очевидных равенств:

$$\eta_i = \eta_1^{a_{i1}} \ldots \eta_{v^*}^{a_{iv^*}} \bar{\eta}_i^l, \quad i = v^* + 1, \ldots, m'.$$

Из этих равенств следует, что $m' - v^*$ единиц E_i'

$$E_i' = E_i E^{-a_{i1}} \ldots E_{v^*}^{-a_{iv^*}} \bar{\eta}_i^{-1}, \ \ i = v^* + 1, \ldots, m', \tag{6}$$

удовлетворяют условиям

$$N_{K/k}(E_i') = 1, \quad i = v^* + 1, \ldots, m',$$

откуда, по теореме Гильберта, получаем:

$$E_i' = M_i^{1-\sigma},$$

где M_i, $i = v^* + 1, \ldots, m'$,— надлежащие числа из K. Числа $M_{v^*+1}, \ldots$ $\ldots, M_{m'}$ независимы. Действительно, если бы между ними существовало соотношение

$$M_{v^*+1}^{x_{v^*+1}} \ldots M_{m'}^{x_{m'}} = A^l,$$

где A — число из K, то отсюда следовало бы, что

$$A^{l(1-\sigma)} = E'^{x_{v^*+1}}_{v^*+1} \dots E'^{x_{m'}}_{m'} = E_1^{x_1} \dots E_{v^*}^{x_{v^*}} E_{v^*+1}^{x_{v^*+1}} \dots E_{m'}^{x_{m'}},$$

где

$$x_j = -\sum_{i=v^*+1}^{m'} a_{ij} x_i, \quad j = 1, 2, \dots, v^*,$$

и, значит,

$$x_{v^*+1} \equiv \dots \equiv x_{m'} \equiv 0 \ (l).$$

Из равенств (6) следует, что

$$(M_i)^{1-\sigma} = (1),$$

откуда $(M_i) = D_i \mathfrak{m}_i$, где D_i — инвариантный идеал из K, а $\mathfrak{m}_i$ — идеал из k.

Рассмотрим группу, порожденную всеми M_i. Все входящие в нее числа имеют вид $D\mathfrak{m}$, указанный выше. Ранг подгруппы тех чисел, для которых $D = 1$, обозначим через e'. Имеем:

$$e' \leqslant e^*.$$

В самом деле, для чисел этой подгруппы $(M) = \mathfrak{m}$, т. е. $(NM) = \mathfrak{m}^l$ и $(M)^l = \mathfrak{m}^l$, а это и значит, что они принадлежат к Ξ^*.

Пусть $M_1^*, \dots, M_{e'}^*$ — базис этой группы, а M_i^{**}, $i = 1, \dots, m' - v' - e'$, порождает базис факторгруппы по ней. Положим

$$(M_i^{**}) = \mathfrak{D}_1^{b_{i1}} \dots \mathfrak{D}_t^{b_{it}} \mathfrak{m}_i. \tag{7}$$

В группе, порожденной $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$, каждое из соотношений (7) дает идеал, лежащий в главном комплексе. Ввиду выбора M_i^{**} все эти идеалы независимы. Число их равно

$$m' - v^* - e' \geqslant m' - v^* - e^*.$$

В силу сделанного ограничения на μ, правая часть соотношения

$$\sqrt[l]{\mu} = \mathfrak{D}_1^{b_1} \dots \mathfrak{D}_t^{a_t} \mathfrak{m} \tag{8}$$

от них тоже независима. Таким образом, в группе, порожденной $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_t$, есть по крайней мере

$$m' - v^* - e^* + 1$$

независимых идеалов, лежащих в главном комплексе. Всякий инвариантный идеал имеет вид $\mathfrak{D}_1^{b_1} \dots \mathfrak{D}_t^{b_t} \mathfrak{m}$, т. е. лежит в том же комплексе, что и $\mathfrak{D}_1^{b_1} \dots \mathfrak{D}_t^{b_t}$. Ввиду только что доказанного,

$$a^* \leqslant t - (m' - v^* - e^* + 1) = t - m' + v^* + e' - 1 \leqslant t - m' + v^* + e^* - 1.$$

Этим неравенство (4) доказано для случая $\mu \neq \alpha^l \varepsilon$. В случае, когда $\mu = \alpha^l \varepsilon$, где ε — единица из k, соотношение (8) отсутствует, зато единиц E_i' будет не $m' - v^*$, а $m' - v^* + 1$, так как ε есть норма единицы в K и не содержится среди единиц η_i.

8°. **Группа родов.** Пусть $\mathfrak{f}$ — ведущий идеал куммерова поля $K = k(\sqrt[l]{\mu})$. Назовем *главным родом* группу идеалов $\mathfrak{A}$ из K, взаимно простых с $\mathfrak{f}$, относительные нормы которых в k лежат в главном соединении:

$$M\mathfrak{A}\mathfrak{j}^l = (\alpha) \text{ и } \alpha \equiv N(A)(\mathfrak{f})$$

для некоторого числа A из K. Очевидно, что все главные идеалы из K, а также идеалы из k в K будут принадлежать главному роду и, следовательно, вместе с идеалом $\mathfrak{A}$ к главному роду принадлежит и весь комплекс, в котором лежит $\mathfrak{A}$. Группу родов естественно определить как факторгруппу мультипликативной группы $\neq 0$ идеалов из K по подгруппе идеалов главного рода. Для исследования группы родов мы введем в рассмотрение особую систему характеров группы комплексов поля K, которые обращаются в 1 на главном роде и являются, следовательно, характерами группы родов.

Пусть $\mathfrak{N}$ — идеал из K. Так как род идеала $\mathfrak{N}$ из K определяется его нормой, то естественно определить эти характеры на группе идеалов из k, положив

$$\chi(\mathfrak{N}) = \chi(N_{K/k}(\mathfrak{N})).$$

Если $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ выбраны, как указано в n° 2, то из идеала $\mathfrak{n} = N_{K/k}(\mathfrak{N})$ можно получить главный идеал по формуле

$$(\nu) = \mathfrak{n}\mathfrak{r}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_e}\mathfrak{c}^{-l}. \tag{9}$$

Если идеал $\mathfrak{n}$ есть норма идеала $\mathfrak{N}$ из K, то для того чтобы $\mathfrak{N}$ принадлежал главному роду, необходимо, прежде всего, чтобы $\mathfrak{n}$ лежал в главном соединении, т. е. чтобы $w_i \equiv 0\,(l)$ для $i = 1, 2, \ldots, e$. Естественно, поэтому, ввести e характеров ψ_i, $i = 1, 2, \ldots, e$, равенствами:

$$\psi_i(\mathfrak{N}) = \zeta^{w_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, e.$$

Пусть теперь все $\psi_i(\mathfrak{N}) = 1$. Для того чтобы идеал $\mathfrak{N}$ в этом случае лежал в главном роде, необходимо и достаточно, чтобы ν для некоторого A из K удовлетворяло сравнению

$$\nu \equiv N_{K/k}(A) \pmod{\mathfrak{f}},$$

что, в свою очередь, согласно свойству 2 символа $\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{p}}\right)$ из введения, эквивалентно равенству

$$\left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{d}_i}\right) = 1$$

для всех простых идеалов $\mathfrak{d}$, делящих $\mathfrak{f}$.

Функции

$$\varphi_i(\mathfrak{N}) = \left(\frac{\nu,\, \mu}{\mathfrak{d}_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, t,$$

где $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_t$ — все простые делители $\mathfrak{f}$, не являются, однако, характерами на группе идеалов, так как число ν, как сразу видно из равенства

(9), определяется идеалом $\mathfrak{N}$ только с точностью до произвольного сингулярного числа. Исследуем, как изменяются характеры

$$\varphi_i(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right),$$

когда ε пробегает группу соединений сингулярных чисел. Пусть между характерами φ_i r^* характеров $\varphi_t, \varphi_{t-1}, \ldots, \varphi_{t-r^*+1}$ независимы, а остальные $t-r^*$ характеров $\varphi_1, \ldots, \varphi_{t-r^*}$ будут их линейными комбинациями. Для любых r^* корней l-й степени из единицы $\zeta_t, \ldots, \zeta_{t-r^*+1}$ найдется тогда такое сингулярное число ε, для которого

$$\varphi_i(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right)=\zeta_i, \quad i=t, t-1, \ldots, t-r^*+1.$$

Значение же характеров $\varphi_i(\varepsilon)$, $i=1, 2, \ldots, t-r^*$, однозначно определяется заданием $\varphi_i(\varepsilon)$ для $i=t, \ldots, t-r^*+1$. Теперь мы можем определить недостающие характеры группы комплексов следующим образом. Подберем ν в равенстве (9) так, чтобы $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right)=1$ для $i=t, \ldots, t-r^*+1$; тогда

$$\chi_i(\mathfrak{N})=\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right), \quad i=1, 2, \ldots, r^*, \tag{10}$$

будут однозначно определенными характерами группы соединений идеалов из k. Согласно предыдущему, $\mathfrak{N}$ тогда и только тогда принадлежит главному роду, когда все $\chi_i(\mathfrak{N})$, $i=1, 2, \ldots, r^*$, и все $\psi_i(\mathfrak{N})$, $i=1, 2, \ldots, e$ равны 1.

Так как

$$\varphi_i(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right), \quad i=t, \ldots, t-r^*+1,$$

независимы, то можно подобрать к ним взаимный базис $\{\varepsilon_i\}$ так, чтобы

$$\left(\frac{\varepsilon_i,\,\mu}{\mathfrak{d}_j}\right)=\zeta^{\tau_{ij}}, \tag{11}$$

где τ_{ij} определены из условия:

$$\tau_{ij}\begin{cases}=0 & \text{для } i\neq j,\\ \neq 0 & \text{для } i=j.\end{cases} \tag{11'}$$

Группа соединений сингулярных чисел разложится в прямую сумму подгруппы, порожденной $\{\varepsilon_i\}$, и подгруппы тех чисел ε, для которых $\left(\frac{\varepsilon,\,\mu}{\mathfrak{d}_i}\right)=1$ при $i=1, 2, \ldots, t$. Базис $\{\varepsilon_i\}$ мы выберем так, чтобы среди чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r^*}$ было максимально возможное число единиц. Заметим, что введенные характеры зависят от выбора $\mathfrak{x}_i$, $i=1, 2, \ldots, e$.

Обозначим через g ранг группы родов и пусть $r=t-r^*+e$. Так как r характеров χ_i, ψ_j, $i=1, 2, \ldots, t-r^*$; $j=1, 2, \ldots, e$, обращаются в 1 только на главном роде, то

$$g\leqslant r. \tag{12}$$

Теперь мы в состоянии доказать неравенство (5).

Доказательство неравенства (5). Имеем:

$$r(\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{A}^*) + r(\mathfrak{A}/\mathfrak{a}^*) = r(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*) + \mathfrak{a} \tag{13}$$

Определим $r(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*)$. Пусть θ — единица из k, являющаяс. .ормой числа из k:

$$\theta = N_{K/k}(\Theta).$$

Так как θ — единица, то

$$\Theta = \mathfrak{A}^{1-\sigma},$$

где $\mathfrak{A}$ — идеал из K, принадлежащий инвариантному комплексу P. Отображение

$$\theta\mathfrak{V}^* \to \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^*$$

есть изоморфизм группы V/V^* с некоторой подгруппой $\mathfrak{T}$ группы $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^*$. Для доказательства этого мы должны проверить, что

1) $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ не зависит от выбора Θ и $\mathfrak{A}$,

2) не зависит от выбора θ внутри θV^* и

3) если $\theta V^* \to \mathfrak{A}^*$, то $\theta \in V^*$.

1. Пусть Θ' — другое число, для которого

$$\theta = N_{K/k}(\Theta') = N_{K/k}(\Theta);$$

тогда $\Theta' = \Theta A^{1-\sigma}$, где A — число из K. Поэтому

$$(\Theta') = (A^{1-\sigma}\Theta) = (A\mathfrak{A})^{1-\sigma} = \mathfrak{A}'^{1-\sigma}$$

и, значит,

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}DA\mathfrak{j},$$

где D — инвариантный идеал, а $\mathfrak{j}$ — идеал из k, т. е.

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}DA\mathfrak{j}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*.$$

2. Пусть $\theta' = \theta N_{K/k}(E)$ — другая единица из $\theta\mathfrak{V}^*$, тогда

$$\theta' = N\Theta' = \theta N(E) = N(\Theta E)$$

и, значит,

$$\Theta' = \Theta E A^{1-\sigma} \text{ и } \mathfrak{A}'^{1-\sigma} = (\Theta') = (\Theta A^{1-\sigma}) = (\mathfrak{A}A)^{1-\sigma},$$

т. е.

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}AD\mathfrak{j} \text{ и } \mathfrak{A}'\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*.$$

3. Если $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}^*$, т. е. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{A}^*$, то

$$\mathfrak{A} = DA\mathfrak{j},\ (\Theta) = \mathfrak{A}^{1-\sigma} = (A^{1-\sigma}) \text{ и } \Theta = A^{1-\sigma}E,$$

где E — единица из K. Поэтому

$$\vartheta = N_{K/k}(\Theta) = N_{K/k}(E) \text{ и } \vartheta\mathfrak{V}^* \in \mathfrak{V}^*.$$

Изоморфизм групп $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{V}/\mathfrak{V}^*$ доказан. Пусть теперь P — произвольный инвариантный комплекс и $\mathfrak{A}$ — какой-нибудь идеал из P. Для него можно написать равенство

$$\mathfrak{A}^{1-\sigma} = A^{-1}\mathfrak{j},$$

где A, как обычно, означает число из K, а $\mathfrak{j}$ — идеал из k. Беря от обеих частей этого равенства норму, получаем

$$\mathfrak{j}^l (N_{K/k}(A))^{-1} = (1)$$

или

$$\mathfrak{j}^l = (NA).$$

$\eta = NA$ есть сингулярное число, принадлежащее группе Ξ_*. Отображение $\mathfrak{A}\mathfrak{T} \to \eta\Xi$ есть изоморфное отображение группы $\mathfrak{a}/\mathfrak{T}$ на некоторую подгруппу группы Ξ/Ξ^*. Действительно, $\eta\Xi^*$ не зависит от выбора A и $\mathfrak{A}$, потому что, если бы $A'^{-1}\mathfrak{j}' = A^{-1}\mathfrak{j}$, то

$$(A'A^{-1}) = \mathfrak{j}'\mathfrak{j}^{-1} = (B)$$

и, значит,

$$A' = ABE,$$

где E — надлежащая единица из K. Отсюда получаем

$$\eta' = NA' = NANBNE = \eta NB.$$

Так как $NB \in \Xi$, то

$$\eta'\Xi^* = \eta NB\Xi^*.$$

Аналогично, если $\mathfrak{A}'$ — другой идеал из того же класса $\mathfrak{A}\mathfrak{T}$, то $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, где

$$\mathfrak{B}^{1-\sigma} = (\Theta) \text{ и } \mathfrak{A}'^{1-\sigma} = \mathfrak{A}^{1-\sigma}\mathfrak{B}^{1-\sigma} = A^{-1}\mathfrak{j}\Theta = (A^{-1}\Theta)\,\mathfrak{j} = A'^{-1}\mathfrak{j},$$

т. е.

$$\eta' = NA' = NAN\Theta^{-1} = \eta\vartheta \text{ и } \eta'\Xi^* = \eta\Xi^*.$$

Наконец, если $\eta \in \Xi^*$, то

$$\eta = B^l = \mathfrak{j}^l,\ B = \mathfrak{j} \text{ и } \mathfrak{A}^{1-\sigma} = (BA^{-1}),$$

т. е.

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{T} \text{ и } \mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{T}.$$

Определим ранг Ξ_*/Ξ^*. Рассмотрим для этого введенный нами в этом пункте базис сингулярных чисел $\{\varepsilon_i\}$. Пусть в нем $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r'}$ — единицы, а

$$\varepsilon_{r'+1} = \mathfrak{j}^l_{r'+1}, \ldots, \varepsilon_{r^*} = \mathfrak{j}^l_{r^*}, \quad \mathfrak{j}_s \neq 1.$$

Для $i > r'$ $\varepsilon_i \bar{\in} \Xi_*$. В самом деле, если бы $(\varepsilon_i) = (NB)$, то $\varepsilon_i = \eta NB$, где η — единица из k, и мы имели бы

$$\left(\frac{\varepsilon_i,\ \mu}{\mathfrak{b}_j}\right) = \left(\frac{\eta,\ \mu}{\mathfrak{b}_j}\right) = \zeta^{\tau_{ij}}.$$

Но это противоречит тому, что базис ε_i содержит, согласно выбору, максимальное число единиц. Отсюда следует соотношение для ранга $r(\Xi_*/\Xi^*)$:

$$r(\Xi_*/\Xi^*) \leqslant r(\Xi/\Xi^*) - r(\Xi/\Xi_*) \leqslant e - e^* - (r^* - r').$$

Так как, в силу (13),

$$r(\mathfrak{a}) = r(\mathfrak{a}^*) + r(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^*) = r(\mathfrak{a}^*) + r(\mathfrak{T}) + r(\mathfrak{a}/\mathfrak{T}),$$

а согласно ранее сказанному,

$$r(\mathfrak{T}) = r(\mathfrak{V}/\mathfrak{V}^*) = v - v^*, \text{ а } r(\mathfrak{a}/\mathfrak{T}) = r(\Xi_*/\Xi^*) \leqslant e - e^* - (r^* - r');$$

то

$$a \leqslant a^* + v - v^* + e - e^* - (r^* - r').$$

Воспользовавшись еще неравенством (4) для a^*, окончательно получаем:

$$a \leqslant t + v - m' - 1 + e - (r^* - r') \leqslant t + v - m' + e - 1. \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 1. $g \leqslant r - 1$.

Доказательство. Пусть M — число независимых комплексов в K, f — число независимых комплексов главного рода, f' — число независимых комплексов P, являющихся $1-\sigma$-ми степенями комплексов $P = Q^{1-\sigma}$. Если a попрежнему обозначает число независимых инвариантных комплексов, то имеет место очевидное равенство:

$$M = g + f = a + f'.$$

Так как $1-\sigma$-я степень любого комплекса принадлежит главному роду, то $f' \leqslant f$, что вместе с предыдущим равенством дает

$$g \leqslant a. \tag{15}$$

Оценим a. Согласно (14),

$$a \leqslant t - r^* + e - 1 - (m' - v - r'), \tag{14'}$$

и так как v — число независимых единиц, являющихся нормами чисел из K, а r' единиц $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r'}$ наверное не нормы, то $v + r' \leqslant m'$, и неравенство (14′) можно усилить:

$$a \leqslant t - r^* + e - 1 = r - 1. \tag{15'}$$

Неравенства (15) и (15′) и доказывают теорему 1.

Следствие. *Между r характерами $\chi_1, \ldots, \chi_{t-r^*}, \psi_1, \ldots, \psi$ существует по крайней мере одно соотношение вида:*

$$\chi_1^{m_1} \ldots \chi_{t-r^*}^{m_{t-r^*}} \psi_1^{n_1} \ldots \psi_e^{n_e} = 1.$$

9°. Пусть $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ — куммерово поле и $\mathfrak{f}$ — ведущий идеал K, H — факторгруппа группы идеалов из k, взаимно простых с $\mathfrak{f}$ по подгруппе главных идеалов (α), представленных числами α, являющимися норменными вычетами $\bmod \mathfrak{f}$, $\mathfrak{h}$ — подгруппа классов, содержащих относительные нормы идеалов из K.

В дальнейшем будем называть $\mathfrak{h}$ группой, ассоциированной с расширением K/k, или группой Такаги K/k. $\mathfrak{h}$ — собственная подгруппа H. Действительно, так как r характеров $\chi_1, \ldots, \chi_{t-r^*}, \psi_1, \ldots, \psi_e$ обращаются в 1 на идеалах главного класса, то они являются характерами группы H. По n^o 8 они независимы и, следовательно,

$$r \leqslant r(H),$$

а так как, с другой стороны, по теореме 1,

$$r(\mathfrak{h}) \leqslant r - 1,$$

то $\mathfrak{h}$ не совпадает с H.

ТЕОРЕМА 2 (Гильберта-Бауэра). *В каждом классе $H/\mathfrak{h}$ существует идеал, все простые делители которого абсолютной первой степени.*

Доказательство этой теоремы см. в ([6]).

Следствие. *Каково бы ни было независимое число μ из k, в k существует бесконечно много простых идеалов $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени, для которых*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал из какого-нибудь не единичного класса $H/\mathfrak{h}$, выбранный согласно теореме 2. Тогда хоть один его простой делитель $\mathfrak{p}$ будет простым и в $K = k(\sqrt[l]{\mu})$, так как иначе идеал $\mathfrak{a}$ был бы нормой идеала из K и, следовательно, лежал бы в $\mathfrak{h}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_t$ — независимые числа из k, то в k существует бесконечно много простых идеалов $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени, для которых выполняются соотношения:*

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\mu_1}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\mu_t}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Доказательство. Пусть $K = k(\sqrt[l]{\mu_1}, \ldots, \sqrt[l]{\mu_t})$. По доказанному, в K существует бесконечно много простых идеалов $\mathfrak{P}$ абсолютной первой степени, для которых

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{P}}\right)_k \neq 1.$$

По свойству (1) символа Лежандра (см. введение), отсюда получаем:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_k \neq 1, \tag{16}$$

где $\mathfrak{p} = N_{K/k}(\mathfrak{P})$ есть простой идеал из k абсолютной первой степени. С другой стороны, пользуясь тем же свойством символа Лежандра, находим:

$$\left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{P}}\right)_K = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, t. \tag{16'}$$

Соотношения (16) и (16′) и доказывают теорему 3.

Число $\alpha \in k$ называется примарным, если для некоторого $\xi \in k$ выполняется сравнение $\alpha \equiv \xi^l (\mathfrak{l}^l)$ $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$.

10°. Группа сингулярных примарных чисел.

ЛЕММА 3. *В группе соединений классов идеалов можно выбрать такой базис, что в каждом соединении этого базиса найдется хоть один простой идеал.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ — какие-то идеалы, взятые из e независимых соединений, и пусть $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N$ — все входящие в них простые идеалы. Выберем в соединениях, в которых лежат $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_N$, максимальное число независимых. Они, очевидно, и будут давать искомый базис группы соединений.

ЛЕММА 4. *Пусть простые идеалы* $\mathfrak{q}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m' + e$, *абсолютной первой степени выбраны так, что*

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right) = \zeta^{\tau_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m' + e, \tag{17}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m'+e}$ — *какой-нибудь базис сингулярных чисел. Если*

$$q_i \mathfrak{r}_1^{w_{i1}} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_{ie}} \bar{\mathfrak{r}}_i^l = \varkappa_i, \ i = 1, 2, \ldots, m' + e,$$

то образуем группу Ω *чисел* $\bar{\omega}$ *вида*

$$\bar{\omega} = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}} \alpha^l,$$

где v_j *подчинены* e *условиям:*

$$\sum_{i=1}^{m'+e} v_i w_{ij} \equiv 0\,(l), \quad j = 1, 2, \ldots, e. \tag{18}$$

Пусть, наконец, $\omega \leqslant \Omega$ — *подгруппа содержащихся в* Ω *примарных чисел. Тогда ранг* ω

$$r(\omega) = e.$$

Доказательство. Пусть $r(\omega) = n$. Ясно, что

$$r(\Omega) \geqslant m' + e + m' + e - e = 2m' + e.$$

Если бы n было меньше e, то числа $\bar{\omega}$ образовали бы более чем $2m' + e - e' = 2m'$ соединений классов вычетов $\operatorname{mod} \mathfrak{l}$ взаимно простых с l, что, по лемме 1, невозможно. Значит $n \geqslant e$. Пусть $n > e$. Тогда найдется независимое число ω такое, что

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_e}\right) = 1. \tag{19}$$

Действительно, e функций

$$\chi_i(\omega) = \left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, e,$$

являются характерами группы Ω, и так как число этих характеров e меньше ранга n группы ω, то все они обращаются в 1 на некотором ω, не равном l-й степени числа из k, т. е. для него выполняются соотношения (18).

Докажем, что это невозможно. С этой целью рассмотрим куммерово поле $K = k(\sqrt[l]{\omega})$. Если

$$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_f^{v_f} \alpha^e, \quad v_j \not\equiv 0\,(l), \quad j = 1, \ldots, f,$$

и $\mathfrak{f} = \mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_f$, то, в силу равенств (17),

$$\left(\frac{\varepsilon_i \cdot \omega}{\mathfrak{q}_j}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right)^{v_j} = \zeta^{\tau_{ij}}$$

и, следовательно, для каждого $\alpha' \in k$ существует сингулярное число $\varepsilon = \varepsilon_1^{y_1}, \ldots, \varepsilon_f^{y_f}$ такое, что для $\alpha = \alpha'\varepsilon$ будут выполняться равенства

$$\left(\frac{\alpha,\ \omega}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, f,$$

а значит, по свойству 2 символа $\left(\frac{\alpha_1\ \omega}{\mathfrak{q}}\right)$ из введения, в K существует число A, для которого

$$\alpha \equiv NA\,(\mathfrak{f}). \tag{20}$$

Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — произвольный идеал из k. По n^0 2,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_e}\, \bar{\mathfrak{r}}^l\, (\alpha'). \tag{21}$$

Так как, согласно лемме 3, идеалы $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ можно считать простыми, то из равенств (19) следует, что они полностью разлагаются в K:

$$\mathfrak{r}_i = N\mathfrak{R}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, e.$$

Подберем сингулярное число $\varepsilon = \mathfrak{j}^l$ так, чтобы $\alpha' = \alpha\varepsilon$ и α удовлетворяло сравнению (20). Из равенства (20) будет тогда следовать сравнение

$$\mathfrak{a} \equiv N\,(\mathfrak{R}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{R}_e^{w_e}\, \bar{\mathfrak{r}}_{\mathfrak{j}}\, A)\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}),$$

и, значит, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{h}$, что, согласно n^0 9, невозможно. Следовательно, $n = e$.

Следствие 1. *Числа ω порождают группу соединений классов вычетов $\mathrm{mod}\ \mathfrak{l}^l$, простых с l, и, следовательно, каждое число $\mu \in k$ удовлетворяет сравнению*

$$\mu \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}} \alpha^l\, (\mathfrak{l}^l),$$

где v_i удовлетворяют условиям (18).

Следствие 2. $r(\Omega) = 2m' + e$.

Следствие 3. *В группе ω существует базис $\omega_1, \ldots, \omega_e$ такой, что*

$$\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_j}\right) = \zeta^{\tau_{ij}}.$$

Действительно, e характеров

$$\chi_i(\omega) = \left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_i}\right), \quad i = 1, \ldots, e,$$

группы ω ранга e обращаются в 1 только на числах $\omega \approx 1$. Следовательно, они образуют базис группы характеров. Взаимный к ним базис ω и будет искомым базисом.

Следствие 4. *Если $\omega_1, \ldots, \omega_e$ — базис группы ω, определенный, как было указано выше, и $\mathfrak{r}$ — простой идеал, удовлетворяющий условиям*

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\omega_e}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \tag{22}$$

то $\mathfrak{r}$ лежит в главном соединении.

Доказательство. Пусть $K_i = k(\sqrt[l]{\omega_i})$ и $\mathfrak{h}_i$ — ассоциированная с K_i

группа (определение ее дано в n^0 9). Так как $\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_j}\right)=\zeta^{\tau_{ij}}$, то можно считать, что $\mathfrak{h}_i$ порождена соединениями, в которых лежат $\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_{i-1}$, $\mathfrak{r}_{i+1},\ldots,\mathfrak{r}_e$, и, значит, $\mathfrak{h}_i$ пересекаются по главному соединению. Из равенств (22) следует, что

$$\mathfrak{r}\in\bigcap_{i=1}^{e}\mathfrak{h}_i$$

и, значит, $\mathfrak{r}$ лежит в главном соединении.

ТЕОРЕМА 4. *Ранг группы сингулярных примарных чисел равен e.*

Доказательство. Так как ранг группы ω равен e, то теорема 4 будет доказана, если мы докажем, что группа ω совпадает с группой сингулярных примарных чисел. Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_e$ — какой-нибудь базис группы ω и пусть $\omega_1,\ldots,\omega_q$, $q\leqslant e$,— сингулярные числа. Дополним их до базиса группы сингулярных чисел и обозначим этот базис через

$$\varepsilon_1=\omega_1,\ldots,\varepsilon_q=\omega_q,\ \varepsilon_{q+1},\ldots,\varepsilon_{m'+e}.$$

Определим, как в лемме 4, $m'+e$ простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ равенствами:

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{p}_j}\right)=\zeta^{\tau_{ij}},\quad \left(\frac{\omega_{q+1}}{\mathfrak{p}_j}\right)=1,\ldots,\left(\frac{\omega_e}{\mathfrak{p}_j}\right)=1.$$

Из этих равенств и следствия 4 предыдущей леммы заключаем, что идеалы $\mathfrak{p}_{q+1},\ldots,\mathfrak{p}_{m'+l}$ лежат в главном соединении:

$$\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{q}_i^l=(\pi_i),\quad i=q+1,\ldots,m'+e.$$

Рассмотрим группу ω' чисел вида

$$\omega'=\varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}}\ \pi_{q+1}^{v_1}\ldots,\pi_{m'+e}^{v_{m'+e-q}}\,\alpha^l.$$

Ее ранг

$$r(\omega')=m'+e+m'+e-q=2m'+e-q+e.$$

так как, с другой стороны, по следствию 2 леммы 4, этот ранг равен $2m'+e$, то отсюда и получаем $e=q$.

Следствие 1. *Если $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{m'}$ — базис непримарных сингулярных чисел и $\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_{m'}$, $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{m'}$ определены равенствами*

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right)=\zeta^{\tau_{ij}}\quad i,j=1,2,\ldots,m',$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{q}_j}\right)=1,\ldots,\left(\frac{\omega_e}{\mathfrak{q}_j}\right)=1,\quad \mathfrak{q}_i\,\bar{\mathfrak{r}}_i^l=\varkappa_i,$$

то для каждого числа $\mu\in k$ имеет место сравнение

$$\mu\equiv\varepsilon_1^{u_1}\ldots\varepsilon_{m'}^{u_{m'}}\,\varkappa_1^{v_1}\ldots\varkappa_{m'}\,\beta^l\ (\mathfrak{l}^l)$$

с надлежащими u_i, v_i из ряда $0,1,\ldots,l-1$.

Следствие 2. *Существует базис группы сингулярных примарных чисел $\omega_1,\ldots,\omega_e$, удовлетворяющий условиям*

$$\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_j}\right)=\zeta^{\tau_{ij}},\quad i,j=1,2,\ldots,e.$$

Следствие 3. *Если* $\omega_1, \ldots, \omega_e$ — *базис сингулярных примарных чисел, выбранный согласно следствию леммы 2, и* $\mathfrak{r}$ — *простой идеал из* k, *удовлетворяющий условиям*

$$\left(\frac{\omega_1}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\omega_e}{\mathfrak{r}}\right) = 1,$$

то $\mathfrak{r}$ *лежит в главном соединении.*

Следствие 4. *Пусть* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ — *числа, независимые по модулю группы сингулярных примарных чисел. Тогда* $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ *можно выбрать так, чтобы*

$$\left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{r}_j}\right) = 1, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, e.$$

Доказательство. Определим e простых идеалов $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_e$ из условий

$$\left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{w}_j}\right) = 1, \quad \left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{w}_j}\right) = \zeta^{\tau_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, e.$$

Это можно сделать, так как μ, по предположению, — несингулярное примарное число.

Идеал $\mathfrak{w}_j$ принадлежит группам

$$\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_{j-1}, \mathfrak{h}_{j+1}, \ldots, \mathfrak{h}_e$$

и, следовательно, пересечению

$$\mathfrak{h}_1 \cap \ldots \mathfrak{h}_{j-1} \cap \mathfrak{h}_{j+1} \cap \ldots \mathfrak{h}_e.$$

Но единственными соединениями, лежащими в этом пересечении, будут соединения, образованные идеалами $\mathfrak{r}_j, \mathfrak{r}_j^2, \ldots, \mathfrak{r}_j^{e-1}$, и потому $\mathfrak{w}_j \sim \mathfrak{r}^{a_j}$. Так как $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_e$ порождают всю группу H_0, то $a_i \not\equiv 0\,(l)$ и, значит, идеалы $\mathfrak{w}_j$ лежат в независимых соединениях.

Следствие 5. *Если* $\pi' = \mathfrak{p}\mathfrak{q}'^l$ — *примарное число, то существует примарное число* $\pi = \mathfrak{p}\mathfrak{q}^l$ *такое, что для заданных* $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_e$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_1}\right) = 1.$$

Такое число π мы будем называть нормированным к $[\mathfrak{r}]$.

Доказательство. Пусть

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}_j}\right) = \zeta^{a_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, e.$$

Если $\omega_1, \ldots, \omega_e$ выбраны так, чтобы

$$\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_j}\right) = \zeta^{\delta_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, e$$

и

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j, \end{cases}$$

то число

$$\pi = \pi' \omega_1^{-a_1} \ldots \omega_e^{-a_e}$$

будет искомым.

ЛЕММА 5. *Для того чтобы поле* $K=k(\sqrt[l]{\omega})$ *было разветвлено, необходимо и достаточно, чтобы число главных характеров* $t-r^*=0$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если $t-r^*=0$, то это означает, что, умножая произвольное число α' на некоторое сингулярное число ε, можно получить число $\alpha \equiv NA(\mathfrak{f})$, где A — число из K и $\mathfrak{f}$ — ведущий идеал. Пусть ω — несингулярное примарное число. Выбирая $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ так, чтобы

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_1}\right)=1, \ldots, \left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_e}\right)=1,$$

получаем, точно так, как при доказательстве леммы 4, что для любого идеала $\mathfrak{a}$ из k выполняется сравнение

$$\mathfrak{a} \equiv N(R_1^{w_1} \ldots R_e^{w_e}\, \mathfrak{r}\, \mathfrak{j}\, A) \pmod{\mathfrak{f}},$$

т. е. $\mathfrak{a} \in \mathfrak{H}$, что невозможно.

§ 2. Примарные числа и примарные идеалы. Общий закон взаимности

Определение. Идеал $\mathfrak{a}$ называется примарным, если для каждого сингулярного числа ε выполняется равенство

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)=1.$$

В частности, для простого примарного идеала $\mathfrak{p}$, на основании следствия 4 леммы 4, отсюда следует, что $\mathfrak{p}$ принадлежит главному соединению.

ЛЕММА 6. *Пусть* μ — *примарное число, а* $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_f$ — *некоторые из тех* $m'+e$ *простых идеалов* $\mathfrak{q}_i$, *которые определены в лемме* 4, *и пусть имеет место соотношение*:

$$(\mu)=\mathfrak{q}_1^{v_1} \ldots \mathfrak{q}_f^{v_f}\, \mathfrak{p}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{p}_s^{x_s}\, \mathfrak{a}^l, \quad v_i \not\equiv 0\,(l), \quad x_i \not\equiv 0\,(l),$$

в котором $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ — *простые примарные идеалы из* k. *Тогда*:

1. *число главных характеров куммерова поля* $K=k(\sqrt[l]{\mu})$ *равно* s:

$$t-r^*=s;$$

2. *все они даются формулами*

$$\chi_i(\mathfrak{N})=\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}_i}\right)=\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}_i}\right)^{x_i}, \quad i=1,2, \ldots, s, \tag{1}$$

причем $(\nu)=N\mathfrak{N}[\mathfrak{r}]$ — *дополнение* $N\mathfrak{N}$, *согласно* n° 2;

3. *между ними имеется по крайней мере одно соотношение вида*:

$$\chi_1^{m_1} \ldots \chi_s^{m_s}=1. \tag{2}$$

Доказательство. Согласно следствию теоремы 1, между характерами $\chi_1, \ldots, \chi_{t-r^*}, \psi_1, \ldots, \psi_e$ должно выполняться по крайней мере одно соотношение вида

$$\chi_1^{m_1} \ldots \chi_{t-r^*}^{m_{t-r^*}}\, \psi_1^{n_1} \ldots \psi_e^{n_e}=1 \tag{3}$$

Так как, с другой стороны,

$$\left(\frac{\varepsilon_i, \mu}{\mathfrak{q}_j}\right) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right)^{v_j} = \zeta^{\tau_{ij}},$$

то $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_f$ есть базис, взаимный характерам $\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{q}_j}\right)$, $j = 1, 2, \ldots, f$, и, значит, $r^* = f, t - r^* = s$, и главные характеры идеала $\mathfrak{R}$ из поля K будут даваться формулой (1). 1-е и 2-е утверждения нашей леммы, таким образом, доказаны. Чтобы доказать последнее утверждение леммы, выберем базисные идеалы $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ так, чтобы

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_i}\right) = 1 \text{ для } i = 1, 2, \ldots, e.$$

Это, согласно § 1, возможно, так как μ — несингулярное примарное число. В поле K идеалы $\mathfrak{r}_i$ полностью разлагаются:

$$\mathfrak{r}_i = NR_i.$$

Определим характер идеала R_i. Так как

$$\mathfrak{r}_i\, \mathfrak{r}_i^{l-1} (\mathfrak{r}_i^{-1})^l = 1,$$

то

$$\psi_j(R_i) = \zeta^{-\delta_{ij}}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Из (1) получаем:

$$\chi_j(R_i) = 1 \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, e, \quad j = 1, 2, \ldots, s.$$

Подставляя эти значения в равенство (3), получим

$$\zeta^{-n_i} = 1,$$

и, следовательно,

$$n_i = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, e.$$

Равенство (3) перейдет тогда в равенство (2).

Следствие. *Если в лемме 6 μ имеет вид*

$$(\mu) = \mathfrak{q}_1^{v_1} \ldots \mathfrak{q}_f^{x_f} \mathfrak{p}^x \mathfrak{a}^l,$$

т. е. $s = 1$, то для любого простого идеала $\mathfrak{q}$, удовлетворяющего равенству $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = 1$, справедливо равенство

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1,$$

где

$$\varkappa = \mathfrak{q}\mathfrak{r}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_e} \bar{\mathfrak{r}}^l = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}],$$

а $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_e$ выбраны так, чтобы

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_i}\right) = 1 \text{ для } i = 1, r, \ldots, e.$$

Доказательство следует из равенств (1) и (2) предыдущей леммы при $s = 1$.

В дальнейшем изложении, до леммы 10 включительно, основное поле k предполагается абсолютно нормальным, т. е. нормальным над полем рациональных чисел.

ЛЕММА 7. *Если $\mathfrak{p}$ — некритический простой примарный идеал из k абсолютной первой степени, то в k существует примарное число π вида $\pi = \mathfrak{p}\mathfrak{a}^l$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{p}$ лежит в главном соединении, то в k существует идеал $\mathfrak{b}$ такой, что $\mathfrak{p}\mathfrak{b}^l = (\bar{\pi})$ — главный идеал. Согласно следствию 1 теоремы 4, число $\bar{\pi}$ удовлетворяет сравнению

$$\bar{\pi} \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{u_{m'}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_f^{v_f} \beta^l \pmod{\mathfrak{l}^l}.$$

Если бы $f = 0$, то число

$$\pi = \bar{\pi}\varepsilon_1^{-u_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{-u_{m'}}$$

было бы искомым и лемма была бы доказана. Покажем, что $f = 0$. Пусть $f \neq 0$. Обозначим $\pi\varkappa_1^{-v_1} \ldots \varkappa_f^{-v_f}$ через μ. Так как $\mu \equiv \beta^l (\mathfrak{l}^l)$, то μ примарно. Пусть $\pi', \pi'', \ldots, \mu', \mu'' \ldots$ — все сопряженные с π и μ числа. Так как $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_f$ абсолютной первой степени, то, как легко следует из однозначности разложения на простые множители, числа $\mu, \mu', \mu'', \ldots, \pi, \pi', \ldots$ будут независимыми.

Определим в k простой примарный идеал $\mathfrak{q}$ абсолютной первой степени, удовлетворяющий равенствам:

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \ldots, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \ldots. \tag{4'}$$

(Существование такого идеала $\mathfrak{q}$ следует из теоремы 3.) Если $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}^e$ выбраны так, чтобы для всех $i = 1, 2, \ldots, e$ было

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}_i}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_i}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mu''}{\mathfrak{r}_i}\right) = 1, \ldots,$$

то, согласно следствию леммы 6 из равенства (4), получаем:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}'}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}''}\right) = 1, \ldots,$$

а значит, и

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa'}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \ldots.$$

Перемножая последние равенства, находим:

$$\left(\frac{\varkappa\varkappa'\varkappa''\ldots}{\mathfrak{p}}\right) = 1. \tag{5}$$

Далее,

$$\varkappa\varkappa'\varkappa''\ldots = \mathfrak{q}\mathfrak{a}^l \mathfrak{q}' \mathfrak{a}'^l \ldots = N\mathfrak{q} (\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\ldots)^l = q\varepsilon,$$

где q — рациональное простое число, делящееся на $\mathfrak{q}$, а ε — сингулярное число. Вследствие примарности $\mathfrak{p}$, равенство (5) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\varkappa\varkappa'\varkappa''\ldots}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q}{\pi}\right), \tag{6}$$

где $\pi = \bar{\pi}\,\varepsilon_1^{-u_1}\ldots\varepsilon_{m'}^{-um'}$, а $\bar{\pi} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{b}^l$. Докажем, что q — примарное число. Действительно, так как $\mathfrak{q}$ — примарный идеал, то

$$\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{q}}\right) = \zeta^{\frac{N\mathfrak{q}-1}{l}} = \zeta^{\frac{q-1}{l}} = 1$$

и, значит, $q \equiv 1\ (l^2)$.

Рассмотрим куммерово поле $K_1 = k(\sqrt[l]{q})$. Так как q имеет вид

$$q = \mathfrak{q}\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''\ldots = \prod_\tau \tau\mathfrak{q},$$

где τ — автоморфизмы k/R, то, по предыдущей лемме, каждый идеал $\mathfrak{N}$ из K_1 имеет $2m' = (k:R)$ главных характеров

$$\chi_\tau(\mathfrak{N}) = \left(\frac{\nu}{\tau\mathfrak{q}}\right) \tag{7}$$

и между ними имеется по крайней мере одно соотношение вида

$$\prod \chi_\tau^{n\tau} = 1. \tag{8}$$

Определим n_τ. Применяя к равенству (6) произвольный автоморфизм σ расширения k/R, получим

$$\sigma\left(\frac{q}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{q}{\sigma\mathfrak{q}}\right) = 1$$

и, значит, в поле K_1 все $\sigma\mathfrak{p}$ полностью разлагаются:

$$\sigma\mathfrak{p} = N\mathfrak{P}_\sigma.$$

Определим характеры идеала $\mathfrak{P}_\sigma$. Из равенств (7) сначала находим

$$\chi_\tau(\mathfrak{P}_\sigma) = \left(\frac{\sigma\pi}{\tau\mathfrak{q}}\right) = \tau\left(\frac{\tau^{-1}\sigma\pi}{\mathfrak{q}}\right).$$

Сравнивая это с равенством (4′), окончательно получаем

$$\chi_\tau(\mathfrak{P}_\sigma) = \zeta^{\delta_{\tau,\sigma}}.$$

Подставляя найденные значения $\chi_\tau(\mathfrak{P}_\sigma)$ в равенство (8), получаем

$$n_\sigma = 0 \text{ для всех } \sigma.$$

Иначе говоря, характеры χ_τ независимы. Это, однако, противоречит следствию теоремы 1. Противоречие и доказывает нашу лемму.

ЛЕММА 8. *Если $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}^*$ — два простых примарных идеала абсолютной первой степени, а π и π^* — соответствующие им примарные числа, нормированные к* $[\mathfrak{r}]$, *то:*

1. *между главными характерами χ_1 и χ_2 куммерова поля $K = k(\sqrt[l]{\pi\pi^{*n}})$ $(n \not\equiv 0\ (l))$ выполняется соотношение*

$$\chi_1\chi_2 = 1.$$

2. $\left(\frac{\pi}{\pi^*}\right) = \left(\frac{\pi^*}{\pi}\right)$.

Доказательство. Пусть $\pi', \pi'', \ldots, \pi^{*\prime}, \pi^{*\prime\prime}, \ldots$ — все сопряженные с π и π^* числа (k, как и в предыдущей лемме, предполагается абсолютно нормальным). Определим в k некритический простой примарный идеал $\mathfrak{q}$ абсолютной первой степени так, чтобы

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi'}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\pi''}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \ldots, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi^{*\prime}}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\pi^{*\prime\prime}}{\mathfrak{q}}\right) = 1, \ldots. \tag{9'}$$

Так как $\pi, \pi', \pi'', \ldots, \pi^*, \pi^{*\prime}, \pi^{*\prime\prime}, \ldots$ независимы по модулю сингулярных чисел, то такой идеал $\mathfrak{q}$ существует. Пусть $\varkappa = \mathfrak{q}\mathfrak{r}^l$ — соответствующее ему, согласно лемме 7, примарное число. Перемножая равенства (9), получаем:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\pi\pi'\pi''\ldots}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1,$$

но, как и выше, $\pi\pi'\pi''\ldots = p\varepsilon$, где p — рациональное простое число, а ε — сингулярное число. Поэтому

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\pi\pi'\pi''\ldots}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{p\varepsilon}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{p}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{p}{\varkappa}\right). \tag{10}$$

Так как $\varkappa$ примарно, то, по эйзенштейновскому закону взаимности,

$$\left(\frac{p}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{p}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''\ldots}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}'}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}''}\right)\ldots. \tag{11}$$

По следствию же леммы 6 из равенств (9) находим:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}'}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}''}\right) = 1, \ldots.$$

Подставляя это в (11), получаем:

$$\left(\frac{p}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right). \tag{12}$$

Сравнения (10) и (12) дают

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1. \tag{13}$$

Аналогично, из соотношений (9′) получаем:

$$\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1. \tag{13'}$$

Рассмотрим куммерово поле

$$K = k(\sqrt[l]{\pi\varkappa^n}), \quad n \not\equiv 0\,(l).$$

По лемме 6, между двумя его главными характерами χ_1, χ_2 выполняется соотношение

$$\chi_1^{m_1}\chi_2^{m_2} = 1. \tag{14}$$

Найдем m_1 и m_2. В поле K $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}^l = N\mathfrak{Q}$. Определим характеры идеала $\mathfrak{Q}$:

$$\chi_1(\mathfrak{Q}) = \left(\frac{\varkappa, \pi\varkappa^n}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right),$$

$$\chi_2(\mathfrak{Q}) = \left(\frac{\varkappa, \pi\varkappa^n}{\mathfrak{q}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}.$$

Так как, согласно (13),

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = 1, \tag{A}$$

то

$$\chi_1(\mathfrak{Q})\,\chi_2(\mathfrak{Q}) = 1. \tag{B}$$

Так как на основании (13) $\chi_2(\mathfrak{Q}) \neq 1$, а хоть одно из $m_1, m_2 \not\equiv 0$, то (A) и (B) дают, как легко видеть, $m_1 = m_2$. Мы можем в дальнейшем считать $m_1 = m_2 = 1$. Для примарных чисел π и $\varkappa$ утверждение 1 нашей леммы таким образом доказано. Заметим, что при доказательстве мы не использовали никаких специальных свойств π и $\varkappa$, кроме свойств, выраженных равенством (13). Поэтому это утверждение верно для любых π и $\varkappa$, для которых

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right) \neq 1.$$

Таким образом, доказательство первого утверждения нашей леммы сводится к доказательству второго. Переходим к доказательству второго утверждения леммы. Если

$$\left(\frac{\pi}{\pi^*}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) = 1,$$

то, по следствию леммы 6,

$$\left(\frac{\pi^*}{\pi}\right) = 1.$$

Обратно, из

$$\left(\frac{\pi^*}{\pi}\right) = 1$$

следует, что и

$$\left(\frac{\pi}{\pi^*}\right) = 1,$$

т. е. наше утверждение в этом случае доказано. Пусть

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1.$$

Так как, кроме того, и

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1,$$

то существует $n \not\equiv 0 \ (l)$ такое, что

$$\left(\frac{\pi\varkappa^n}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1. \tag{15}$$

Рассмотрим куммерово поле $K = k(\sqrt[l]{\pi\varkappa^n})$. В нем $\mathfrak{p}^* = N\mathfrak{P}^*$. По доказанному,

$$\chi_1(\mathfrak{P}^*)\,\chi_2(\mathfrak{P}^*) = 1,$$

а по лемме 6,

$$\chi_1(\mathfrak{P}^*) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right) \text{ и } \chi_2(\mathfrak{P}^*) = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right)^n.$$

Подставляя эти значения в предыдущее равенство и используя (15) и (13), получаем:

$$1 = \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right)^n = \left(\frac{\pi\varkappa^n}{\mathfrak{p}^*}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)^n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right)\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right)^n,$$

откуда, сокращая на $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right)^n$, находим:

$$\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}^*}\right).$$

ЛЕММА 9. *Пусть $\mathfrak{q}$ — произвольный фиксированный простой идеал и $\varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}]$. Тогда для произвольного простого примарного идеала $\mathfrak{p}$ и любого соответствующего ему нормированного к $[\mathfrak{r}]$ примарного числа π можно подобрать такое f, что*

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)^f, \quad \text{где } f \not\equiv 0 \ (l), \tag{16}$$

причем, если в этом равенстве $f = 1$ хоть для одного простого $\mathfrak{p}$ и хоть для одного соответствующего ему π, для которого

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right) \neq 1,$$

то $f = 1$ для всех простых $\mathfrak{p}$ и всех соответствующих им π.

Доказательство. Если

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) = 1,$$

то, по лемме 6,

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right) = 1,$$

чем равенство (16) в этом случае доказано. Пусть

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1.$$

Определим простой примарный идеал $\mathfrak{p}^*$ абсолютной первой степени так, чтобы

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1.$$

Пусть π^* — соответствующее ему примарное число, нормированное к $[\mathfrak{r}]$. Покажем, что $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1$. Действительно, если бы $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) = 1$, то, по лемме 6, и

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) = 1,$$

что, однако, противоречит выбору $\mathfrak{p}^*$. Так как $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1$ и $\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}}\right) \neq 1$, то можно определить число $n \not\equiv 0 \ (l)$ такое, что

$$\left(\frac{\pi\pi^{*n}}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\pi\pi^{*n}}{\mathfrak{q}}\right) = 1. \tag{17}$$

Рассмотрим поле $K = k(\sqrt[l]{\pi\pi^{*n}})$. В нем $\mathfrak{q} = N\mathfrak{Q}$. По предыдущей лемме и лемме 6,

$$\chi_1(\mathfrak{Q})\chi_2(\mathfrak{Q}) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right)^n = 1. \qquad (18)$$

Из $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1$ и $n \not\equiv 0\ (l)$ следует, что и $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$, и, значит, для некоторого $f \not\equiv 0\ (l)$ равенство (16) выполняется. Из (17) и (18) следует

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\left(\frac{\pi^*}{\varkappa}\right)^n = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi^*}\right)^n,$$

а значит, и

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)^{-1} = [\varkappa, \pi] = \left(\left(\frac{\pi^*}{\varkappa}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi^*}\right)^{-1}\right)^{-n} = [\varkappa, \pi^*]^{-n},$$

откуда и следует второе утверждение леммы.

ЛЕММА 10. *Пусть K — абсолютно нормальное поле, $q_1, \ldots, q_t$ — все рациональные простые числа, разветвленные в K, и $e_1, \ldots, e_t$ — их показатели ветвления. Если $e_i = l^{n_i} e_i^*$, где $e_i^* \not\equiv 0\ (l)$, то положим $n = \max\ (n_1, \ldots, n_t)$. Если K содержит первообразный корень l^{n+1}-й степени из 1 и все $\sqrt[l^{n_i}]{q_i}$, то в K имеет место простейший закон взаимности, т. е. для любого примарного числа π, соответствующего некритическому примарному простому идеалу $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени, и любого $\alpha \in K$ имеет место равенство:*

$$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right). \qquad (19)$$

Доказательство. Пусть сначала $\alpha = \varkappa = \mathfrak{q}\,[\mathfrak{r}]$, где $\mathfrak{q}$ — произвольный простой идеал из K, а π нормировано к $[\mathfrak{r}]$. Равенство (19) в этом случае достаточно доказать только для одного простого некритического примарного идеала $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени, для которого $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$. Пусть q — рациональное простое число, делящееся на $\mathfrak{q}$, и

$$q = (\mathfrak{q}\,\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_g)^e \qquad (20)$$

— его разложение в K. Пусть, далее, $e = l^m e^*$, где $e^* \not\equiv 0\ (l)\ (m \leqslant n)$, $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_g$ — автоморфизмы K/R, переводящие $\mathfrak{q}$, соответственно, в $\mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_g$, и $\varkappa_i = \mathfrak{q}_i\,[\mathfrak{r}]$. Определим в K простой некритический примарный идеал $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени равенствами

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varkappa_2}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \ldots, \left(\frac{\varkappa_g}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \qquad (21)$$

и обозначим через π соответствующее ему, нормированное к $[\mathfrak{r}]$, примарное число. Перемножая равенства (21), получим:

$$\left(\frac{(\varkappa\varkappa_2\varkappa_3 \ldots \varkappa_g)^{e^*}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{e^*} \neq 1. \qquad (22)$$

Но, в силу (20),

$$(\varkappa\varkappa_2 \ldots \varkappa_g)^e = (\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}\mathfrak{q}_g)^e\,[\mathfrak{r}]^e = q\,[\mathfrak{r}^e]$$

и так как, по предположению, K содержит $\sqrt[lm]{q}$, то

$$(\varkappa\varkappa_2\ldots\varkappa_g)^{e^*}=\sqrt[lm]{q}\,[\mathfrak{r}]=\sqrt[lm]{q}\,\mathfrak{r}^{w_1e^*}\ldots\mathfrak{r}_e^{w_ee^*}\,\overline{\mathfrak{r}}^{le^*}.$$

Это равенство, однако, возможно только при $w_1\equiv w_2\equiv\ldots\equiv w_e\equiv 0\,(l)$, и, значит,

$$(\varkappa\varkappa_2\ldots\varkappa_g)^{e^*}=\sqrt[lm]{q}\;\overline{\mathfrak{r}}^{le^*},$$

т. е. $\overline{\mathfrak{r}}^{le^*}=(\varepsilon)$, где ε — сингулярное число. Таким образом, окончательно получаем:

$$(\varkappa\varkappa\ldots\varkappa_g)^{e^*}=\sqrt[lm]{q}\,\varepsilon.$$

Подставляя это в (22), будем иметь, на основании примарности $\mathfrak{p}$:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{e^*}=\left(\frac{\sqrt[lm]{q}\,\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\sqrt[lm]{q}}{\mathfrak{p}}\right)\mp\left(\frac{\sqrt[lm]{q}}{\pi}\right)\mp 1. \tag{23}$$

Воспользуемся следующей формулой для символа Лежандра, связывающей значение символа Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{m+1}$ l^{m+1}-й степени со значением символа Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ l-й степени:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_{m+1}^{l^m}. \tag{24}$$

Применяя ее к равенству (22), получим

$$\left(\frac{\sqrt[lm]{q}}{\pi}\right)=\left(\frac{\sqrt[lm]{q}}{\pi}\right)_{m+1}^{l^m}=\left(\frac{q}{\pi}\right)_{m+1}. \tag{23'}$$

Так как π — примарное число, то, по эйзенштейновскому закону взаимности и в силу формулы (24),

$$\left(\frac{q}{\pi}\right)_{m+1}=\left(\frac{\pi}{q}\right)_{m+1}=\left(\frac{\pi}{(\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_g)^e}\right)_{m+1}=\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}\mathfrak{q}_2\ldots\mathfrak{q}_g}\right)^{e^*}=\prod_{i=1}^{g}\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_i}\right)^{e^*}. \tag{25}$$

Из равенств (21), по лемме 6, следует, что

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_2}\right)=1,\quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_3}\right)=1,\ldots,\quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_g}\right)=1. \tag{25'}$$

Соотношения (23), (23′), (25), (25′) окончательно дают:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{e^*}=\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)^{e^*},$$

и так как $e^*\not\equiv 0\ (l)$, а π нормировано к $[\mathfrak{r}]$, то

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\mp 1,$$

чем лемма 10 для случая $\alpha=\varkappa=\mathfrak{q}\ [\mathfrak{r}]$ и доказана.

Пусть теперь $(\alpha) = \mathfrak{q}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{q}_s^{a_s}$ и $\varkappa_i = \mathfrak{q}_i[\mathfrak{r}]$, $i = 1, \ldots, s$. Тогда

$$\varkappa_1^{a_1} \ldots \varkappa_s^{a_s} = \mathfrak{q}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{q}_s^{a_s}[\mathfrak{r}] = (\alpha)[\mathfrak{r}]$$

и, значит, $[\mathfrak{r}] = (\varepsilon)$ — сингулярное число, т. е. $\alpha = \varepsilon \varkappa_1^{a_1} \ldots \varkappa_s^{a_s}$. Если π нормировано к $[\mathfrak{r}]$, то, по доказанному,

$$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_i}\right)^{a_i} = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\pi}{\varkappa_i}\right)^{a_i} = \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{\varkappa_i}{\pi}\right)^{a_i} = \left(\frac{\alpha\varepsilon^{-1}}{\pi}\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right).$$

Так как α от выбора $[\mathfrak{r}]$ не зависит, а π хоть к одной системе $[\mathfrak{r}]$ нормировано, то последнее равенство справедливо для всех α и всех примарных чисел π, соответствующих идеалу $\mathfrak{p}$. Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 11. *Если K абсолютно нормально и в K выполняется простейший закон взаимности, то он выполняется и в любом его подполе k для K-простых примарных идеалов.* (Простой примарный идеал из k абсолютной первой степени называется K-примарным простым идеалом, если он полностью разлагается в K на простые примарные идеалы).

Доказательство. Внимательно просматривая доказательства лемм 7—9, в которых используется нормальность основного поля, нетрудно заметить, что:

1. лемма 7, во всяком случае, верна для K-простых примарных идеалов из k;

2. при доказательстве леммы 8 нормальность основного поля используется только для доказательства существования простого примарного идеала $\mathfrak{q}$ абсолютной первой степени, удовлетворяющего равенствам (13) и (13'). Если для поля K простейший закон взаимности предполагается уже доказанным, то существование такого примарного простого идеала $\mathfrak{q}$ легко доказать. В самом деле, пусть π и π^* — примарные числа, соответствующие двум простым K-примарным идеалам $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}^*$ из k. Определим в K простой примарный идеал $\mathfrak{Q}$ абсолютной первой степени равенствами

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{Q}}\right)_K \neq 1, \quad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{Q}}\right)_K \neq 1.$$

и пусть Q — примарное число, соответствующее этому идеалу. По формуле (19) тогда получим:

$$\left(\frac{\pi}{Q}\right)_K = \left(\frac{Q}{\pi}\right)_K \neq 1, \quad \left(\frac{\pi^*}{Q}\right)_K = \left(\frac{Q}{\pi^*}\right)_K \neq 1,$$

откуда при помощи формул (1) и (2) введения следует:

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{Q}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{Q}}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}^*}\right) \neq 1,$$

где $\varkappa = N_{K/k}(Q)$ — примарное число, соответствующее идеалу $\mathfrak{q}$ из k. Таким образом, лемма 8 верна для простых K-примарных идеалов из k при произвольном поле k.

3. Так как доказательство леммы 9 опирается только на лемму 6, доказанную для произвольного поля k, и на лемму 8, которая, как мы видели, во всяком случае верна для простых K-примарных идеалов из k, то она также верна для этих идеалов.

Переходим к доказательству леммы 11. Согласно ранее сказанному, доказательство этой леммы сводится к доказательству равенства (19) для $\alpha = \varkappa = \mathfrak{q}[\mathfrak{r}]$, где $\mathfrak{q}$ — произвольный простой идеал из k и π — нормированное к $[\mathfrak{r}]$ примарное число, соответствующее простому K-примарному идеалу $\mathfrak{p}$, а это, в свою очередь, по лемме 9, достаточно доказать только для одного простого K-примарного идеала $\mathfrak{p}$, для которого

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1,$$

и даже для одного соответствующего ему примарного числа π.

Рассмотрим следующие случаи:

1) $\mathfrak{q}$ не есть l-я степень идеала из K.

Определим в K простой примарный идеал $\mathfrak{P}$ абсолютной первой степени так, чтобы

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{P}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\rho_i}{\mathfrak{P}}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, e),$$

где $\rho_i = \mathfrak{r}_i[R]$, а $[R]$ имеет в K то же значение, что и $[\mathfrak{r}]$ в k. Пусть Π—соответствующее ему примарное число. По предположению,

$$\left(\frac{\Pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\Pi}\right) \neq 1.$$

По свойствам (1) и (2) символа Лежандра (см. введение) отсюда следует:

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{\pi}\right) \neq 1,$$

где $\pi = N_{K/k}(\Pi)$ — нормированное к $[\mathfrak{r}]$ примарное число, соответствующее простому K-примарному идеалу $\mathfrak{p}$.

2) $K = k(\sqrt[l]{\mu})$ и в K $\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}^l$. По теореме Гильберта-Бауэра (см. § 1 настоящей работы), в K существует идеал $\mathfrak{Q}$, все простые делители которого абсолютной первой степени, такой, что $\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1 = A$, где A — число из K. Тогда $NA = \varkappa\varkappa_1$.

Определим в k простой некритический примарный идеал $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени равенствами:

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1.$$

По предположению, можно написать:

$$\left(\frac{A}{\pi}\right)_K = \left(\frac{\pi}{A}\right)_K,$$

где π — примарное число, соответствующее идеалу $\mathfrak{p}$. По формулам (1) и (2) введения, отсюда следует:

$$\left(\frac{\varkappa\varkappa_1}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{\varkappa\varkappa_1}\right). \tag{26}$$

Так как для $\varkappa_1$, в силу случая 1), равенство

$$\left(\frac{\varkappa_1}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)$$

уже доказано, то, сокращая равенство (26) на $\left(\frac{\pi}{\varkappa_1}\right)=\left(\frac{\varkappa_1}{\pi}\right)$, получим

$$\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\neq 1.$$

3) В k существует конечное число простых идеалов $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_t$, которые в K становятся l-ми степенями. Пусть $q_1 \ldots, q_t$ — рациональные простые числа, делящиеся на $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_t$, и пусть $e_1, \ldots, e_t$ — их показатели ветвлений в композите $\overline{K}$ всех сопряженных с K полей. Пусть, далее, $e_i = l^{n_i} e_i^*$, где $e_i^* \not\equiv 0 \ (l)$,

$$\widetilde{K}=\overline{K}\ (\sqrt[l^{n_1}]{q_1}, \ldots, \sqrt[l^{n_t}]{q_t}, \zeta_m),\ \widetilde{k}=k\,(\sqrt[l^{n_1}]{q_1}, \ldots, \sqrt[l^{n_t}]{q_t}, \zeta_m)$$

и m — достаточно большое число. По лемме 10, в $\widetilde{K}$ имеет место простейший закон взаимности.

В $\widetilde{K}/\widetilde{k}$ все простые идеалы, взаимно простые с l, имеют показатели ветвления, взаимно простые с l. Действительно, в $\widetilde{K}/R$ разветвлены только $q_1, \ldots, q_t$. Если $\mathfrak{Q}$ — простой делитель одного из них в $\widetilde{k}$, а $\widetilde{\mathfrak{Q}}$ — в $\widetilde{K}$, то $\mathfrak{Q}=\widetilde{\mathfrak{Q}}^{l^n e}\mathfrak{a}$, где $(l, e)=1$ $(\mathfrak{a}, \widetilde{\mathfrak{Q}})=1$. Из этого, а также из того, что

$$\widetilde{K}=\overline{K}\left(\sqrt[l^{n_1}]{q_1}, \ldots, \sqrt[l^{n_t}]{q_t}, \zeta_m\right),$$

следует, что дискриминант $\widetilde{K}/\widetilde{k}$ состоит только из делителей l. Из схемы расположения полей и их ветвлений (см. рис. 1) видно, что в $\widetilde{K}/\widetilde{k}$ показатель ветвления $\mathfrak{Q}$ равен e, т. е. взаимно прост с l.

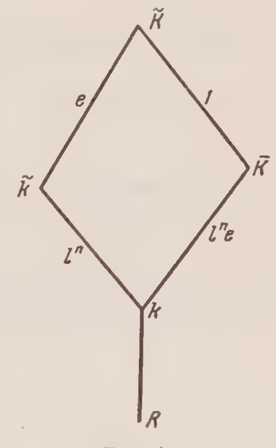


Рис. 1

Поэтому, согласно 1), закон взаимности имеет место и в $\overline{K}$, а тогда, в силу 2), он имеет место и в k.

Определение. Два идеала $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ из k будем называть l-взаимно простыми, если их общие множители входят в них с показателями, кратными l.

ЛЕММА 12. *Символ $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)$ определен для μ и $\mathfrak{a}$ l-простых.*

Доказательство. Пусть μ и $\mathfrak{a}$ l-просты и $\mu = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_\mu^l$, где $\mathfrak{M}$ взаимно просто с $\mathfrak{a}$. Выберем в классе идеалов, в котором лежит $\mathfrak{a}_\mu$, идеал $\mathfrak{b}$, простой с $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{a}_\mu = \mathfrak{b}\alpha$, где α — число из k, и

$$\mu = \mathfrak{m}\mathfrak{a}_\mu^l = \mathfrak{m}\mathfrak{b}^l\alpha^l = \mu'\alpha^l,$$

причем μ' взаимно просто с $\mathfrak{a}$. По определению символа Лежандра,

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)=\left(\frac{\mu'}{\mathfrak{a}}\right).$$

Определение. Число μ, взаимно простое с $\mathfrak{l}_i$, называется гиперпримарным по простому идеалу $\mathfrak{l}_i$, если оно для некоторого ξ удовлетворяет сравнению

$$\mu \equiv \xi^{l} (\mathfrak{l}_i^{le_i+1}).$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* ω — *сингулярное примарное число из* k, *гиперпримарное по простым идеалам* $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_t$, $t \leqslant z$, *и* α — *произвольное число из* k, *взаимно простое с* $\mathfrak{l}_{t+1}, \ldots, \mathfrak{l}_z$; *тогда* $\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = 1$.

Доказательство. По предположению, α имеет вид:

$$\mathfrak{l}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{l}_t^{a_t} \mathfrak{a} = (\alpha),$$

где $\mathfrak{a}$ взаимно просто с l. Докажем нашу теорему сначала для случая $t = 0$, т. е. когда α взаимно просто с l. Для доказательства возьмем произвольный примарный идеал $\mathfrak{p}$ абсолютной первой степени, для которого доказан простейший закон взаимности. По лемме 12, такой идеал $\mathfrak{p}$ существует. Пусть π — соответствующее ему примарное число. Так как $\pi\omega$ — также примарное число, соответствующее идеалу $\mathfrak{p}$, то можно написать:

$$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) = \left(\frac{\alpha}{\pi\omega}\right) = \left(\frac{\pi\omega}{\alpha}\right) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right),$$

откуда

$$\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = 1.$$

Пусть теперь $t > 0$. Так как ω гиперпримарно по простым идеалам $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_t$, то в поле $K = k\left(\sqrt[l]{\omega}\right)$ они полностью разлагаются:

$$\mathfrak{l}_i = N_{K/k}(\mathfrak{L}_i).$$

Пусть $\alpha = \mathfrak{l}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{l}_t^{a_t} \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$, по условию, просто с l. Определим в поле K число A вида

$$A = \mathfrak{L}_1^{a_1} \ldots \mathfrak{L}_t^{a_t} \mathfrak{A},$$

где $\mathfrak{A}$ — какой-нибудь идеал из K, простой с l. Такое число, как известно из основ теории алгебраических чисел, существует в K. Тогда имеем:

$$\frac{\alpha}{NA} = \alpha' = \frac{\mathfrak{a}}{N\mathfrak{A}}.$$

Так как $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{A}$ просты с l, то α' также просто с l. Теперь имеем

$$\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) = \left(\frac{\omega}{NA\cdot\alpha'}\right) = \left(\frac{\omega}{NA}\right)\left(\frac{\omega}{\alpha'}\right).$$

Так как α' просто с l, то $\left(\frac{\omega}{\alpha'}\right) = 1$. Вычислим значение символа $\left(\frac{\omega}{NA}\right)$. По формуле (5) введения,

$$\left(\frac{\omega}{NA}\right) = \left(\frac{\omega}{A}\right)_k = 1.$$

Следствие. *e функций идеала* $\mathfrak{a}$, *взаимно простого с* l,

$$\chi_i(\mathfrak{a}) = \left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{a}}\right),$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_e$ — *какой-нибудь базис группы сингулярных примарных чисел, являются характерами группы соединений классов идеалов.*

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $0 \leqslant r \leqslant s \leqslant t \leqslant r$ *и* α *и* β — *два числа из* k, *удовлетворяющие условиям:* α *просто с* $\mathfrak{l}_{r+1}, \ldots, \mathfrak{l}_z$ *и удовлетворяет для надлежащих* $\xi, \eta \in K$ *сравнениям:*

$$\alpha \equiv \xi^l (\mathfrak{l}_{r+1}^{le_{r+1}+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{le_s+1}, \tag{27}$$

$$\alpha \equiv \eta^l (\mathfrak{l}_{t+1}^{le_{t+1}} \ldots \mathfrak{l}_z^{le_z}), \tag{27'}$$

а β *просто с* $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_r, \mathfrak{l}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{l}_z$ *и удовлетворяет сравнениям:*

$$\beta \equiv \rho^l (\mathfrak{l}_{s+1}^{le_{s+1}} \ldots \mathfrak{l}_t^{le_t}), \tag{28}$$

$$\beta \equiv \tau^l (\mathfrak{l}_1^{le_1+1} \ldots \mathfrak{l}_r^{le_r+1}), \tag{28'}$$

где $\rho, \tau \in k$. *Тогда имеет место равенство:*

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим куммерово поле $K = k(\sqrt[l]{\alpha\beta^{-1}})$. В нем

$$\alpha = \mathfrak{A}^l, \quad \beta = \mathfrak{B}^l, \tag{29}$$

где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — идеалы из K. Из равенства (29) следует, что α и β в K — сингулярные числа. Далее, так как в K

$$\alpha = \beta (\sqrt[l]{\alpha\beta^{-1}})^l, \tag{30}$$

то из сравнений (28) и (28′) следует, что в K выполняются сравнения

$$\alpha \equiv (\rho \sqrt[l]{\alpha\beta^{-1}})^l \; (\mathfrak{l}_{s+1}^{le_{s+1}} \ldots \mathfrak{l}_t^{le_t}), \tag{31}$$

$$\alpha \equiv (\tau \sqrt[l]{\alpha\beta^{-1}})^l \; (\mathfrak{l}_1^{le_1+1} \ldots \mathfrak{l}_r^{le_r+1}). \tag{31'}$$

Из сравнений (27) и (31) следует сравнение:

$$\alpha \equiv A^l (\mathfrak{l}_1^{le_1+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{le_s+1}) \tag{32}$$

и, аналогично, из сравнений (27′) и (31′) — сравнение

$$\alpha \equiv B^l (\mathfrak{l}_{s+1}^{le_{s+1}} \ldots \mathfrak{l}_z^{le_z}), \tag{32'}$$

где A и B — надлежащие числа из K. Из (29), (32) и (32′) теперь следует, что α в K — сингулярное примарное число, гиперпримарное по простым делителям $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$. Из равенства (29), по формуле (5) введения, имеем:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{A}}\right)_K \tag{33}$$

и, аналогично,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{B}}\right)_K. \tag{33'}$$

Так как $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}=\sqrt[l]{\alpha\beta^{-1}}$, то в $K\ \mathfrak{A}\sim\mathfrak{B}$. Пусть $\mathfrak{C}$ — идеал из K, простой с α, β, l и эквивалентный в K идеалу $\mathfrak{A}$; тогда:

$$\mathfrak{A}=\Gamma\mathfrak{C}, \tag{34}$$

$$\mathfrak{B}=\Delta\mathfrak{C}. \tag{34'}$$

Так как α просто с $\mathfrak{l}_{r+1}\ldots\mathfrak{l}_z$, а $\mathfrak{C}$ просто с l, то Γ просто с $\mathfrak{l}_{r+1}\ldots\mathfrak{l}_z$ и, аналогично, Δ просто с $\mathfrak{l}_1\ldots\mathfrak{l}_r$, $\mathfrak{l}_{s+1}\ldots\mathfrak{l}_z$ (Γ и Δ — числа из K).

Из равенства (33) теперь имеем:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\beta}{\Gamma}\right)_K\left(\frac{\beta}{\mathfrak{C}}\right)_K \tag{35}$$

и, аналогично, из (33) и (34):

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)_K\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right)_K. \tag{35'}$$

Так как, по доказанному, α и β — сингулярные примарные числа, гиперпримарные по простым делителям $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$, то, по теореме 5,

$$\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)_K=1, \tag{36}$$

$$\left(\frac{\beta}{\Gamma}\right)_K=1. \tag{36'}$$

Подставляя (36) в (35') и (36') в (35), получим:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{C}}\right)_K,$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\beta}{\mathfrak{C}}\right)_K,$$

откуда, в силу равенства (30),

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

ТЕОРЕМА 7. *Для того чтобы идеал $\mathfrak{a}$ из k, взаимно простой с l, можно было дополнить умножением на l-ю степень идеала до примарного числа поля, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a}$ был примарным идеалом в k.*

Доказательство. Справедливость этой теоремы следует из того, что $m'+e$ функций χ_i идеала $\mathfrak{a}$

$$\chi_i(\mathfrak{a})=\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{a}}\right),$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m'+e}$ — базис группы сингулярных чисел, образуют систему характеров группы $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^l(\alpha)$, где $\alpha\equiv 1\ (\mathfrak{l}^l)$ (то, что эти характеры независимы, следует из теоремы 3).

Пусть k — произвольное поле алгебраических чисел, содержащее $\neq 1$ корень l-й степени из единицы ζ. Если $(1-\zeta)=\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{l}$ разлагается в k по закону

$$\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_1^{l_1}\ldots\mathfrak{l}_z^{l_z},$$

то имеет место

ЛЕММА 13. *Кольцо* $\mathfrak{l}$-*адических чисел* $k(\mathfrak{l})$ *над полем* k *распадается в прямую сумму полей* $k_i = k(\mathfrak{l}_i)$ ($k(\mathfrak{l}_i)$ — $\mathfrak{l}_i$-*адическое замыкание* k).

Доказательство см. в (7), стр. 105.

ЛЕММА 14. *Символ* $[\mu, \nu] = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{-1}$ *непрерывен в* $\mathfrak{l}$, *определен в* $k(\mathfrak{l})$, *мультипликативен там по обеим переменным и обладает свойством* (6) *введения. В частности отсюда следует, что если* ν *есть норма в* $k(\sqrt[l]{\mu}, \mathfrak{l})$, *то* $[\mu, \nu] = 1$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.

Следствие. *Если* A *и* B — *два числа из* $k(\mathfrak{l})$ *и если, по крайней мере, одно из них* — l-*я степень, то* $[A, B] = 1$.

Введем обозначения. Пусть λ_i — простые числа из k_i. Каждое число A из $k(\mathfrak{l})$, согласно лемме 13 и теореме о каноническом разложении [см. (1) стр. 120], представляется с точностью до множителя, являющегося l-й степенью числа из $k(\mathfrak{l})$ (мы это будем обозначать значком $\approx$), однозначно вектором

$$A = (A_1, \ldots, A_z), \text{ где } A_i \approx \lambda_i^{a_i} E(\alpha^{(i)}) \prod_j E(\alpha_j^{(i)}, \lambda_i^j),$$

а $\alpha^{(i)}$, $\alpha_j^{(i)}$ взяты из мультипликативной системы представителей R_i идеала (λ_i) из k_i. Так как векторы A умножаются и складываются покомпонентно, то A можно представить также в виде

$$A = (\lambda_1^{a_1}, \ldots, \lambda_z^{a_z})(E(\alpha^{(1)}), \ldots, E(\alpha^{(z)})) \prod_j (E(\alpha_j^{(1)}, \lambda_1^j), \ldots, E(\alpha_j^{(z)}, \lambda_z^{(j)})). \quad (37)$$

Это представление вектора будем называть каноническим представлением.

Введем для краткости следующие обозначения: вектор $(\lambda_1^{a_1}, \ldots, \lambda_z^{a_z})$ обозначим просто через (λ^a), вектор $(E(\alpha_j^{(1)}, \lambda_1^j), \ldots, E(\alpha_j^{(z)}, \lambda_z^j))$ — через $E(\alpha_j, \lambda^j)$ и вектор $(E(\alpha^{(1)}), \ldots, E(\alpha^{(z)}))$ — через $E(\alpha)$. В этих обозначениях равенство (37) перепишется так:

$$A = (\lambda^a) E(\alpha) \prod_j E(\alpha_j, \lambda^j).$$

ТЕОРЕМА 8. (Закон взаимности). *Для любых чисел* A *и* B *из* $k(\mathfrak{l})$ *выполняется равенство*

$$[A, B] = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{z} \left(\frac{A, B}{\mathfrak{l}_i}\right) = (A, B). \quad (38)$$

Доказательство. Вследствие теоремы 6, для $i \neq j$

$$[A_i, B_j] = 1$$

и потому равенство (38) достаточно доказать только для $A = A_1$, $B = B_1$, что, в свою очередь, может быть, точно так же, как и при доказательстве инвариантности символа Шафаревича, сведено к случаям:

1. $A_1 = \lambda$, $B_1 = E(\alpha, \lambda^a)$, $a \not\equiv 0 \ (l)$,
2. $A_1 = \lambda$, $B_1 = E(\alpha)$.

При этом λ есть $\mathfrak{l}_1$-простое число из k. Докажем равенство (38) для первого случая. Так как правая его часть

$$(A, B) = 1,$$

то для этого достаточно доказать, что и левая его часть

$$[A, B] = 1.$$

Но последнее равенство следует из замечания к лемме 14, так как $E(\alpha, \lambda^a)$ есть норма числа из $k(\sqrt[l]{\lambda}, \mathfrak{l})$ [см. (1), стр. 128].

Переходим ко второму случаю. Так как $E(\alpha)$ есть число из $\mathfrak{K}(\zeta)$, где $\mathfrak{K}$ — поле инерции k_1, а $N_{k/\mathfrak{K}(\zeta)}(\lambda) = (1-\zeta)\varepsilon$, где ε — единица, то, по формуле (3) введения, которая, согласно лемме 14, верна и для кольца $k(\mathfrak{l})$, можно написать:

$$[\lambda, E(\alpha)] = [(1-\zeta)\varepsilon, E(\alpha)]_{\mathfrak{K}(\zeta)} = [1-\zeta, E(\alpha)]\,[\varepsilon, E(\alpha)] = [1-\zeta, E(\alpha)],$$

так как, по доказанному, $[\varepsilon, E(\alpha)] = 1$. Вычислим выражение $[1-\zeta, E(\alpha)]$.

Есл... $\equiv a(\mathfrak{l}^l)$, где a — число из k, то мы получим следующие равенства:

$$[1-\zeta, E(\alpha)] = [1-\zeta, 1 - a^{l^2}(1-\zeta)^l] =$$
$$= \left(\frac{1-\zeta}{1-a^{l^2}(1-\zeta)^l}\right) = \prod_{i=0}^{l-1}\left(\frac{1-\zeta}{1-a^l(1-\zeta)\zeta^i}\right),$$

которые, вследствие сравнения

$$1-\zeta \equiv -a^{-l}\zeta^{-1}\left(\operatorname{mod}(1-a^l\zeta^i(1-\zeta)\right),$$

можно записать в виде:

$$[1-\zeta, E(\alpha)] = \prod_{i=0}^{l-1}\left(\frac{-a^{-l}\zeta^{-i}}{1-a^l\zeta^i(1-\zeta)}\right) = \prod_{i=0}^{l-1}\left(\frac{\zeta}{1-a^l\zeta^i(1-\zeta)}\right)^{-i},$$

но, согласно п. 4 введения,

$$\left(\frac{\zeta}{1-a^l\zeta^i(1-\zeta)}\right) = \zeta^{\frac{\operatorname{Sp}\left(\lg(1-a^l\zeta^i(1-\zeta))\right)}{l}}.$$

Поэтому

$$[1-\zeta, E(\alpha)] = \zeta^{-\frac{1}{l}\sum\limits_{i=0}^{l-1} i\,\operatorname{Sp}(\lg 1 - a^l\zeta^i(1-\zeta))} \tag{39}$$

Вычислим показатель правой части последнего равенства. Разлагая $\lg(1-a^l\zeta^i(1-\zeta))$ в ряд и вынося i за знак следа, получим:

$$-\frac{1}{l}\sum i\,\operatorname{Sp}\left(\lg(1-a^l\zeta^i(1-\zeta)\right) = \frac{1}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\operatorname{Sp}\left(\frac{(-1)^{r-1}}{r}a^{rl}(1-\zeta)^r\sum_{i=0}^{l-1} i\zeta^{ir}\right).$$

Так как

$$\sum i\zeta^{ir} = \frac{l}{\zeta^r - 1},$$

то

$$-\frac{1}{l}\sum i\,\mathrm{Sp}\,(\lg(1-a^l\zeta^i(1-\zeta)) = \frac{1}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{Sp}\left(\frac{(-1)^{r-1}}{r}a^{rl}(1-\zeta)^r\frac{l}{\zeta^r-1}\right).$$

Вынося в последнем равенстве l за знак следа и отбрасывая все члены с $r>1$, от чего равенство (39) не изменится, получим:

$$-\frac{1}{l}\sum i\,\mathrm{Sp}\,(\lg(1-a^l\zeta^i(1-\zeta))\equiv-\sum\mathrm{Sp}\,(a^l)\equiv-\sum\mathrm{Sp}\,(\alpha^{l-1})\,(l)$$

и

$$[\lambda, E(\alpha)]_k=[1-\zeta, E(\alpha)]_{\mathfrak{K}(\zeta)}=\zeta^{-\mathrm{Sp}(\alpha^{l-1})}=\zeta^{S(\alpha)},$$

где последний след берется в $\mathfrak{K}/R_0$, а это как раз равно $(\lambda, E(\alpha))$.

§ 3. Теория абелевых расширений (теория полей классов)

На протяжении всего этого параграфа k будет обозначать произвольное поле алгебраических чисел, содержащее отличный от единицы корень l-й степени из 1. Для дальнейшего нам понадобится другая форма закона взаимности, которая дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 9. *Для любых чисел μ и ν из k выполняется равенство*

$$(\mu,\nu)=\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=1, \tag{1}$$

где бесконечное произведение распространяется на все простые идеалы из k.

Доказательство. Заметим, что это произведение во всяком случае имеет смысл, так как для почти всех $\mathfrak{p}$

$$\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=1.$$

Пусть сначала μ и ν взаимно просты и

$$\mu=\mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_r^{a_r}\ \nu=\mathfrak{q}_1^{b_1}\cdots\mathfrak{q}_s^{b_s}.$$

Тогда

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}_i}\right)\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{q}_j}\right)\prod_{k=1}^{z}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{l}_k}\right)=$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}_i}\right)^{-a_i}\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{q}_j}\right)^{b_j}\prod_{k=1}^{z}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{l}_k}\right)=\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{-1}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\prod_{k=1}^{z}\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{l}_k}\right),$$

а это, по закону взаимности, как раз равно 1.

Пусть теперь μ и ν l-взаимно просты, т. е. все их общие делители входят в μ и ν с показателями, кратными l. Если $\mu=\mathfrak{a}_\mu^l\mathfrak{m}$ и $\nu=\mathfrak{a}_\nu^l\mathfrak{n}$, где $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})=1$, то, выбирая в классе, в котором лежит $\mathfrak{a}_\mu$, идеал $\mathfrak{b}$, взаимно простой с ν, получим $\mathfrak{a}_\mu=\mathfrak{b}_\alpha$ и $\mu=\mathfrak{a}_\mu^l\mathfrak{m}=\mathfrak{b}^l\mathfrak{m}\alpha^l=\mu'\alpha^l$, причем μ' уже взаимно просто с ν. Теперь легко находим

$$(\mu,\nu)=\prod\left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{p}}\right)=\prod\left(\frac{\mu',\nu}{\mathfrak{p}}\right)=(\mu',\nu)$$

и так как (μ',ν_1) взаимно просты, то, по доказанному,

$$(\mu',\nu)=1,$$

чем равенство (1) и доказано. Пусть, наконец, μ и ν — любые числа из k. Будем доказывать формулу (1) индукцией по числу общих простых делителей μ и ν. Если μ и ν имеют общим множителем только один простой идеал $\mathfrak{p}$, т. е. $\mu = \mathfrak{p}^m \mathfrak{m}$ и $\nu = \mathfrak{p}^n \mathfrak{n}$, где $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \mathfrak{a}^l$, то, не ограничивая общности рассуждений, можно принять $m = n = 1$, так как в противном случае, определяя числа m', n' из сравнений

$$mm' \equiv 1\,(l) \text{ и } nn' \equiv 1\,(l),$$

мы бы заменили числа μ и ν числами $\mu' = \mu^{m'}$, $\nu' = \nu^{n'}$ требуемого вида, причем

$$(\mu', \nu') = (\mu^{m'}, \nu^{n'}) = (\mu, \nu)^{m'n'}.$$

Итак, пусть $\mu = \mathfrak{p}\mathfrak{m}$ и $\nu = \mathfrak{p}\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ l-просты.

Рассмотрим поле $K = k(\sqrt[l]{\nu\mu^{-1}})$. В нем $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}^l$ и $\mathfrak{n} = \mathfrak{N}^l$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{M}^{-1} = \sqrt[l]{\nu\mu^{-1}}$. Далее,

$$\prod\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{q}}\right) = \prod_{\mathfrak{q}/\mathfrak{m}}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{q}}\right)\prod_{\mathfrak{q}/\mathfrak{n}}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{q}}\right)\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right)\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right) =$$
$$= \left(\frac{\nu}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{n}}\right)\left(\frac{\mu\nu^{-1}}{\mathfrak{p}}\right)\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right).$$

Применяя к этому равенству формулы (1) и (2) введения, получим

$$(\mu, \nu) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{M}}\right)_K^{-1}\left(\frac{\mu}{\mathfrak{N}}\right)_K\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mathfrak{p}}\right)_K\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right).$$

Если идеалы $R_1, \ldots, R_e$ из K (представители e независимых соединений классов идеалов из K) выбраны так, чтобы

$$\left(\frac{\nu}{R_i}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mu}{R_i}\right) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, e)$$

и $M = \mathfrak{M}[R]$, $N = \mathfrak{N}[R]$, то предыдущее равенство перепишется в виде

$$(\mu, \nu) = \left(\frac{\nu}{M}\right)_K^{-1}\left(\frac{\mu}{N}\right)_K\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mathfrak{p}}\right)_K\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right). \tag{2}$$

Так как

$$\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mathfrak{p}}\right)_K = \left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mathfrak{p}\mathfrak{M}^l}\right)_K = \left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\right)_K = \left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mu}\right)_K$$

и $NM^{-1} = \mathfrak{N}\mathfrak{M}^{-1}\varepsilon = \sqrt[l]{\nu\mu^{-1}}\,\varepsilon$, где ε — сингулярное число из K, то $N = M\sqrt[l]{\nu\mu^{-1}}\,\varepsilon$. Подставляя это в (2), получим

$$(\mu, \nu) = \left(\frac{\nu}{M}\right)^{-1}\left(\frac{\mu}{M}\right)\left(\frac{\mu}{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mu}\right)\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_i}\right). \tag{3}$$

Но

$$\left(\frac{\mu}{M}\right)\left(\frac{\nu}{M}\right)^{-1} = \left(\frac{\mu\nu^{-1}}{M}\right) = 1, \tag{4}$$

а

$$\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}}}\right)^{-1},$$

по закону взаимности, равно

$$\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\sqrt[l]{\mu\nu^{-1}},\ \mu}{\mathfrak{L}_i}\right),$$

где произведение распространено на все простые делители l в K, что, в свою очередь, по формуле (4) введения, равно

$$\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{\mu\nu}{\mathfrak{l}_i}\right)^{-1}.$$

Подставляя это в (3) и используя (4), получаем:

$$(\mu,\ \nu)=1.$$

Пусть, наконец, теорема 9 доказана для всех чисел μ' и ν', имеющих не более $n-1$ общих простых множителей и

$$\mu=\mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_n^{a_n}\mathfrak{m},\quad \nu=\mathfrak{p}_1^{b_1}\cdots\mathfrak{p}_n^{b_n}\mathfrak{n},$$

где $a_i\not\equiv 0\,(l)$, $b_i\not\equiv 0\,(l)$ $(i=1, 2, n)$ и $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ l-просты. Если $\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_e$, $\mathfrak{w}_1,\ldots,\mathfrak{w}_e$ — две системы простых идеалов из независимых соединений и $\mathfrak{r}_i\times\mu\nu$, $\mathfrak{w}_i+\mu\nu\,(i=1, 2,\ldots, e)$, то пусть

$$\mathfrak{p}_n[\mathfrak{r}]=\pi_1,\quad \mathfrak{p}_n[\mathfrak{w}]=\pi_2$$

и

$$\mu'=\mu\pi_1^{-a_n}=\mathfrak{p}_1^{a_1}\cdots\mathfrak{p}_{n-1}^{a_{n-1}}\mathfrak{m}',\quad \nu'=\nu\pi_2^{-b_n}=\mathfrak{p}_1^{b_1}\cdots\mathfrak{p}_{n-1}^{b_{n-1}}\mathfrak{p}',$$

где $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ l-просты; тогда

$$\mu=\mu'\pi_1^{a_n},\quad \nu=\nu'\pi_2^{b_n},$$

причем μ', ν' имеют уже не более $n-1$ общих простых множителей:

$$(\mu,\nu)=(\mu',\nu')(\mu'\pi_2^{b_n})(\pi_1^{a_n},\nu')(\pi_1^{a_n},\pi_2^{b_n}).$$

Первые три множителя правой части этого равенства равны 1 по индуктивному предположению, четвертый же множитель $(\pi_1,\pi_2)^{a_nb_n}$ равен 1 по доказанному. Поэтому $(\mu,\nu)=1$.

Определение. Пусть μ — независимое число из k. Группа H_A идеалов $\mathfrak{a}$ из k, взаимно простых с ведущим идеалом $\mathfrak{f}$ куммерова расширения $K=k(\sqrt[l]{\mu})$, для которых $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)=1$, называется группой Артина, ассоциированной с расширением K/k.

ТЕОРЕМА 10. *Группа H_A совпадает с группой $\mathfrak{h}$ (группой Такаги), введенной в n° 9 § 1, т. е. каждый идеал $\mathfrak{a}$ из k, удовлетворяющий равенств $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right)=1$, имеет вид*

$$\mathfrak{a}=N_{K/k}(\mathfrak{A})(\alpha),$$

где $\mathfrak{A}$ — идеал из K, а $\alpha\equiv 1\,(\mathfrak{f})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{a} \in \mathfrak{h}$ и, значит, $\mathfrak{a} = N\mathfrak{A}(\alpha)$, где $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f})$. По закону взаимности,

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\mu}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mu}\right) \prod \left(\frac{\alpha,\,\mu}{\mathfrak{l}_i}\right) = 1, \quad \mathfrak{a} \in H_{\mathbf{A}},$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{h} \leqslant H_{\mathbf{A}}. \tag{5}$$

Если $(\mu) = \mathfrak{d}_1^{a_1} \cdots \mathfrak{d}_t^{a_t}$, то пусть H_1 будет группа взаимно простых с μ и l идеалов из k вида $\mathfrak{a}^l(\alpha)$, где $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f})$, H_2 — группа идеалов вида $\mathfrak{d}_1^{x_1} \cdots \mathfrak{d}_t^{x_t}\, \mathfrak{b}^l(\beta)$, где $0 \leqslant x_i < l$, а (β) — любой главный идеал из k, взаимно простой с $\mathfrak{f}$, Θ — группа чисел вида $(\theta) = \mathfrak{d}_1^{x_1} \cdots \mathfrak{d}_t^{x_t}\, \mathfrak{b}^l$ и ω — группа сингулярных примарных чисел $\equiv \xi^l\,(\mathfrak{d}_1 \ldots \mathfrak{d}_t)$.

$r(\Theta)$ функций идеала $\mathfrak{a}$, взаимно простого с $\mathfrak{f}$,

$$\chi_i(\mathfrak{a}) = \left(\frac{\theta_i}{\mathfrak{a}}\right),$$

где $\theta_1, \ldots, \theta_{r(\Theta)}$ — базис группы Θ, обращаются в 1 на H_1 и являются, следовательно, характерами группы $\mathfrak{a}/H_1$. Определим $r(\Theta)$ простых идеалов $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{r(\Theta)}$ равенствами

$$\left(\frac{\theta_i}{\mathfrak{q}_j}\right) = \zeta^{\tau_{ij}} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, r(\Theta)).$$

Идеалы $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{r(\Theta)}$ лежат в разных классах $\mathfrak{a}/H_1$. В самом деле, если бы $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1^{y_1} \ldots \mathfrak{q}_{r(\Theta)}^{y_{r(\Theta)}} \in H_1$, то

$$\chi_i(\mathfrak{b}) = \left(\frac{\theta_i}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\theta_i}{\mathfrak{q}_i}\right)^{y_i} = 1,$$

а так как $\left(\frac{\theta_i}{\mathfrak{q}_i}\right) \neq 1$, то отсюда следовало бы, что $y_i \equiv 0\,(l)$ для $i = 1, 2, \ldots, r(\Theta)$. Из сказанного вытекает, что

$$r(\Theta) \leqslant r(\mathfrak{a}/H_1). \tag{6}$$

Аналогично, для группы ω находим

$$r(\omega) \leqslant r(\mathfrak{a}/H_2). \tag{7}$$

Определим ранг $\mathfrak{a}/H_1$. Каждый идеал $\mathfrak{a}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{r}_l^{x_l}\, \bar{\mathfrak{r}}^l(\alpha). \tag{8}$$

По лемме 1, группа классов вычетов mod $\mathfrak{f}$ имеет ранг $2m' + t$. Так как среди $2m' + t$ элементов ее базиса $m' + e - r(\omega)$ можно считать сингулярными, то пусть ε_i α $(i = 1, 2, \ldots, m' + e - r(\omega)$; $j = 1, 2, \ldots, m' + t - e + r(\omega))$, будет базисом этой группы, в котором ε_i — сингулярные числа. Каждое число $\alpha \in k$ можно представить в виде

$$\alpha = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+e-r(\omega)}^{u_{m'+e-r(\omega)}}\, \alpha_1^{v_1} \ldots \alpha_{m'+t-e+r(\omega)}^{v_{m'+t-e+r(\omega)}}\, \beta^l \gamma,$$

где $\gamma \equiv 1\,(\mathfrak{f})$. Подставляя это в (4), получаем

$$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{r}_1^{x_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{x_e}\, (\alpha_1)^{v_1} \ldots (\alpha_{m'+t-e+r(\omega)})^{v_{m'+t-e+r(\omega)}}\, \mathfrak{b}^l$$

и, значит,

$$r(\mathfrak{a}/H_1) = e + m' + t - e + r(\omega) = m' + t + r(\omega). \qquad (9)$$

Ранг $\mathfrak{a}/H_2$ определяется еще проще. Если $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_t$ лежат в d независимых соединениях, то

$$r(\mathfrak{a}/H_2) = e - d. \qquad (10)$$

Из (6), (9) и, соответственно, из (7), (10) получаем:

$$r(\Theta) \leqslant m' + t + r(\omega),$$

$$r(\omega) \leqslant e - d.$$

Следовательно,

$$r(\Theta) \leqslant m' + t + e - d.$$

Так как, с другой стороны, $r(\Theta)$, очевидно, $\geqslant m' + t - d + e$, то окончательно получаем

$$r(\Theta) = m' + t + e - d = r(\mathfrak{a}/H_1).$$

Пусть $\mu = \theta_1$ и $H = \{H_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{r(\Theta)}\}$, тогда

$$r(\mathfrak{a}/H_1) = r(\mathfrak{a}/H) + r(\Theta) - r(H/H_1) = r(\mathfrak{a}/H) - 1 + r(\Theta)$$

и, значит,

$$r(\mathfrak{a}/H) = 1.$$

Вследствие $H \leqslant \mathfrak{h}$ имеем:

$$r(\mathfrak{a}/\mathfrak{h}) \leqslant r(\mathfrak{a}/H) = 1 = r(\mathfrak{a}/H_A).$$

Сравнивая последнее неравенство с неравенством (5), получаем

$$\mathfrak{h} = H_A.$$

В работе (4) локальная теория полей классов строится как теория двойственная к алгебраической теории абелевых полей (решение уравнений в радикалах). Эта простота, однако, исчезает при переходе от локального поля к конечному. Для того чтобы тем не менее возможно полнее сохранить аналогию с локальной теорией, мы будем изложение теории полей классов вести на языке идеальных элементов.

Введем необходимые определения и обозначения. Пусть k — попрежнему конечное алгебраическое расширение поля рациональных чисел. Если $\mathfrak{p}$ — простой дивизор из k, то через $k_\mathfrak{p}$ обозначим $\mathfrak{p}$-адическое расширение k. Идеальным элементом $\underline{\alpha}$ из k назовем вектор $\underline{\alpha} = (\alpha_\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p}$ пробегает все простые дивизоры из $\bar{k}$, а $\alpha_\mathfrak{p} \neq 0$ — элемент из $\bar{k}_\mathfrak{p}$, причем для почти всех $\mathfrak{p}$ $\alpha_\mathfrak{p}$ есть $\mathfrak{p}$-адическая единица. $\alpha_\mathfrak{p}$ будем называть $\mathfrak{p}$-компонентом $\underline{\alpha}$. Умножение идеальных элементов производится покомпонентно:

$$(\underline{\alpha\beta})_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p}\beta_\mathfrak{p}.$$

Произведение $\underline{\alpha\beta}$ двух идеальных элементов есть опять идеальный элемент из k. Группу всех идеальных элементов из k обозначим через J_k, $k^\times$ содержится в группе J_k в качестве подгруппы главных элементов. Два элемента $\underline{\alpha}$ и $\underline{\beta}$ называются эквивалентными $\underline{\alpha} \sim \underline{\beta}$, если $\underline{\alpha\beta^{-1}}$ — глав-

ный элемент. Называя содержанием элемента $\underline{\alpha}$ идеал

$$S_t\underline{\alpha} = \mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{l_\mathfrak{p}},$$

где $e_\mathfrak{p}$ — порядок $\alpha_\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{p}$, имеем, очевидно, что если $\underline{\alpha} \sim \underline{\beta}$, то $S_t\underline{\alpha} \sim S_t\underline{\beta}$ и из $S_t\alpha \sim S_t\underline{\beta}$ следует, что $\underline{\alpha} \sim \underline{\beta}\varepsilon$, где $\underline{\varepsilon}$ — некоторая единица в $\overline{J}_k$.

Пусть $\overline{K}$ — конечное алгебраическое расширение k и $A = (A_\mathfrak{P})$ — идеальный элемент из K; тогда определим $N\underline{A}$ равенством

$$\alpha_\mathfrak{p} = (N\underline{A})_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} N_{K_\mathfrak{P}/k_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{P}).$$

Введем в группе J_k скалярное произведение главного элемента α и идеального элемента $\underline{\beta}$ равенством

$$(\alpha, \underline{\beta}) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\alpha, \beta_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right). \tag{11}$$

Из теоремы 9 следует, что если $\underline{\beta} \sim \underline{\beta}'$, то $(\alpha, \underline{\beta}) = (\alpha, \underline{\beta}')$; так как, кроме того, очевидно, что $(\alpha, \underline{\beta}) = 1$ всякий раз, когда $\underline{\beta}$ является нормой $K = k(\sqrt[l]{\alpha})$, то получаем, что все элементы $\underline{\beta} = \gamma N\underline{\beta}$, где γ — главный элемент, ортогональный главному элементу α. Они образуют подгруппу NJ_K группы J_k.

ТЕОРЕМА 11. *Пусть K — абелево расширение k показателя l, α — главный элемент из k и $\underline{\beta} = N_{K/k}(\underline{B})$, где $\underline{B} \in J_K$; тогда*

$$(\alpha, \underline{\beta})_k = (\alpha, \underline{\beta})_K.$$

Доказательство непосредственно следует из формулы (4) введения.

ТЕОРЕМА 12. *Если $\mathfrak{S}$ — подгруппа $k^\times$, содержащая $k^{\times l}$ и такая, что $(\mathfrak{S} : k^{\times l}) = l$, а $K = k(\sqrt[l]{\alpha})$ — соответствующее ей куммерово поле, то $\mathfrak{S}$ и NJ_K образуют ортогональную пару в смысле скалярного произведения* (11).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится лемма, доказательство которой можно найти в работе ([7]), стр. 217.

ЛЕММА 15. *Пусть S — конечное множество простых дивизоров из k. Тогда для каждого $\underline{\alpha} \in J_k$ найдется главный элемент ρ^{-1} такой, что $\alpha\rho^{-1}$ будет l-й степенью во всех $\mathfrak{p} \in S$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, показать, что подгруппа H элементов из J_k, ортогональных к α, в точности совпадает с NJ_K. Пусть, следовательно, $(\alpha, \underline{\beta}) = 1$; докажем, что $\underline{\beta} = \gamma H\underline{B}$.

Пусть $\mathfrak{f}$ — ведущий идеал расширения $k(\sqrt[l]{\alpha})/k$. Не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что все компоненты $\beta_\mathfrak{p}$, соответствующие простым делителям $\mathfrak{f}$, являются l-ми степенями. В самом деле, если бы это было не так, то, по лемме 1, нашелся бы главный элемент ρ^{-1} такой, что $\rho^{-1}\underline{\beta} = \underline{\beta}'$ уже обладал бы требуемым свойством и тогда $\alpha, \underline{\beta}') = (\alpha, \underline{\beta})$, а если $\underline{\beta}' = \gamma NB$, то $\beta = \rho\beta = \rho\gamma NB$. Положим $\mathfrak{b} = S_t\underline{\beta}$;

тогда

$$(\alpha, \underline{\beta}) = \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}} \left(\frac{\alpha, \beta_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right) = 1.$$

По теореме 10 отсюда следует, что $\mathfrak{b} = N\mathfrak{B}(\gamma)$, где $\gamma \equiv 1\ (\mathfrak{f})$. Пусть $\underline{B}$ — элемент из J_K, содержание которого $S_t\underline{B} = \mathfrak{B}$; тогда

$$S_t\underline{\beta} = \mathfrak{b} = \gamma S_t N\underline{B}$$

и, следовательно,

$$\underline{\beta} = \gamma N\underline{B}\underline{\varepsilon},$$

где $\underline{\varepsilon}$ — единица из J_k. Докажем, что $\underline{\varepsilon} = N\underline{E}$. В самом деле, если $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$, то $\left(\frac{\alpha, \varepsilon_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, так как в этом случае α и $\varepsilon_\mathfrak{p}$ являются $\mathfrak{p}$-адическими единицами, и, значит, $\varepsilon_\mathfrak{p}$ — норма в $K_\mathfrak{P}$. Если же $\mathfrak{p}/\mathfrak{f}$, то, вследствие равенства

$$\underline{\beta} = \gamma N\underline{B}\underline{E}, \tag{12}$$

имеем:

$$\left(\frac{\alpha, \varepsilon_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta_\mathfrak{p}\gamma^{-1}(N\underline{B}^{-1})_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha, \beta_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha, \gamma}{\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Но первый множитель правой части этого равенства равен 1, так как все компоненты $\beta_\mathfrak{p}$, соответствующие простым делителям $\mathfrak{f}$, — l-ые степени, второй же множитель равен 1, вследствие сравнения $\gamma \equiv 1\ (\mathfrak{f})$. Таким образом, окончательно находим

$$\left(\frac{\alpha, \varepsilon_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \quad \text{для всех } \mathfrak{p}$$

и, значит, $\underline{\varepsilon} = N\underline{E}$. Подставляя это в (12), получаем $\underline{\beta} = \gamma N\underline{B}\underline{E}$, чем теорема 12 доказана.

ТЕОРЕМА 13. *Если $\mathfrak{S}$ — подгруппа $k^\times$, содержащая $k^{\times l}$ и такая, что $(\mathfrak{S} : k^{\times l}) = l^n$ и $K = k(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots \sqrt[l]{\alpha_n})$ — соответствующее ей куммерово расширение, то $\mathfrak{S}$ и NJ_K образуют ортогональную пару.*

Доказательство этой теоремы является полным повторением соответствующей теоремы локальной теории полей классов. Дадим, поэтому, только общую идею доказательства.

Для $n = 1$, т. е. для $K = k(\sqrt[l]{\alpha})$, теорема уже доказана. Пусть она уже доказана для всех полей степени l^r, $r \leqslant n-1$ и $k' = k(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots \sqrt[l]{\alpha_{n-1}})$. Если $\underline{\beta}$ ортогонально к $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, то, по индуктивному предположению,

$$\underline{\beta} = \gamma' N\underline{B}', \tag{13}$$

где $\underline{B}'$ — элемент из J'_k, а γ' — число из k.

В силу теорем 9 и 11,

$$(\alpha_n, \underline{\beta}) = (\alpha_n, N\underline{B}') = (\alpha_n, \underline{B}')_{k'} = 1,$$

откуда, по предыдущей теореме, находим:

$$\underline{B}' = \Gamma N_{K/k'}(\underline{B}), \tag{13'}$$

где $B \in J_K$, а Γ — главный элемент из k'.

Из (13) и (9) следует:

$$\underline{\beta} = \gamma' N\underline{B}' = \gamma N_{k'/k}(N_{K/k'}(\underline{B})) = \gamma NB,$$

что и доказывает теорему 13.

ТЕОРЕМА 14. *Если* $(\alpha, \underline{\beta}) = 1$ *для всех* $\underline{\beta} \in J_k$, *то* $\alpha \approx 1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p}$ — произвольный идеал из k и $\underline{\beta}$ — $\mathfrak{p}$-примарный элемент из J_k, т. е. такой, для которого все $\mathfrak{q}$ — компоненты с $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ равны 1, а $\mathfrak{p}$-компонента есть число из k, делящееся точно на $\mathfrak{p}$; тогда, по условию

$$(\alpha, \underline{\beta}) = \left(\frac{\alpha,\ \pi}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Так как последнее равенство должно выполняться для всех $\mathfrak{q}$, то

$$\alpha \approx 1.$$

ТЕОРЕМА 15. *Если* $(\alpha, \underline{\beta}) = 1$ *для всех* $\alpha \in k^{\times}$, *то* $\underline{\beta} \approx 1$ (*знак* $\underline{\beta} \approx 1$ *означает, что существует такое* $\underline{\gamma}$ *и* ρ, *что* $\underline{\beta} = \underline{\gamma}^l \rho$).

Доказательство. Покажем сначала, что в условиях теоремы $\underline{\beta} \approx \underline{\varepsilon}$. Действительно, по лемме 15 существует главный элемент γ^{-1} такой, что $\beta'_{\mathfrak{l}_i} = (\gamma^{-1}\underline{\beta})_{\mathfrak{l}_i}$ будет l-й степенью для всех простых делителей l. Обозначая содержание $\underline{\beta}'$ через $\mathfrak{b}$ и беря за α сингулярное число ε, получим

$$(\varepsilon, \underline{\beta}') = \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}} \left(\frac{\varepsilon,\ \beta_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{b}}\right) = 1 \tag{14}$$

для всех сингулярных чисел ε, но это означает, что $\mathfrak{b}$ — примарный идеал, и, следовательно, существует такой идеал $\mathfrak{r}$, для которого

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{r}^l(\beta), \tag{15}$$

причем β есть l-я степень во всех $\mathfrak{l}_i$.

Из равенства (15), если обозначить через $\underline{\rho}$ идеальный элемент, содержание которого равно $\mathfrak{r}$, следует равенство:

$$\underline{\beta}' = \underline{\rho}^l \beta \underline{\varepsilon} \approx 1, \text{ т. е. } \underline{\beta}' \approx \varepsilon.$$

Докажем, что $\underline{\varepsilon} \approx 1$. В самом деле, пусть $\mathfrak{q}$ — произвольный простой идеал из k и $\varkappa$ — его дополнение до главного идеала:

$$\varkappa = \mathfrak{q}\mathfrak{r}_1^{w_1} \ldots \mathfrak{r}_e^{w_e} \bar{\mathfrak{r}}^l. \tag{16}$$

Беря за α число $\varkappa$, получим:

$$1 = (\varkappa, \underline{\beta}) = (\varkappa, \underline{\varepsilon}) = \left(\frac{\varkappa,\ \varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right) \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{\varkappa,\ \varepsilon_{\mathfrak{r}_i}}{\mathfrak{r}_i}\right) = \left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right)^{-1} \prod \left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{r}_i}}{\mathfrak{r}_i}\right)^{-w_i}$$

или

$$\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}=\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{r}_i}}{\mathfrak{r}_i}\right)^{w_i}. \tag{17}$$

Выберем $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_l$ так, чтобы

$$\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_j}\right)=\zeta^{\delta_{ij}} \quad (i,\ j=1, 2, \ldots, l), \tag{18}$$

и подберем χ_j так, чтобы

$$\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{r}_i}}{\mathfrak{r}_i}\right)=\left(\frac{\omega_i}{\mathfrak{r}_i}\right)^{x_i} \quad (i=1, 2, \ldots e), \tag{19}$$

причем x_i может быть и нулем. Из равенств (18) и (19) следует:

$$\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{r}_i}}{\mathfrak{r}_i}\right)=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_i}\right)(i=1, 2, \ldots, e), \quad \omega=\omega_1^{x_1}\ldots\omega_e^{x_e}. \tag{20}$$

Подставляя это в равенство (17), получим

$$\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}=\prod\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_i}\right)^{w_i}=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{r}_1^{w_1}\ldots\mathfrak{r}_e^{w_e}}\right). \tag{21}$$

Но вследствие (16),

$$\mathfrak{r}_1^{w_1}\ldots\mathfrak{r}_l^{w_l}=\mathfrak{q}^{-1}\mathfrak{r}^{-l}\varkappa;$$

подставляя это в (21) и принимая во внимание, что для любого числа $\varkappa$ $\left(\frac{\omega}{\varkappa}\right)=1$, так как ω — сингулярное примарное число, получим

$$\left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right)^{-1}=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{q}}\right)^{-1} \text{ или } \left(\frac{\varepsilon_{\mathfrak{q}}}{\mathfrak{q}}\right)=\left(\frac{\omega}{\mathfrak{q}}\right)$$

для любого простого $\mathfrak{q}$, и, значит, $(\varepsilon\omega^{-1})_{\mathfrak{q}}$ есть l-ая степень для всех $\mathfrak{q}$. Следовательно, $\varepsilon\omega^{-1}=\underline{\eta}^l$, т. е. $\varepsilon\approx 1$. Теорема 15 доказана.

Пусть J_k^* — подгруппа J_k. Назовем ее допустимой, если она обладает следующими свойствами:

1. $J_k^*\supset k^{\times}$.
2. $J_k^*\supset J_k^{*l}$.
3. Существует такое конечное множество S простых дивизоров $\mathfrak{p}$ из k, что все единицы $\underline{\varepsilon}$, у которых $\varepsilon_{\mathfrak{p}}=1$ для $\mathfrak{p}\in S=1$, принадлежат J_k^*.

ТЕОРЕМА 16. *Допустимая подгруппа имеет конечный индекс в* J_k.

Доказательство можно найти в книге Вейля (7).

Введем в группе J_k топологию. Пусть S — любое конечное множество простых точек (простых идеалов из k) и $\underline{\varepsilon}^S$ — группа единиц из J_k, которые равны 1 во всех простых точках из S. За окрестность 1 примем совокупность идеальных элементов из J_k вида $\underline{\varepsilon}^S J_k^l$. Эта топология переносится обычным способом в группу всех смежных классов $\mathrm{mod}\,\alpha J_k^l$. Допустимые подгруппы $J_k/\alpha J_k^l$ суть все замкнутые подгруппы конечного индекса. Действительно, все такие подгруппы являются открытыми.

ТЕОРЕМА 17. *Скалярное произведение* $(\alpha, \underline{\beta})$, *где* $\alpha\in k^{\times}/k^{\times l}$, *а* $\underline{\beta}\in J_k/\alpha J_k^l$ *не вырождено и непрерывно по обоим своим аргументам.*

Доказательство. Невырожденность $(\alpha, \underline{\beta})$ следует из теорем 13 и 14. Докажем непрерывность $(\alpha, \underline{\beta})$. Так как группа $k^\times/k^{\times l}$ дискретна, то для этого достаточно показать, что для каждого $\alpha \in k^\times/k^{\times l}$ в $J_k/\alpha J_k^l$ существует окрестность 1, состоящая из ортогональных к α элементов. Но последний факт следует из теоремы 12, так как все элементы из J_k вида $\gamma\underline{\varepsilon}^S J_k^l$, где S — множество всех простых идеалов, входящих в ведущий идеал $k(\sqrt[l]{\alpha})/k$, имеют вид γNB.

ТЕОРЕМА 18. (Основная теорема теории полей классов). *Соответствие $K \to NJ_K$ есть взаимно однозначное соответствие между абелевыми расширениями K/k показателя l и допустимыми подгруппами J_k. При этом группа J_k/NJ_K изоморфна группе Галуа K/k. Если $K_1 \subset K_2$, то $NJ_{K_1} \supset NJ_{K_2}$ и, наоборот, если $NJ_{K_1} \subset NJ_{K_2}$, то $K_1 \supset K_2$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{S}(K)$ подгруппу $k^\times$, состоящую из всех чисел, становящихся в K l-ми степенями. Из элементарных соображений теории Галуа получаются следующие факты [доказательство см. в работе ([8])]. Соответствие $K \to \mathfrak{S}(K)$ есть взаимно однозначное соответствие между абелевыми полями K/k показателя l и конечными подгруппами $k^\times/k^{\times l}$. При этом группа $\mathfrak{S}(K)/k^{\times l}$ изоморфна группе характеров группы Галуа K/k. Если $\mathfrak{S}(K_1) \subset \mathfrak{S}(K_2)$, то $K_1 \subset K_2$ и, наоборот, если $(K_1) \subset (K_2)$, то

$$\mathfrak{S}(K_1) \subset \mathfrak{S}(K_2).$$

Применим теоремы об ортогональных дополнениях в локально-компактных топологических группах к группам $k^\times/k^{\times l}$, $J_k/\alpha J_k^l$ и скалярному произведению $(\alpha, \underline{\beta})$.

Так как, согласно теореме 12, ортогональным дополнением группы $\mathfrak{S}(K)$ является группа NJ_K, то теорема 18 следует из только что сформулированных фактов.

Поступило
13.X. 1952

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Мат. сб., т. 26 (68):1 (1950), 103—146.
[2] Hasse H., Das Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz der n-ten Potenzreste, Math. Ann., 97 (1927), 599—623.
[3] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, Berlin, 1932.
[4] Лапин А. И., К теории символа Шафаревича, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 145—158.
[5] Hasse H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus Theorie der algebraischen Zahlkörper. II, Reziprozitätsgesetz, Leipzig-Berlin, 1930.
[6] Deuring M., Neuer Beweis des Bauerschen Satzes, Journ. reine und angew. Math., Bd. 173 (1935), 1—4.
[7] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М. — Л., 1947.
[8] Witt E., Der Existenzsatz für Abelsche Funktionenkörper, J. reine und angew. Math., Bd. 173 (1935), 43—51.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 379—388

Д. Е. МЕНЬШОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Рассматриваются классы функций, каждый из которых обладает следующим свойством. Если $f(x)$ принадлежит к одному из этих классов, то ее можно представить как сумму двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, ряды Фурье-Лебега которых сходятся на множествах всюду положительной меры, причем сумма этих множеств имеет полную меру. Классами упомянутого типа являются, в частности, классы L^p, где $1 \leqslant p$.

§ 1. Известно, что *всякая функция* $f(x)$, *непрерывная на некотором сегменте* $[\alpha, \beta]$, *есть сумма двух функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *непрерывных на том же сегменте и имеющих конечные производные соответственно на множествах* E_1 *и* E_2, *причем каждое из этих множеств имеет положительную меру на любом сегменте, содержащемся в* $[\alpha, \beta]$ [см. ([1]), стр. 599].

Можно предположить, кроме того, что

$$\text{mes}\,(E_1 + E_2) = \beta - \alpha. \tag{1.1}$$

Известно, далее, что ряд Фурье от суммируемой функции $f(x)$ сходится в каждой точке, где эта функция имеет конечную производную. В таком случае, мы получаем следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1. *Любая функция* $f(x)$, *непрерывная на сегменте* $[-\pi, \pi]$, *есть сумма двух функций* $f_i(x)$, $i = 1, 2$, *непрерывных на том же сегменте и таких, что ряд Фурье от функции* $f_i(x)$ *сходится на множестве* E_i, $i = 1, 2$, *причем*

$$1^\circ. \quad E_i \subset [-\pi, \pi] \quad (i = 1, 2), \tag{1.2}$$

$$2^\circ. \quad \text{mes}\,(E_1 + E_2) = 2\pi, \tag{1.3}$$

$$3^\circ. \quad \text{mes}\,(E_i \cdot [a, b]) > 0 \quad (i = 1, 2) \tag{1.4}$$

для любого сегмента $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$.

Возникает вопрос, на какие классы функций, помимо класса C непрерывных функций, эта теорема может быть распространена.

Будем говорить, что класс K функций $f(x)$, определенных на $[-\pi, \pi]$, есть класс типа (α), если выполняются следующие условия:

$$\text{a)} \quad K \subset L^1(-\pi, \pi)\,^*; \tag{1.5}$$

* Мы обозначаем, как обычно, через $L^p(c, d)$ класс измеримых функций, для которых $|f(x)|^p$ есть суммируемая функция на $[c, d]$. Будем предполагать в дальнейшем, что функции $f(x) \in L^p(c, d)$ определены всюду на $[c, d]$.

б) если $f(x)\in K$ и если $f_0(x)$ измерима на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию

$$|f_0(x)|\leqslant|f(x)| \quad (x\in[-\pi, \pi]), \tag{1.6}$$

то $f_0(x)\in K$.

Ясно, что классами типа (α) являются, в частности, следующие классы: класс B измеримых и ограниченных функций, класс L^p функций с суммируемой степенью p, где $p\geqslant 1$, класс измеримых функций $f(x)$, для которых

$$|f(x)|\ln^+|f(x)|\in L^1(-\pi, \pi),$$

класс измеримых функций, для которых

$$e^{|f(x)|}\in L^1(-\pi, \pi).$$

Вообще, если $\varphi(u)$ есть неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция для всех $u\geqslant 0$ и если, кроме того, выполняется условие

$$\varphi(u)\geqslant u \quad (u\geqslant 1), \tag{1.7}$$

то совокупность всех измеримых функций $f(x)$, для которых

$$\varphi[|f(x)|]\in L^1(-\pi, \pi),$$

есть класс типа (α).

Можно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть K есть класс типа* (α) *функций, определенных всюду на* $[-\pi, \pi]$. *В таком случае любая функция $f(x)\in K$ есть сумма двух функций $f_i(x)$, $i=1, 2$, принадлежащих к тому же классу и таких, что ряд Фурье каждой из функций $f_i(x)$ сходится к нулю всюду на некотором множестве E_i, причем множества E_i, $i=1,2$, удовлетворяют условиям* 1°, 2° *и* 3° *теоремы* 1.

§ 2. Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, введем следующее обозначение. Если $f(x)$ определена всюду на $[-\pi, \pi]$ и множество $E\subset[-\pi, \pi]$, то мы будем обозначать через $f(x, E)$ функцию, определяемую условиями:

$$f(x, E)=\begin{cases} 0, \text{ если } x\in E, \\ f(x), \text{ если } x\in[-\pi, \pi]-E. \end{cases} \tag{2.1}$$

Если $f(x)\in L^1(-\pi, \pi)$ и E измеримо, то ясно, что

$$f(x, E)\in L^1(-\pi, \pi).$$

Если s есть какой-нибудь индекс, то мы будем определять $f_s(x, E)$ через $f_s(x)$ таким же образом, как $f(x, E)$ определяется через $f(x)$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Пусть $f(x)\in L^1(-\pi, \pi)$. Тогда для любого интервала $(a, b)\subset[-\pi, \pi]$ и для любого положительного числа σ можно определить замкнутое нигде не плотное множество E, обладающее свойствами:*

$$\alpha^\circ.\ E\subset(a, b), \quad \operatorname{mes} E>b-a-\sigma; \tag{2.2}$$

β°. *какова бы ни была измеримая функция $f_0(x)$, удовлетворяющая неравенству*

$$|f_0(x)|\leqslant|f(x)| \quad (x\in[-\pi, \pi]), \tag{2.3}$$

ряд Фурье от соответствующей функции $f_0(x, E)$ сходится к нулю почти всюду на E.

Доказательство. Не уменьшая общности рассуждения, мы можем предположить, что

$$\sigma < 1. \tag{2.4}$$

Будем считать функцию $f(x)$ равной нулю вне сегмента $[-\pi, \pi]$.

Положим $r_1 = a$, $r_2 = b$ и обозначим через r_k, $k = 3, 4, \ldots$, все рациональные числа на интервале (a, b). Обозначим, далее, через u_k, $k = 1, 2, \ldots$, интервалы, обладающие свойствами:

a°. середина каждого интервала u_k находится в точке r_k, $k = 1, 2 \ldots$;

b°. $$\int_{u_k} |f(t)|\, dt < \frac{1}{4^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{2.5}$$

c°. $$\operatorname{mes} u_k < \frac{\sigma}{2^{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.6}$$

Положим

$$E = [a, b] - \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{2.7}$$

Тогда E есть замкнутое нигде не плотное множество, лежащее на интервале (a, b), причем, в силу (2.6),

$$\operatorname{mes} E > b - a - \sigma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} > b - a - \sigma.$$

Отсюда следует, что множество E удовлетворяет условию α°, входящему в формулировку леммы [см. (2.2)].

Обозначим через v_k, $k = 1, 2 \ldots$, интервалы, концентрические с соответствующими интервалами u_k и удовлетворяющие условию:

$$\operatorname{mes} v_k = \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Положим

$$G = \overline{\lim_{k \to \infty}} v_k, \tag{2.9}$$

откуда, на основании (2.8),

$$\operatorname{mes} G = 0. \tag{2.10}$$

Пусть R есть множество всех концов интервалов u_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда R есть счетное множество и, следовательно,

$$\operatorname{mes} R = 0. \tag{2.11}$$

Положим

$$E' = E - G - R, \tag{2.12}$$

откуда

$$E' \subset E, \quad \operatorname{mes} E' = \operatorname{mes} E. \tag{2.13}$$

Докажем, что ряд Фурье от функции $f_0(x, E)$ сходится к нулю в каждой точке множества E', где $f_0(x)$ есть произвольная измеримая функция, удовлетворяющая условию (2.3).

Пусть

$$x \in E' \tag{2.14}$$

и пусть $f_0(x)$ есть какая-нибудь измеримая функция, удовлетворяющая условию (2.3). В силу (2.12), будем иметь:

$$x \overline{\in} G, \quad x \overline{\in} R. \tag{2.15}$$

Обозначим через $S_n(x)$ сумму $n+1$ первых членов ряда Фурье от функции $f_0(x, E)$ и докажем, что в рассматриваемой точке x выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0. \tag{2.16}$$

Возьмем произвольное положительное число ε. Принимая во внимание (2.9) и (2.15), мы можем определить такое натуральное число $\nu(x)$, что

$$x \overline{\in} v_k \quad [k > \nu(x)], \qquad \sum_{k=\nu(x)+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \tag{2.17}$$

Сопоставляя (2.13) и (2.14), мы видим, что рассматриваемая точка x принадлежит множеству E, а значит, точка x принадлежит открытому интервалу (a, b). Кроме того, в силу определения множества R и равенств (2.7), (2.12), точка x находится на положительном расстоянии от всех интервалов u_k, $k=1,2,\ldots,\nu(x)$, и, следовательно, можно определить такое положительное число δ, что сегмент $[x-\delta, x+\delta]$ не имеет общих точек с этими интервалами и содержится в интервале (a, b), т. е.

$$([x-\delta, x+\delta]\cdot u_k) = 0 \quad [k=1,2,\ldots,\nu(x)], \tag{2.18}$$

$$a < x-\delta < x+\delta < b. \tag{2.19}$$

Так как $S_n(x)$ есть сумма $n+1$ первых членов ряда Фурье от функции $f_0(x, E)$, то мы будем иметь в рассматриваемой точке x:

$$S_n(x) = J_n(x) + \varepsilon_n(x) \quad (n=1,2,\ldots), \tag{2.20}$$

где

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f_0(t, E)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt \tag{2.21}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0. \tag{2.22}$$

По определению функции $f_0(x, E)$ [см. равенство (2.1)],

$$f_0(t, E) = 0 \quad (t \in E), \tag{2.23}$$

$$|f_0(t, E)| \leqslant |f_0(t)| \quad (t \in [-\pi, \pi]), \tag{2.24}$$

а так как u_k, $k=1,2,\ldots$, составляют в своей совокупности сумму смежных интервалов множества E, то, на основании (2.18) и (2.21),

$$|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=\nu(x)+1}^{\infty}\int_{u_k} |f_0(t, E)|\cdot\frac{|\sin n(t-x)|}{|t-x|}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\sum_{k=\nu(x)+1}^{\infty}\int_{u_k} |f_0(t)|\cdot\frac{dt}{|t-x|} \quad (n=1,2,\ldots). \tag{2.25}$$

Из определения интервалов u_k и множества R и из (2.12), (2.14) следует, что рассматриваемая точка x лежит вне всех интервалов u_k, $k = 1, 2, \ldots$, и не совпадает с концами этих интервалов. Обозначим через α_k, $k > \nu(x)$, тот конец интервала u_k, который лежит ближе к точке x, а через β_k, $k > \nu(x)$ — тот конец интервала v_k, который лежит по ту же сторону от точки r_k, что и точка α_k. Тогда, в силу (2.17),

$$|t - x| > |\beta_k - \alpha_k| \quad [t \in u_k,\ k > \nu(x)]. \tag{2.26}$$

Так как интервалы u_k и v_k являются концентрическими, то, принимая во внимание (2.4), (2.6) и (2.8), будем иметь:

$$|\beta_k - \alpha_k| = \frac{1}{2}(\operatorname{mes} v_k - \operatorname{mes} u_k) >$$
$$> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k} - \frac{\sigma}{2^{k+1}}\right) > \frac{1}{2^{k+2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

откуда, на основании (2.26),

$$|t - x| > \frac{1}{2^{k+2}}\ [t \in u_k,\ k > \nu(x)]$$

и, следовательно, в силу (2.3) и (2.25),

$$|J_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=\nu(x)+1}^{\infty} 2^{k+2} \int_{u_k} |f(t)|\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.27}$$

Сопоставляя (2.5), (2.17) и (2.27), получаем:

$$|J_n(x)| < \frac{1}{\pi} \sum_{k=\nu(x)+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.28}$$

С другой стороны, из равенства (2.22) следует, что для рассматриваемой точки x можно определить натуральное число $N(x)$, удовлетворяющее условию

$$|\varepsilon_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad [n > N(x)], \tag{2.29}$$

откуда, в силу (2.20) и (2.28),

$$|S_n(x)| < \varepsilon \quad [n > N(x)]. \tag{2.30}$$

Итак, если x есть произвольная точка множества E', то для этой точки и для любого положительного числа ε мы можем подобрать такое натуральное число $N(x)$, что выполняется неравенство (2.30), а в таком случае для любой точки x множества E' выполняется равенство (2.16). Так как $S_n(x)$ есть сумма $n+1$ первых членов ряда Фурье от $f_0(x, E)$, то, на основании (2.13), ряд Фурье от этой функции сходится к нулю почти всюду на множестве E.

Мы предположили, что $f_0(x)$ есть произвольная измеримая функция, удовлетворяющая неравенству (2.3). Следовательно, для множества E удовлетворяется условие β^0, входящее в формулировку леммы. Раньше мы уже доказали, что множество E удовлетворяет условию α^0. Так как

(a, b) есть произвольный интервал, лежащий на $[-\pi, \pi]$, и σ есть произвольное положительное число, удовлетворяющее условию (2.4), то лемма доказана полностью.

§ 3. Перейдем к доказательству теоремы 2, сформулированной в § 1. Возьмем произвольную функцию $f(x)$, принадлежащую к одному из классов K типа (α) и определим последовательность замкнутых нигде не плотных множеств $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ следующим образом.

Пусть замкнутое множество P_0 состоит из двух точек $-\pi$ и π. Предположим, далее, что уже определено замкнутое нигде не плотное множество $P_{k-1} \subset [-\pi, \pi]$, имеющее концы в точках $-\pi$ и π, где k — какое-нибудь целое положительное число. Обозначим через $u_{k\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, смежные интервалы множества P_{k-1} *.

Так как, по предположению, функция $f(x)$ принадлежит к одному из классов типа (α), то, по определению классов этого типа, функция $f(x)$ определена всюду на сегменте $[-\pi, \pi]$ и суммируема на этом сегменте. На основании леммы, доказанной в § 2, в которой мы полагаем

$$(a, b) = u_{k\nu}, \quad \sigma = \frac{1}{2} \operatorname{mes} u_{k\nu},$$

для любого $\nu = 1, 2, \ldots$ мы можем определить замкнутое нигде не плотное множество $\pi_{k\nu}$, которое обладает следующими свойствами:

$$\alpha')\ \pi_{k\nu} \subset u_{k\nu}, \quad \operatorname{mes} \pi_{k\nu} > \frac{1}{2} \operatorname{mes} u_{k\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \tag{3.1}$$

β') для любой измеримой функции $f_0(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$|f_0(x)| \leqslant |f(x)| \quad (x \in [-\pi, \pi]), \tag{3.2}$$

ряд Фурье от функции $f_0(x, \pi_{k\nu})$ сходится к нулю почти всюду на множестве $\pi_{k\nu}$.

Положим

$$P_k = P_{k-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{k\nu} {}^{**}. \tag{3.3}$$

Ясно, что P_k есть замкнутое нигде не плотное множество, удовлетворяющее условиям:

$$P_k \subset [-\pi, \pi], \quad -\pi \in P_{k-1}, \quad \pi \in P_{k-1}. \tag{3.4}$$

Так как множество P_0 у нас уже определено, то мы можем последовательно определить все множества P_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, обладающие упомянутыми выше свойствами. При этом ясно, что

$$P_{k-1} \subset P_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.5}$$

---

* Если $k = 1$, то $P_{k-1} = P_0$, и множество P_{k-1} имеет только один смежный интервал $(-\pi, \pi)$.

** Если $k = 1$, то сумму $\sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{k\nu}$ нужно заменить одним членом π_{11}.

Попутно мы определили замкнутые нигде не плотные множества $\pi_{k\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots$, для которых выполняются условия α'), β') и равенство (3.3).

Так как $u_{k\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, являются смежными интервалами множества P_{k-1}, то, на основании (3.1),

$$\left.\begin{array}{c}(P_{k-1}\cdot\pi_{k\nu}) = 0, \quad (\pi_{k\nu}\cdot\pi_{k\mu}) = 0 \\ (\nu = 1, 2, \ldots, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \quad \nu \neq \mu, \quad k = 1, 2, \ldots,),\end{array}\right\} \tag{3.6}$$

откуда, в силу (3.3),

$$P_k - P_{k-1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{k\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{3.7}$$

$$\operatorname{mes} P_k = \operatorname{mes} P_{k-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} \pi_{k\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.8}$$

Кроме того, принимая во внимание (3.5) и определение множества P_0, получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (P_k - P_{k-1}), \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{c}\{(P_k - P_{k-1})\cdot(P_m - P_{m-1})\} = 0 \\ (k \neq m, \quad k = 1, 2, \ldots, \ m = 1, 2, \ldots),\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} P_k = \operatorname{mes} \sum_{k=1}^{\infty} (P_k - P_{k-1}). \tag{3.11}$$

Докажем теперь, что

$$\operatorname{mes} P_k \geqslant 2\pi\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.12}$$

В самом деле, из определения множества P_0 следует, что $\operatorname{mes} P_0 = 0$ и, следовательно, неравенство (3.12) справедливо для $k = 0$.

Предположим, далее, что для какого-нибудь целого положительного k выполняется неравенство

$$\operatorname{mes} P_{k-1} \geqslant 2\pi\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right). \tag{3.13}$$

Принимая во внимание (3.1) и (3.8), получаем:

$$\operatorname{mes} P_k > \operatorname{mes} P_{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} u_{k\nu}. \tag{3.14}$$

На основании (3.4), точки $-\pi$ и π являются концами замкнутого множества P_{k-1}. В таком случае, так как $u_{k\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, являются смежными интервалами этого множества, имеем:

$$\operatorname{mes} P_{k-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} u_{k\nu} = 2\pi, \tag{3.15}$$

откуда, в силу (3.13),

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} u_{k\nu} = 2\pi - \operatorname{mes} P_{k-1} < \frac{2\pi}{2^{k-1}}$$

и, следовательно, на основании (3.15),

$$\operatorname{mes} P_{k-1} + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} u_{k\nu} =$$

$$= 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{mes} u_{k\nu} \geqslant 2\pi\left(1 - \frac{1}{2^k}\right). \quad (3.16)$$

Сопоставляя (3.14) и (3.16), получаем неравенство (3.12) для рассматриваемого значения k.

Итак, мы сперва доказали справедливость неравенства (3.12) для $k = 0$. Затем мы предположили, что это неравенство справедливо, если в нем k заменить на $k - 1$, где $k \geqslant 1$ [см. неравенство (3.13)], и доказали, что тогда неравенство (3.12) верно для данного значения k. Отсюда следует, что неравенство (3.12) справедливо для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Принимая во внимание (3.4), мы получаем из неравенства (3.12), что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes} P_k = 2\pi \quad (3.17)$$

и, следовательно, в силу (3.11),

$$\operatorname{mes} \sum_{k=1}^{\infty} (P_k - P_{k-1}) = 2\pi. \quad (3.18)$$

Положим

$$E'_i = \sum_{s=0}^{\infty} (P_{2s+i} - P_{2s+i-1}) \quad (i = 1, 2), \quad (3.19)$$

откуда

$$E'_1 = \sum_{s=0}^{\infty} (P_{2s+1} - P_{2s}), \quad E'_2 = \sum_{s=0}^{\infty} (P_{2s+2} - P_{2s+1}). \quad (3.20)$$

В таком случае

$$E'_1 + E'_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (P_k - P_{k-1})$$

и, следовательно, на основании (3.18),

$$\operatorname{mes}(E'_1 + E'_2) = 2\pi. \quad (3.21)$$

Кроме того, в силу (3.4), (3.10) и (3.19),

$$(E'_1 \cdot E'_2) = 0, \quad E'_i \subset [-\pi, \pi] \quad (i = 1, 2). \quad (3.22)$$

Положим

$$Q = [-\pi, \pi] - E'_1 - E'_2, \quad (3.23)$$

откуда

$$E'_1 + E'_2 + Q = [-\pi, \pi], \quad (Q \cdot E'_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.24)$$

и, кроме того, на основании (3.21) и (3.22),

$$\operatorname{mes} Q = 0. \tag{3.25}$$

Обозначим через $f_i(x)$, $i = 1, 2$, функции, определяемые из условий

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in E_i', \\ \frac{1}{2} f(x), & \text{если } x \in Q, \\ f(x), & \text{если } x \in [-\pi, \pi] - E_i' - Q \quad (i = 1, 2). \end{cases} \tag{3.26}$$

В силу (3.22) и (3.24), эти функции определены всюду на $[-\pi, \pi]$ и притом однозначно на этом сегменте. Кроме того, ясно, что эти функции измеримы на $[-\pi, \pi]$ и обладают свойствами:

$$f_1(x) + f_2(x) = f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi]), \tag{3.27}$$

$$|f_i(x)| \leqslant |f(x)| \quad (x \in [-\pi, \pi]). \tag{3.28}$$

Докажем, что ряд Фурье от функции $f_i(x)$ сходится к нулю почти всюду на множестве E_i', где $i = 1$ или $i = 2$. На основании (3.7) и (3.19),

$$E_i' = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \pi_{2s+i,\nu} \quad (i = 1, 2), \tag{3.29}$$

откуда, в силу (2.1) и (3.26), для любого $x \in [-\pi, \pi]$:

$$f_i(x, \pi_{2s+i,\nu}) = f_i(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2). \tag{3.30}$$

Сопоставляя свойство β') множеств $\pi_{k\nu}$ с неравенством (3.28) и с равенством (3.30), мы видим, что ряд Фурье от функции $f_i(x)$ сходится к нулю почти всюду на каждом из множеств $\pi_{2s+i,\nu}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, $\nu = 1, 2, \ldots$, откуда следует, на основании (3.29), что ряд Фурье от функции $f_i(x)$ сходится к нулю почти всюду на множестве E_i', где $i = 1$ или $i = 2$.

Обозначим через E_i, $i = 1, 2$, множество всех точек, принадлежащих множеству E_i', в которых ряд Фурье от функции $f_i(x)$ сходится к нулю. Тогда

$$E_i \subset E_i', \quad \operatorname{mes} E_i = \operatorname{mes} E_i' \quad (i = 1, 2) \tag{3.31}$$

и, кроме того, ряд Фурье от функции $f_i(x)$ сходится к нулю всюду на множестве E_i, $i = 1,2$.

Мы уже знаем, что функции $f_i(x)$, $i = 1, 2$, измеримы и удовлетворяют неравенству (3.8). Так как, по условию теоремы 2 (§ 1), функция $f(x)$ принадлежит к некоторому классу K типа (α), то, в силу определения классов этого типа, каждая из функций $f_i(x)$, $i = 1, 2$, принадлежит к тому же классу K. Кроме того, мы уже доказали, что выполняется равенство (3.27). Следовательно, чтобы закончить доказательство теоремы 2, нам остается только доказать, что множества E_i, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3° теоремы 1.

Сопоставляя (3.21), (3.22) и (3.31), мы видим, что

$$E_i \subset [-\pi, \pi] \quad (i = 1, 2), \quad \operatorname{mes}(E_1 + E_2) = 2\pi,$$

и, следовательно, множества E_i; $i=1, 2$, удовлетворяют условиям 1° и 2°. Докажем, что эти множества удовлетворяют условию 3°.

Возьмем произвольный сегмент $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Принимая во внимание (3.4) и (3.17), получаем для $i=1$ или $i=2$:

$$P_{2s-i-1} \subset [-\pi, \pi] \quad (s=1, 2, \ldots), \quad \lim_{s\to\infty} \operatorname{mes} P_{2s-i-1} = 2\pi,$$

и, следовательно, можно указать такое натуральное число s_0, что

$$\operatorname{mes}(P_{2s_0-i-1} \cdot [a, b]) > 0 \quad (i=1, 2). * \tag{3.32}$$

Так как P_{2s_0-i-1} есть замкнутое множество, то из неравенства (3.32) следует, что существует точка ξ второго рода множества P_{2s_0-i-1}, для которой выполняется неравенство

$$a < \xi < b. \tag{3.33}$$

Так как P_{2s_0-i-1} есть нигде не плотное замкнутое множество и так как ξ есть точка второго рода этого множества, то в любой близости от точки ξ находятся смежные интервалы $u_{2s_0-i,\nu}$ множества P_{2s_0-i-1} со сколь угодно большими номерами ν и, следовательно, найдется такое натуральное число ν_0, что

$$u_{2s_0-i,\nu_0} \subset [a, b] \quad (i=1, 2), **$$

откуда, в силу (3.1),

$$\pi_{2s_0-i,\nu_0} \subset [a, b] \quad (i=1, 2). \tag{3.34}$$

Сопоставляя (3.29) и (3.34), мы видим, что

$$\pi_{2s_0-i,\nu_0} \subset (E_i' \cdot [a, b]) \quad (i=1, 2)$$

и, следовательно, на основании (3.31),

$$\operatorname{mes}(E_i\,[a, b]) \geqslant \operatorname{mes} \pi_{2s_0-i,\nu_0} \quad (i=1, 2).$$

Так как $[a, b]$ есть произвольный сегмент, лежащий на сегменте $[-\pi, \pi]$, то множества E_i, $i=1,2$, удовлетворяют условию 3° теоремы 1, и доказательство теоремы 2 закончено.

Поступило
25.XII.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бари Н., Représentation finie des fonctions continues, II, Math. Ann., t. 103 (1930), 598—653.

---

* Мы можем предположить, что s_0 не зависит от i.

** ν_0 зависит, вообще говоря, от i.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 389—418

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

О ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛЕЙ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе исследуется вопрос о погружении нормального поля алгебраических чисел в большее поле в случае, когда относительная группа Галуа имеет порядок l^α, а абсолютная группа является распадающимся расширением.

Введение

Задача погружения полей заключается в следующем. Дано нормальное расширение k/Ω с группой Галуа F и группа G, имеющая нормальный делитель $\mathfrak{G}$ с $G/\mathfrak{G} \cong F$. Требуется узнать, когда существует такое поле $K \supset k$, нормальное над Ω, что его группа Галуа над Ω есть G, а гомоморфизм G на F совпадает с естественным гомоморфизмом группы Галуа поля на группу Галуа подполя.

Простейший случай этой задачи возникает, когда G является распадающимся расширением F при помощи $\mathfrak{G}$. В этом случае G определяется тем, какие автоморфизмы индуцируют элементы F в $\mathfrak{G}$, т. е. заданием $\mathfrak{G}$ как операторной группы с группой операторов F. Наоборот, для любой группы $\mathfrak{G}$ с группой операторов F существует группа G, являющаяся распадающимся расширением F при помощи $\mathfrak{G}$. Это расширение называется полупрямым произведением F на $\mathfrak{G}$. Мы будем обозначать его через $F\cdot\mathfrak{G}$ в отличие от прямого произведения, которое будет для групп A и B обозначаться через $A \times B$.

В настоящей работе рассматривается задача погружения для случая, когда G есть полупрямое произведение $F\cdot\mathfrak{G}$.

Для случая, когда группа $\mathfrak{G}$ коммутативна, задача погружения для полупрямого произведения была полностью решена Шольцем (7), который показал, что в этом случае искомое поле K всегда существует.

Мы рассмотрим в настоящей работе следующий по трудности случай, когда $\mathfrak{G}$ имеет порядок l^α. Доказывается, что здесь, как и для коммутативной группы $\mathfrak{G}$, задача решается положительно в любом из следующих двух случаев:

1) группа $\mathfrak{G}$ имеет класс c и $l > c$;

2) порядки групп F и $\mathfrak{G}$ взаимно просты.

Очевидно, что рассмотренный Шольцем случай коммутативной группы $\mathfrak{G}$ содержится в случае 1), так как для абелевой группы $c = 1$.

Как полученные результаты, так и методы их доказательства делают весьма вероятным, что проблема погружения решается положительно для любого полупрямого произведения и любого нильпотентного нормального делителя $\mathfrak{G}$.

В большей части настоящей работы (§ 2 и 3) предполагается, что читатель знаком с работой (4). В частности, введенные в этой работе понятия будут использоваться без дальнейших ссылок.

§ 1. Расширения с нильпотентной диспозиционной группой

1. Нильпотентные диспозиционные группы. Рассмотрим конечную группу G с конечной группой операторов F. Если G есть абелева группа, то, как показал Шольц (7), G является операторно-гомоморфным образом некоторой сравнительно просто построенной абелевой операторной группы, называемой диспозиционной. Мы покажем, что понятие диспозиционной группы можно обобщить на случай, когда G есть произвольная группа порядка l^{α}.

Обозначим через $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ группу с образующими $s_1, \ldots, s_d$, на которые наложим соотношения:

1) при некотором, раз навсегда фиксированном k

$$s_i^{l^k} = 1, \quad i = 1, \ldots, d;$$

2) любой коммутатор длины c, составленный из образующих $s_1, \ldots, s_d$, равен 1.

Другими словами, $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ есть факторгруппа свободного произведения d циклических групп порядка l^k по c-му члену убывающего центрального ряда. Из теоремы Шрейера о подгруппах свободной группы легко вытекает, что $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ есть конечная группа. Порядок $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ есть некоторая степень l, число образующих — d и класс c.

Пусть F — произвольная конечная группа порядка m. Рассмотрим группу $\mathfrak{G}_{md}^{(c)}$ с md образующими, которые будем обозначать через $s_{u,\,i}$, $u \in F$, $i = 1, \ldots, d$. Отображение, определенное для образующих $s_{u,\,i}$ условием

$$s_{u,\,i}^{v} = s_{uv,\,i},$$

распространяется на всю группу $\mathfrak{G}_{md}^{(c)}$ и является в ней автоморфизмом, так как все соотношения, наложенные на образующие $s_{u,\,i}$, в $\mathfrak{G}_{md}^{(c)}$ инвариантны относительно перестановок образующих. Определенные таким образом автоморфизмы образуют группу, изоморфную F*. Группу $\mathfrak{G}_{md}^{(c)}$ с указанной группой операторов, изоморфной F, обозначим через $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ и будем называть нильпотентной диспозиционной группой. В случае, если $c = 1$, мы получаем абелевы диспозиционные группы Шольца.

Обобщением основного результата Шольца об абелевых диспозиционных группах на нильпотентные диспозиционные группы является следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Любая группа G порядка l^{α} класса c с группой операторов F является операторно-гомоморфным образом некоторой нильпотентной диспозиционной группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$.*

Доказательство. Пусть группа G имеет d образующих $s_1, \ldots, s_d$ и пусть максимальный порядок ее элемента — l^k. Докажем, что G является операторно-гомоморфным образом группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$. Для этого продолжим отображение

$$\varphi(s_{u,\,i}) = s_i^u$$

* Мы будем исходить из определения умножения операторов при том порядке следования, который принят в (3), стр. 97.

образующих $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ на образующие G по мультипликативности на все элементы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$. Так как все соотношения, имеющие место в $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ между образующими $s_{u,i}$, справедливы для любых элементов G, то φ является гомоморфизмом $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ на G. Нам остается доказать, что этот гомоморфизм операторный, т. е. что имеет место соотношение:

$$\varphi(\sigma^v)=\varphi(\sigma)^v, \quad \sigma\in\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}, \quad v\in F. \tag{1}$$

Ввиду того что φ является гомоморфизмом, это соотношение достаточно проверить для $\sigma=s_{u,i}$. В этом случае мы имеем:

$$\varphi(s_{u,i}^v)=\varphi(s_{uv,i})=s_i^{uv},$$

$$\varphi(s_{u,i})^v=(s_i^u)^v=s_i^{uv},$$

чем и доказывается соотношение (1), а тем самым и теорема.

2. Центрально-диспозиционные группы. Мы будем называть группу G порядка l^α с группой операторов F центрально-диспозиционной, если ее центр является диспозиционной группой. Таким образом, центр группы G должен иметь следующую структуру: он должен распадаться в прямое произведение допустимых подгрупп, каждая из которых должна являться прямым произведением m сопряженных относительно F циклических подгрупп. Очевидно, что понятие центрально-диспозиционной группы и нильпотентной диспозиционной группы совпадают для абелевых групп, но, как мы увидим дальше, неабелевы нильпотентные диспозиционные группы не являются, вообще говоря, центрально-диспозиционными.

ТЕОРЕМА 2. *Любая группа G порядка l^α и класса c с группой операторов F при $l>c$ является операторно-гомоморфным образом некоторой центрально-диспозиционной группы.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1, нам достаточно доказать теорему для случая, когда $G=\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ и $l>c$. Центр группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ в случае $l>c$ определен Трэллом ([8]). Из его рассуждений следует, что центр группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ при $l>c$ изоморфен (аддитивно записанному) модулю многочленов Ли от d неизвестных $x_1,\ldots,x_d$ с коэффициентами из кольца классов вычетов по модулю l^k. Неизвестные $x_1,\ldots,x_d$ находятся при этом во взаимно однозначном соответствии с образующими $s_1,\ldots,s_d$ группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, и автоморфизм $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, сводящийся к перестановке образующих $s_1,\ldots,s_d$, индуцирует в центре такую же перестановку неизвестных $x_1,\ldots,x_d$.

В случае группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ мы имеем модуль многочленов Ли степени c от неизвестных $x_{u,i}$ с коэффициентами из кольца классов вычетов по модулю l^k. Преобразование неизвестных

$$x_{u,i}^v=x_{uv,i} \tag{2}$$

определяет автоморфизм модуля многочленов Ли. Модуль многочленов Ли степени c с группой операторов, определенной формулами (2) и изоморфной F, обозначим через $\Lambda(F)$.

Введем в рассмотрение модуль полилинейных форм от c md-мерных векторов $\xi^{(j)}$, $j=1,\ldots,c$, где $\xi^{(j)}$ есть вектор с координатами $x_{u,i}^{(j)}$, $u\in F$, $i=1,\ldots,d$.

Определим действие элементов F на элементы модуля формулами

$$x_{u,i}^{(j)v} = x_{uv,i}^{(j)}.$$

Этот операторный модуль обозначим через $M(F)$.

Доказательство теоремы 2 непосредственно вытекает из следующих двух предположений:

A) $\Lambda(F)$ является операторным прямым слагаемым $M(F)$, т. е. в $M(F)$ существует такой F-инвариантный подмодуль $\Lambda'(F)$, операторно-изоморфный $\Lambda(F)$, и такой F-инвариантный подмодуль $N(F)$, что

$$M(F) = \Lambda'(F) + N(F). \tag{3}$$

B) $M(F)$ является диспозиционной группой.

Покажем прежде всего, что из предположений A) и B) следует утверждение теоремы 2. Рассмотрим прямое произведение группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ и группы $\mathfrak{N}$, операторно-изоморфной $N(F)$. Центр группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)} \times \mathfrak{N}$ операторно-изоморфен $M(F)$ ввиду предположения A) и является, следовательно, диспозиционной группой ввиду предположения B). Таким образом, $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)} \times \mathfrak{N}$ есть центрально-диспозиционная группа, а так как $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c)}$ является ее операторно-гомоморфным образом, то из этого следует теорема 2.

Перейдем к доказательству предложений A) и B).

Доказательство предложения A). Мы воспользуемся соображениями, примененными Трэллом ([8]) к исследованию групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$. Если вместо преобразований (2) рассмотреть любые обратимые линейные преобразования md неизвестных $x_{u,i}$ с коэффициентами из кольца классов вычетом по модулю l^k, то как модуль Λ многочленов Ли, так и модуль M полилинейных форм станет операторным модулем относительно группы $\mathfrak{A}$ всех обратимых линейных преобразований по модулю l^k. Формулы (2) определяют изоморфное отображение F в $\mathfrak{A}$. Таким образом, переход от F к $\mathfrak{A}$ приводит к увеличению группы операторов, так что нам достаточно доказать существование разложения (3) для модулей Λ и M относительно области операторов $\mathfrak{A}$. Ввиду этого мы будем теперь считать, что Λ имеет n образующих (в нашем применении $n = md$) $x_1, \ldots, x_n$, а M состоит из форм от n-мерных векторов $x^{(j)}$ с координатами $x_1^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}$.

Так как и Λ и M являются модулями над кольцом классов вычетов по модулю l^k, то действие в них операторов из $\mathfrak{A}$ определяет представления $\mathfrak{A}$ по модулю l^k. Представление, определяемое модулем Λ, называется c-м представлением Ли, а представление, определяемое модулем M, называется c-м тензорным представлением.

Прежде всего ясно, что Λ является операторно-гомоморфным образом модуля M. Гомоморфизм задается отображением

$$x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \ldots x_{i_c}^{(c)} \to [x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_c}],$$

где $[x_{i_1} \ldots x_{i_c}]$ обозначает произведение $(\ldots(x_{i_1} x_{i_2}) \ldots x_{i_c})$ в кольце Ли.

Над полем характеристики 0 тензорное представление полной линейной группы вполне приводимо [см. ([2]), стр. 177], так что представление Ли содержится в нем в виде прямого слагаемого. Как заметил Брауэр ([6]), формулы, по которым c-е тензорное представление линейной группы над полем характеристики 0 разлагается в прямую сумму неприводимых, содержат в знаменателях только числа $\leqslant c$ и, таким образом, могут быть

применены для аналогичного разложения над кольцом классов вычетов по модулю l^k, если $l > c$. Ввиду вышесказанного из этого следует, что при $l > c$ c-е представление Ли содержится прямым слагаемым в c-м тензорном представлении, т. е. модуль Λ является прямым слагаемым модуля M, что и доказывает предложение A).

Доказательство предложения B). Базисом модуля M являются одночлены $x^{(1)}_{u_1,i_1} x^{(2)}_{u_2,i_2} \ldots x^{(c)}_{u_c,i_c}$, где $u_1, \ldots, u_c$ — любые элементы группы F, а $i_1, \ldots, i_c$ — любые числа от 1 до d. Пусть $w_2, \ldots, w_c$ — любые элементы F. Рассмотрим модуль T $(w_2, \ldots, w_c;\ i_1, \ldots, i_c)$, порожденный всеми элементами $x^{(1)}_{v,i_1} x^{(2)}_{w_2 v,i_2} \ldots x^{(c)}_{w_c v,i_c}$, где v — любой элемент F. Очевидно, что M есть прямая сумма всех модулей $T(w_2, \ldots, w_c;\ i_1, \ldots, i_c)$, причем каждый из этих модулей инвариантен относительно F и является суммой циклических подмодулей, порожденных элементами $x^{(1)}_{v,i_1} x^{(2)}_{w_2 v,i_2} \ldots$ $\ldots x^{(c)}_{w_c v,i_c}$ и сопряженных относительно F. Это и доказывает предложение B). Теорема доказана.

При помощи рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 2, мы выведем еще один результат, который понадобится нам в дальнейшем. Обозначим через Z центр группы $\mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}$. Он является прямым произведением циклических групп порядка l^k. Совокупность элементов Z, являющихся l^r-ми степенями элементов Z, обозначим через Z_r. Очевидно, что Z_r является характеристической подгруппой $\mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}$. Группу $\mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}/Z_r$ обозначим через $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$ и Z_r/Z_{r+1} — через $Z^{(r)}$. При этом

$$\mathfrak{G}^{(c,0)}_{d,F} = \mathfrak{G}^{(c-1)}_{d,F}, \quad \mathfrak{G}^{(c,k)}_{d,F} = \mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}.$$

Следствие. *Для любого $r \leqslant k-1$ существует группа $\mathfrak{G}$ с областью операторов F и со следующими свойствами: $\mathfrak{G}$ содержит такую элементарную допустимую центральную подгруппу A, что*

1) $\mathfrak{G}/A \cong \mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$;

2) *A есть прямое произведение допустимых подгрупп, каждая из которых является прямым произведением m сопряженных относительно F циклических групп;*

1) *существует такой гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}^{(c,r+1)}_{d,F}$, что его ядро содержится в A.*

Для доказательства надо только заметить, что допустимая подгруппа $Z^{(r)}$ лежит в центре $\mathfrak{G}^{(c,r+1)}_{d,F}$ и операторно-изоморфна модулю многочленов Ли степени c от dm переменных $x_{u,i}$. Применяя теперь предложения A) и B), использованные при доказательстве теоремы 2, мы получаем, что существует такая элементарная абелева группа $\mathfrak{N}$ с группой операторов F, что $A = Z^{(r)} \times \mathfrak{N}$ обладает свойством 2). Следовательно, мы можем принять $\mathfrak{G}^{(c,r+1)}_{d,F} \times \mathfrak{N}$ за $\mathfrak{G}$.

В дальнейшем нам понадобится следующее замечание. Нормальный делитель A можно, очевидно, представить как пересечение таких подгрупп B_i, что $(A : B_i) = l$. Группы $\mathfrak{G}/B_i$ являются простыми центральными расширениями $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$. Точно так же Z_r можно представить как пересечение таких подгрупп C_i, что $(Z_r : C_i) = l$. Группы $\mathfrak{G}^{(c,r+1)}_{d,F}/C_i$ также являются простыми центральными расширениями $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$. Очевидно, что системы множителей, соответствующие вторым расширениям, содержатся

среди систем множителей, соответствующих первым расширениям. Нам важно отметить, что никаких новых систем множителей первые расширения не дают. Это непосредственно следует из того, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r+1)} \times \mathfrak{N}$.

3. Поля с центрально-диспозиционной группой Галуа. Пусть нам задана центрально-диспозиционная группа $\mathfrak{G}$ с группой операторов F, причем, ввиду следствия из теоремы 2, мы можем ограничиться случаем, когда центр $\mathfrak{G}$ есть прямое произведение m циклических групп порядка l, сопряженных относительно F. Обозначим этот центр через Z:

$$Z = \{z\} \times \{z^{u_1}\} \times \cdots \times \{z^{u_{m-1}}\}. \qquad (4)$$

Факторгруппу $\mathfrak{G}$ по подгруппе $Z_1 = \{z^{u_1}\} \times \cdots \times \{z^{u_{m-1}}\}$ обозначим через $\mathfrak{G}_1$, а $\mathfrak{G}/Z$ — через $\overline{\mathfrak{G}}$. Очевидно, что $\overline{\mathfrak{G}}$ имеет F в качестве группы операторов, но $\mathfrak{G}_1$ не является операторной группой. Полупрямое произведение $\overline{\mathfrak{G}}$ на F обозначим через $\overline{G}$.

Пусть дана цепочка полей $\Omega \subset k \subset \overline{K} \subset K_1$, из которых $\overline{K}/\Omega, K_1/k$ и k/Ω нормальны, причем группа Галуа k/Ω есть F, $\overline{K}/\Omega - \overline{G}$, $\overline{K}/k - \overline{\mathfrak{G}}$, $K_1/k - \mathfrak{G}_1$.

ТЕОРЕМА 3. *Если поля K_1^u для всех $u \in F$ независимы над $\overline{K}$, то композит всех K_1^u имеет в качестве группы Галуа над Ω полупрямое произведение $\mathfrak{G}$ на F.*

Мы называем здесь расширения $K_1, \ldots, K_r$ поля k независимыми над k, если пересечение композита $K_1 \ldots K_{i-1} K_{i+1} \ldots K_r$ с K_i есть k для любого $i = 1, \ldots, r$, так что группа Галуа композита $K_1 \ldots K_r$ над k изоморфна прямому произведению групп Галуа K_i/k.

Доказательство. Обозначим композит полей K_1^u через K и вычислим группу Галуа K/Ω. Сначала докажем, что группа Галуа K/k совпадает с $\mathfrak{G}$. Исследуем для этого подробнее группу $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}$ является расширением $\overline{\mathfrak{G}}$ с центральным нормальным делителем Z и, следовательно, задается своей системой множителей со значениями из Z. Ввиду того что для Z имеет место разложение (4), эта система множителей может быть записана в виде:

$$\alpha'(\sigma, \tau) = z^{\sum\limits_u a_u(\sigma,\tau) u}, \quad \sigma, \tau \in \overline{\mathfrak{G}}.$$

Перейдем к ассоциированной системе множителей, выбрав более удобную систему представителей. Пусть система множителей $\alpha'(\sigma, \tau)$ соответствует такому выбору представителей, при котором из класса σ выбирается представитель $[\sigma]$. Если мы обозначим $a_e(\sigma, \tau)$ просто через $a(\sigma, \tau)$, то группа $\mathfrak{G}_1$ будет центральным расширением $\overline{\mathfrak{G}}$ с системой множителей $z^{a(\sigma,\tau)}$. Рассмотрим представителей $[\sigma^{u^{-1}}]^u$, лежащих, конечно, в тех же классах смежности, что и $[\sigma]$. Рассмотрим одновременно группу $\mathfrak{G}_u = \mathfrak{G}/Z_1^u$. Эта группа будет иметь в качестве центра $\{z^u\}$, причем она будет центральным расширением $\overline{\mathfrak{G}}$ с системой множителей $z^{ua(\sigma^{u^{-1}}\tau^{u^{-1}})}$ (при указанном выборе представителей $[\sigma^{u^{-1}}]^u$). Из этого следует, что мы можем выбрать представителей в классах смежности $\mathfrak{G}$ по Z так, чтобы вместо $\alpha'(\sigma, \tau)$ получить ассоциированную систему множителей

$$\alpha(\sigma, \tau) = z^{\sum u a(\sigma^{u^{-1}}, \tau^{u^{-1}})}.$$

Группа Галуа K/k является, очевидно, расширением $\overline{\mathfrak{G}}$ с ядром гомоморфизма, изоморфным Z, так что для того, чтобы показать, что эта группа изоморфна $\mathfrak{G}$, нам надо только установить, что система множителей у нее та же, что и у $\mathfrak{G}$. Доказательство почти дословно повторяет приведенное выше рассуждение. Факторгруппа группы Галуа K/k по подгруппе $Z_1 = \{z^{u_1}\} \times \cdots \times \{z^{u_{m-1}}\}$ изоморфна группе Галуа K_1/k, т. е. $\mathfrak{G}_1$. Центр $\mathfrak{G}_1$ порождается элементом z, факторгруппа по центру есть $\overline{\mathfrak{G}}$ и при надлежащем выборе представителей в классах смежности по центру система множителей будет $z^{a(\sigma,\tau)}$. Выбранных нами представителей обозначим через $[\sigma]$. Автоморфизм $[\sigma]$ является некоторым продолжением автоморфизма σ с поля $\overline{K}$ на поле K_1. Рассмотрим теперь поле K_1^u, принадлежащее к подгруппе Z_1^u, и продолжим автоморфизм σ на это поле. Для этого заметим, что каждое число поля K_1^u представляется в виде α^u, где $\alpha \in K_1$, причем для примитивных элементов поля K_1^u такое представление однозначно. Определим в K_1^u автоморфизм $[\sigma]_u$ по формуле:

$$(\alpha^u)^{[\sigma]_u} = (\alpha^{[\sigma^{u^{-1}}]})^u.$$

Легко видеть, что получается действительно автоморфизм поля K_1^u, продолжающий автоморфизм σ поля $\overline{K}$. Группа Галуа K_1^u является расширением $\overline{\mathfrak{G}}$ с ядром гомоморфизма $\{z^u\}$, причем при указанном выборе представителей в классах смежности по $\{z^u\}$ система множителей будет, как легко видеть, $z^{a(\sigma^{u^{-1}}, \tau^{u^{-1}})u}$. Если для каждого u продолжить указанным образом автоморфизм σ на поле K_1^u, то получится некоторое продолжение этого автоморфизма на поле K, т. е. некоторый фиксированный выбор представителей в классах смежности группы Галуа K/k по Z. Ввиду сказанного, этому выбору представителей соответствует система множителей

$$z^{\sum_u a(\sigma^{u^{-1}}, \tau^{u^{-1}})u},$$

что и доказывает изоморфизм группы Галуа K/k с $\mathfrak{G}$.

Докажем, что установленный нами изоморфизм между группой Галуа K/k и группой $\mathfrak{G}$ является операторным изоморфизмом относительно группы операторов F. Мы установили изоморфизм между нашими двумя группами, отобразив изоморфно друг на друга их центры и некоторые построенные нами системы представителей классов вычетов по центру. Изоморфизм центров очевидным образом является операторным, так как оба центра являются прямыми произведениями групп вида $\{z^u\}$, $u \in F$. Нам остается проверить, что установленное соответствие между представителями классов смежности по центрам выдерживает применение операторов из F. Обозначим представителя построенной нами системы через $\langle\sigma\rangle$. Этот представитель однозначно определялся выбором представителя $[\sigma]$ в классе смежности по центру группы $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G} / Z_1$ и тем, что при $u \in F$

$$\langle\sigma\rangle\, Z_1^u = \langle\sigma^{u^{-1}}\rangle^u\, Z_1^u = ([\sigma^{u^{-1}}]\, Z_1)^u. \tag{5}$$

Но этим уже однозначно определяется действие операторов из F на представителя $\langle\sigma\rangle$. В самом деле, применяя к (5) автоморфизм $v \in F$, получим:

$$\langle\sigma\rangle^v\, Z_1^{uv} = \langle\sigma^{u^{-1}}\rangle^{uv}\, Z_1^{uv}$$

или, обозначая uv через w,

$$\langle\sigma\rangle^v Z_1^w = \langle\sigma^{vw^{-1}}\rangle^w Z_1^w = ([\sigma^{vw^{-1}}] Z_1)^w \text{ для всех } w \in F,$$

чем элемент $\langle\sigma\rangle^v$ однозначно определен.

Группа Галуа K/Ω является расширением F с ядром гомоморфизма, изоморфным $\mathfrak{G}$, причем, как мы доказали, ядро гомоморфизма даже операторно-изоморфно $\mathfrak{G}$. Нам остается показать, что расширение полупрямое, т. е. что при надлежащем выборе представителей $\bar{u}$ в классе смежности u по $\mathfrak{G}$ $\bar{u}$ будут образовывать группу.

По условию теоремы, автоморфизмы u поля k могут быть так продолжены до автоморфизмов поля $\bar{K}$, которое мы также будем обозначать через u, что новые автоморфизмы будут попрежнему образовывать группу. Для того чтобы указать продолжение автоморфизма v с поля $\bar{K}$ на поле K, достаточно указать его действие на элементы полей K_1^u, так как их композит дает все K. Воспользуемся представлением элементов поля K_1^u в виде α^u, $\alpha \in K_1$, $u \in F$, и положим

$$(\alpha^u)^{\bar{v}} = \alpha^{uv}.$$

Очевидно, что этот автоморфизм действительно продолжает автоморфизм v поля $\bar{K}$ и что

$$\overline{v_1 v_2} = v_1 v_2.$$

Таким образом теорема 3 доказана.

§ 2. Условие погружаемости для шольцевых расширений

При построении расширения K/k, имеющего в качестве группы Галуа над k группу $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,k)}$, а в качестве группы Галуа над Ω — полупрямое произведение $F \cdot \mathfrak{G}_{d,F}^{(c,k)}$, мы будем пользоваться, в основном, теми соображениями, которые были изложены в работе ([4]). А именно, мы будем строить поле K/k шольцевым, а самую конструкцию вести индукцией по c.

В этом параграфе мы разберем следующий вопрос. Пусть Ω, k и $\bar{K}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 3, $K_1 \supset \bar{K}$ и $(K_1 : \bar{K}) = l$, причем K_1 нормально над k, и K есть композит полей, сопряженных с K_1 над Ω. Мы будем предполагать, что $\bar{K}/k$ шольцево, и выясним, когда можно построить поле K_1 с заданной группой над k так, чтобы K тоже было шольцевым над k. При этом мы будем считать, что простые делители дискриминанта поля $\bar{K}/k$ имеют в k/Ω порядок 1. То, что этого можно добиться и для K/k очевидно на каждом шаге нижеследующих рассуждений.

Введенные сейчас обозначения мы будем употреблять, не оговаривая этого еще раз.

1. Построение инвариантов $[\chi, X]$. Мы будем предполагать в этом параграфе, что k содержит корни степени l из 1. Пусть $K_1 = \bar{K}(\sqrt[l]{\mu})$, где μ — l-инвариантное число поля $\bar{K}/k$. Обозначим класс l-инвариантных чисел, в котором лежит μ, через X. Рассмотрим любой характер χ порядка l группы Галуа $\bar{K}/k$ и соответствующее ему [см. ([4]), стр. 268] число α_χ из k. Это число может быть разложено на простые множители следующим образом:

$$(\alpha_\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\Sigma \varphi_{\mathfrak{p}}(u) u},$$

где $\mathfrak{p}$ пробегает не сопряженные друг с другом относительно Ω простые дивизоры k, а сумма в показателе распространена на все автоморфизмы u поля k/Ω.

Пусть $\mathfrak{D}$ — тот инвариантный дивизор $\bar{K}/k$, состоящий из критических простых дивизоров, который входит в разложение

$$(\mu) = \mathfrak{C}^l \mathfrak{D}\mathfrak{m} \tag{6}$$

[см. ([4]), стр. 266]. Рассмотрим функцию $g(u)$, определенную тем, что для любого корня степени l из 1

$$\zeta^u = \zeta^{g(u)},$$

и предположим, что для любого $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{D}^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u}$ l-взаимно просто с простым делителем $\mathfrak{P}$ дивизора $\mathfrak{p}$ в $\bar{K}$. Легко проверить, что это условие не зависит от выбора $\mathfrak{P}$ среди делителей $\mathfrak{p}$ в $\bar{K}$. Мы будем поэтому записывать его в виде

$$(\mathfrak{D}^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u},\ \mathfrak{p}) \approx 1. \tag{7}$$

Если условие (7) выполнено, то мы определим символ $[\chi, X]$ следующим образом:

$$[\chi, X] = \prod_\mathfrak{p}\left[\frac{\mu^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u}}{\mathfrak{p}}\right]\cdot\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}. \tag{8}$$

Соотношение (7) гарантирует, что символ, стоящий в правой части равенства (8), определен.

По своему виду условия (7), при которых определен символ $[\chi, X]$, и само определение этого символа зависят не только от χ и X, но и от выбора числа α_χ, соответствующего χ, числа μ в классе X и простых дивизоров $\mathfrak{p}$ среди множества всех сопряженных друг с другом дивизоров. Докажем, что и условия, при которых определен символ $[\chi, X]$, и сам этот символ зависят на самом деле только от χ и X.

a) Независимость от выбора α^χ очевидна, так как если α'_χ—другое число, соответствующее тому же χ, то $\alpha_\chi \approx \alpha'_\chi$, а поэтому $\varphi_\mathfrak{p}(u) \equiv \varphi'_\mathfrak{p}(u)\,(l)$ для любых $\mathfrak{p}$ и u.

b) Докажем независимость от выбора μ в классе X. Любое другое l-инвариантное число в классе X получается из μ умножением на l-ю степень числа из $\bar{K}$ и на число из k. Умножение μ на l-ю степень числа из $\bar{K}$ очевидным образом не меняет ни условия (7), ни символа $[\chi, X]$. Пусть мы умножили μ на число $m \in k$, взаимно простое с дискриминантом $\bar{K}/k$. Очевидно, что условие (7) не нарушилось, так как при этом не изменилось $\mathfrak{D}$. Правая же часть формулы (8) умножится на

$$\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{m^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u}}{\mathfrak{p}}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_\chi}{m}\right)^{-1}. \tag{9}$$

Ввиду того, что

$$\left(\frac{m^{\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{m}{\mathfrak{p}^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})u^{-1}}}\right),$$

мы имеем:

$$\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{m^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})g(u)u}}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_\mathfrak{p}\left(\frac{m}{\mathfrak{p}^{\Sigma\varphi_\mathfrak{p}(u^{-1})u^{-1}}}\right) = \left(\frac{m}{\alpha_\chi}\right).$$

Так как поле $\bar{K}$ по предположению шольцево, то α_χ гиперпримарно, а поэтому

$$\left(\frac{m}{\alpha_\chi}\right)=\left(\frac{\alpha_\chi}{m}\right),$$

что и показывает, что выражение (9) равно 1.

c) Для доказательства независимости от выбора $\mathfrak{p}$ предположим, что $\mathfrak{p}^v$ — любой простой дивизор, сопряженный с $\mathfrak{p}$. Тогда

$$\mathfrak{p}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(u)u}=\mathfrak{p}^{v\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(u)v^{-1}u}=\mathfrak{p}^{v\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(vu)u}.$$

Таким образом, замена $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{p}^v$ приводит к замене функции $\varphi_{\mathfrak{p}}(u)$ на функцию $\varphi_{\mathfrak{p}}(vu)$. Условие (7) примет тогда вид:

$$(\mathfrak{D}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(vu^{-1})g(u)u},\ \mathfrak{p}^v)\approx 1. \qquad (10)$$

Чтобы доказать это условие, применим к (7) автоморфизм v. Мы получим:

$$(\mathfrak{D}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(u^{-1})\,g(u)\,uv},\ \mathfrak{p}^v)\approx 1.$$

Делая в сумме, стоящей в показателе, замену переменной uv на u, получим:

$$(\mathfrak{D}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(vu^{-1})\,g\,(uv^{-1})u},\ \mathfrak{p}^v)\approx 1.$$

Так как $g(uv^{-1})\equiv g(u)\,g(v^{-1})\ (l)$, то

$$\mathfrak{D}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(vu^{-1})g(uv^{-1})u}\approx(\mathfrak{p}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(vu^{-1})g(u)u})^{g(v^{-1})},$$

что доказывает справедливость соотношения (10).

Таким образом, условие, при котором символ $[\chi, X]$ определен, не зависит от выбора $\mathfrak{p}$ среди сопряженных. Докажем, что и значение символа $[\chi, X]$ от этого выбора не зависит.

При замене $\mathfrak{p}$ на $\mathfrak{p}^v$ множитель

$$\left[\frac{\mu^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}(u^{-1})g(u)u}}{\mathfrak{p}}\right] \qquad (11)$$

в правой части (8) заменится на

$$\left[\frac{\mu^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}\,(vu^{-1})\,g\,(u)\,u}}{\mathfrak{p}^v}\right]. \qquad (12)$$

Пользуясь соотношением

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^v}\right)=\left(\frac{\alpha^{g\,(v^{-1})\,v^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right),$$

мы получим, что выражение (12) равно

$$\left[\frac{\mu^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}}\,(vu^{-1})\,g\,(u)\,g\,(v^{-1})\,uv^{-1}}}{\mathfrak{p}}\right].$$

Если заменить теперь uv^{-1} на u, то мы и получим (11).

Если $k=\Omega$, то символ $[\chi, X]$ превращается в символ (χ, X), определенный в работе (4). Очевидно, что символ $[\chi, X]$, как и символ (χ, X), обладает свойствами:

$$[\chi_1\chi_2, X]=[\chi_1, X]\,[\chi_2, X], \qquad (13)$$

$$[\chi, X_1X_2]=[\chi, X_1]\,[\chi, X_2], \qquad (14)$$

$$[\chi, X]=[\chi', X']. \qquad (15)$$

Последнее равенство имеет тот смысл, что, если $\overline{K}$ является подполем нормального над Ω поля $\overline{K}'$, то символ $[\chi, X]$ может быть вычислен в обоих полях и имеет при этом одно и то же значение.

2. Инварианты $[X]_\psi$. Эти инварианты определены только для классов X, содержащих таких l-инвариантных представителей μ, для которых поле $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu})$ шольцево. Иными словами, это те классы, для которых все инварианты (χ, X) и $(X)_h$ равны 1. В дальнейшем мы будем предполагать, что представитель μ в классе X выбран так, что поле $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu})$ шольцево.

Рассмотрим класс l-инвариантных чисел X и функции $\psi(u)$, заданные на группе F со значениями в группе вычетов по модулю l, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $\psi(1) = 0, \quad \psi(u^{-1}) = -\psi(u)\, g(u), \quad u \in F,$
2. $\mu^{\Sigma \psi(u) u} \approx \alpha_\psi \in k.$

Если $l = 2$, то мы наложим еще одно дополнительное условие. Пусть u есть инволютивный автоморфизм $\overline{K}/k : u^2 = 1$, $\overline{K}_u$ — подполе $\overline{K}$, состоящее из чисел, инвариантных относительно u, $\mathfrak{D}_u$ — дифферента $K_u / \overline{K}_u$. Мы потребуем, чтобы функция $\psi(u)$ удовлетворяла соотношению

3. $\prod\limits_u \mathfrak{D}_u^{\psi(u)} \approx 1$ в $\overline{K}$,

где произведение распространено на все инволютивные автоморфизмы из F.

Очевидно, что все эти условия относятся только к функции ψ и классу l-инвариантных чисел X, а не зависят от выбора представителя μ в X. Если выполнены условия 1 и 2, а при $l = 2$ и условие 3, то мы определим символ $[X]_\psi$ следующим образом: выберем в классе X такого l-гиперпримарного представителя μ, что $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu})/k$ будет шольцево и

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^u) = 1 \text{ для всех } u \neq 1, \tag{16}$$

где $\mathfrak{m}$ — дивизор из разложения (6), и положим

$$\mathfrak{m}_\psi = \mathfrak{m}^{\Sigma \psi(u) u}, \quad [X]_\psi = \left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_\psi}\right]. \tag{17}$$

Ввиду условия (16), правая часть (17) действительно определена.

Докажем, что $[X]_\psi$ не зависит от выбора μ в классе X. Очевидно, что при умножении μ на l-ю степень числа из $\overline{K}$ символ $[X]_\psi$ не меняется. Докажем, что он не меняется и при умножении μ на такое число m из k, что поле $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu m})$ — шольцево. В доказательстве может встретиться следующее затруднение: если

$$(\mu) = \mathfrak{C}^l \mathfrak{D} \mathfrak{m}, \quad (\mu') = \mathfrak{C}'^l \mathfrak{D} \mathfrak{m}',$$

причем и $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ удовлетворяют условию (16), и $\mu' = \mu m$, то из этого не следует, что и m удовлетворяет аналогичному (16) условию:

$$(m, m^u) = 1, \quad u \in F, \quad u \neq 1.$$

Чтобы в дальнейшем не иметь дела с этим затруднением, мы введем такое μ'', для которого

$$\mu'' = \mu\alpha, \quad \mu' = \mu''\beta, \quad (\mu'') = \mathfrak{C}''\mathfrak{D}\mathfrak{m}'', \tag{18}$$

и будем считать выполненными условия:

$$\begin{gathered}(\mathfrak{m}'', \mathfrak{m}''^u) = 1, \quad (\mathfrak{m}'', \mathfrak{m}^u) = 1, \quad (\mathfrak{m}'', \mathfrak{m}'^u) = 1, \\ (\alpha, \alpha^u) = 1, \quad (\beta, \beta^u) = 1.\end{gathered} \tag{19}$$

Для этого достаточно взять простой дивизор абсолютно первого порядка $\mathfrak{p}$, взаимно простой со всеми $\mathfrak{m}^u$ и $\mathfrak{m}'^u$ и эквивалентный $\mathfrak{m}$. Непосредственная проверка показывает, что условия (18) и (19) выполнены, если положить

$$(\alpha) = \mathfrak{p}\mathfrak{m}^{-1}, \quad (\beta) = \mathfrak{m}'\mathfrak{p}^{-1}.$$

Таким образом, нам достаточно доказать, что

$$\left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_\psi}\right] = \left[\frac{\mu'}{\mathfrak{m}'_\psi}\right], \tag{20}$$

если

$$\mu = \mu' m, \quad (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^u) = (\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'^u) = (m, m^u) = 1.$$

При этом мы можем считать, что μ, μ' и m l-гиперпримарны. В этом случае

$$\mathfrak{m}'_\psi = \mathfrak{m}_\varphi m^{\Sigma\psi(u)u}$$

и

$$\left[\frac{\mu'}{\mathfrak{m}'_\psi}\right] = \left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_\psi}\right]\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right)\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right]\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right). \tag{21}$$

Равенство (20) будет доказано, если мы докажем, что произведение второго и третьего сомножителей, а также четвертый сомножитель в правой части (21) равен 1. Действительно,

$$\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right] = \left[\frac{\mu^{\Sigma\psi(u)g(u)u^{-1}}}{m}\right] = \left[\frac{\mu^{-\Sigma\psi(u^{-1})u^{-1}}}{m}\right] = \left(\frac{\alpha_\psi}{m}\right)^{-1},$$

ввиду условий 1 и 2. Так как m l-гиперпримарно и является вычетом l-й степени по критическим дивизорам, то из закона взаимности следует, что

$$\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right]\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right) = \left(\frac{\alpha_\psi}{m}\right)^{-1}\left(\frac{m}{\alpha_\psi}\right) = 1.$$

Доказательство того, что

$$\left[\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right] = 1, \tag{22}$$

различно при $l \neq 2$ и при $l = 2$.

При $l \neq 2$ мы имеем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right) = \left(\frac{m^{\Sigma\psi(u)g(u)u^{-1}}}{m}\right) = \left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)g(u)u^{-1}}}\right) = \left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right)^{-1}.$$

Отсюда получаем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right)^2 = 1, \text{ т. е. } \left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)u}}\right) = 1.$$

При $l=2$, очевидно, $g(u)=1$ для всех u. Если u есть неинволютивный автоморфизм, то $u \neq u^{-1}$ и

$$\left(\frac{m}{m^{\psi(u)\,u+\psi(u^{-1})\,u^{-1}}}\right)=\left(\left(\frac{m}{m^u}\right)\left(\frac{m}{m^{u^{-1}}}\right)^{-1}\right)^{\psi(u)}. \tag{23}$$

Так как

$$\left(\frac{m}{m^{u^{-1}}}\right)=\left(\frac{m^u}{m}\right)=\left(\frac{m}{m^u}\right),$$

то это выражение равно 1.

Рассмотрим теперь произведение

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)\,u}}\right),$$

в котором сумма распространена только на отличные от 1 инволютивные автоморфизмы из F. В работе ([5]) доказано, что если u — инволютивный автоморфизм поля $\overline{K}$, в котором простые делители двойки и вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры полностью распадаются, то для символа Лежандра второй степени имеет место соотношение:

$$\left(\frac{m}{m^u}\right)=\left(\frac{m}{\mathfrak{D}_u}\right),$$

где $\mathfrak{D}_u$ — дифферента $\overline{K}/\overline{K}_u$, а $\overline{K}_u$ — подполе, принадлежащее u. Применяя это соотношение к нашему произведению и учитывая условие 3, получаем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(u)\,u}}\right)=\prod\left(\frac{m}{m^u}\right)^{\psi(u)}=\left(\frac{m}{\Pi\mathfrak{D}_u^{\psi(u)}}\right)=1.$$

Это равенство вместе с (23) и дает (22), т. е. доказывает независимость символа $[X]_\psi$ от выбора представителя μ в классе X.

Для символа $[X]_\psi$ имеет место равенство

$$[X]_\psi=[X']_\psi,$$

аналогичное (15), но соотношение, аналогичное (14), не имеет места.

3. Условия погружаемости. Кроме введенных сейчас инвариантов $[\chi, X]$ и $[X]_\psi$, мы рассмотрим еще введенные в работе ([4]) инварианты $(X)_h$ класса l-инвариантных чисел поля $\widetilde{K}/k$. При их помощи можно сформулировать следующее необходимое и достаточное условие погружаемости в шольцево поле.

Пусть $\overline{K}\supset k\supset\Omega$, $\overline{K}/k$ — шольцево и имеет группу Галуа степени l^α, $\overline{K}/\Omega$ — нормально, X — класс l-инвариантных чисел в $\overline{K}/k$, K_1 — любое простое центральное расширение $\overline{K}$, соответствующее X, и K — композит всех полей, сопряженных с K_1 над Ω.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы существовало поле K_1, для которого K — шольцево над k, необходимо и достаточно, чтобы все инварианты $(X)_h$, $[X]_\psi$ и $[\chi, X]$ равнялись 1 для всех ψ и χ, для которых они определены.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы проверяется непосредственно. Равенство единице инварианта $(X)_h$ следует из соответ-

ствующего утверждения теоремы 1 работы ([4]), так как из шольцевости K/k следует шольцевость K_1/k. В формуле (17), определяющей $[X]_\psi$, $\mathfrak{m}_\psi$ состоит только из простых делителей дивизоров $\mathfrak{m}^u$. Ввиду шольцевости K/k,

$$\left[\frac{\mu^u}{\mathfrak{p}}\right]=1, \text{ т. е. } \left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}^u}\right]=1 \text{ для всех } u\neq 1, \quad u\in F, \quad \mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{m},$$

откуда и следует, что $[X]_\psi=1$.

В формуле (8), определяющей $[\chi, X]$, для любого простого $\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{m}$, ввиду шольцевости K_1/k,

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{q}}\right)=1, \text{ т. е. } \left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)=1.$$

С другой стороны, ввиду шольцевости $K|k$ и ввиду (7),

$$\left[\frac{\mu^{\sum\psi_{\mathfrak{p}}(u^{-1})\,g(u)\,u}}{\mathfrak{p}}\right]=1, \quad \mathfrak{p}\,|\,\alpha_\chi,$$

откуда следует, что $[\chi, X]=1$.

Перейдем теперь к доказательству достаточности условий теоремы. Для этого заметим, что инварианты (χ, X), определенные в работе ([4]), содержатся среди инвариантов $[\chi, X]$. В самом деле, для того чтобы инвариант (χ, X) был определен, нужно, чтобы все простые дивизоры, входящие в α_χ в степени, не делящейся на l, были взаимно просты с $\mathfrak{D}$. Очевидно, что из этого следует выполнение условия (7), т. е. и символ $[\chi, X]$ тоже определен. При этом мы имеем:

$$[\chi, X]=\prod_{\mathfrak{p}}\left[\frac{\mu^{\sum\varphi_{\mathfrak{p}}(u^{-1})\,g(u)\,u}}{\mathfrak{p}}\right]\cdot\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}=$$

$$=\prod_{\mathfrak{p}}\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}^{\sum\varphi_{\mathfrak{p}}(u^{-1})\,u^{-1}}}\right]\cdot\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}=\left[\frac{\mu}{\alpha_\chi}\right]\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)^{-1}=(\chi, X).$$

Таким образом из условий теоремы вытекает равенство единице инвариантов (χ, X) и $(X)_h$. Применяя теперь теорему 1 работы ([4]), мы видим, что K_1 может быть выбрано шольцевым над k. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что K_1/k шольцево.

Очевидно, что первое, второе и четвертое условия шольцевости, будучи выполнены для поля K_1, выполняются для его сопряженных K_1^u, а следовательно, и для их композита K. Таким образом, нам остается показать, что если $K_1=\bar{K}(\sqrt[l]{\mu})$, то μ можно умножить на такое число $m\in k$, что $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu m})$ будет попрежнему шольцевым над k, и для композита полей, сопряженных с $\bar{K}(\sqrt[l]{\mu m})$ относительно Ω, будет выполнено третье условие шольцевости. Умножение μ на m заведомо не будет нарушать шольцевости K_1, если m будет тотально-положительным (при $l=2$), будет делиться только на простые дивизоры, полностью распадающиеся в $\bar{K}$, и будет сравнимым с 1 по модулю достаточно высокой степени l. Эту степень мы будем обозначать через l^g.

Мы добьемся шольцевости поля K в два приема. Сначала мы умножим μ на такое число m_1, чтобы K_1 осталось шольцевым и в K все критические простые дивизоры $\overline{K}$ имели порядок 1. Потом умножим μm_1 на такое число m_2, чтобы эти свойства не нарушались и, сверх того, все критические простые дивизоры K имели порядок 1.

Пусть $\mathfrak{p}$ — критический простой дивизор $\overline{K}$. Для того чтобы в поле K, получающемся присоединением к $\overline{K}$ всех $\sqrt[l]{\mu^u}$, простые делители $\mathfrak{p}$ имели порядок 1, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f_{\mathfrak{p}}(u)$, для которой

$$(\mathfrak{D}^{\Sigma f_{\mathfrak{p}}(u)u}, \mathfrak{P}) \approx 1, \quad \mathfrak{P} \mid \mathfrak{p},$$

выполнялось равенство:

$$\left[\frac{\mu^{\Sigma f_{\mathfrak{p}}(u)\,u}}{\mathfrak{p}}\right] = 1.$$

Положим

$$\xi_{f_{\mathfrak{p}}} = \left[\frac{\mu^{\Sigma f_{\mathfrak{p}}(u)\,u}}{\mathfrak{p}}\right]$$

и покажем, что существует тотально-положительное число m_1, состоящее из простых дивизоров, полностью распадающихся в $\overline{K}$, и сравнимое с 1 по модулю l^g, для которого

$$\left(\frac{m_1^{\Sigma f_{\mathfrak{p}}(u)\,u}}{\mathfrak{p}}\right) = \xi^{-1}_{f_{\mathfrak{p}}} \tag{24}$$

при любых $\mathfrak{p}$ и $f_{\mathfrak{p}}$. Очевидно, что тогда μm_1 будет удовлетворять нужным нам условиям.

Возьмем произвольный первообразный корень ζ степени l из 1 и положим:

$$\left(\frac{m_1}{\mathfrak{p}^u}\right) = \zeta^{x_{\mathfrak{p},u}}, \qquad \xi^{-1}_{f_{\mathfrak{p}}} = \zeta^{b_{f_{\mathfrak{p}}}}. \tag{25}$$

Тогда равенства (24) перепишутся так:

$$\left(\frac{m_1}{\mathfrak{p}^{\Sigma f_{\mathfrak{p}}(u)\,g(u)\,u^{-1}}}\right) = \xi^{-1}_{f_{\mathfrak{p}}}$$

или

$$\sum_u f_{\mathfrak{p}}(u^{-1})\,g(u^{-1})\,x_{\mathfrak{p},u} = b_{f_{\mathfrak{p}}} \text{ для всех } \mathfrak{p} \text{ и } f_{\mathfrak{p}}, \tag{26}$$

причем уравнение рассматривается в поле вычетов mod l. Выясним, когда существует тотально-положительное число m_1, удовлетворяющее условиям (25), состоящее из простых дивизоров, распадающихся в $\overline{K}$, и сравнимое с 1 по модулю l^g.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ произведение всех $\mathfrak{p}^u$, l^g и вещественных бесконечно удаленных простых дивизоров, через H — группу l-х степеней классов дивизоров по модулю $\mathfrak{F}$, а через L — поле классов к H. Покажем, что условия (25) и требование, чтобы m_1 было сравнимо с 1 по модулю l^g и тотально-положительно, эквивалентны тому, что дивизор (m_1) принадлежит к определенному автоморфизму в L. Действительно, если числа m_1 и m_1'

удовлетворяют этим условиям, то $(m_1')H = (m_1)H$, и, наоборот, если дивизор $\mathfrak{a}$ таков, что $\mathfrak{a}H = (m_1)H$, то $\mathfrak{a} = (\alpha)\mathfrak{b}^l$, причем α удовлетворяет всем нужным нам условиям. Обозначим через σ тот автоморфизм поля L, принадлежность к которому дивизора (m_1) гарантирует выполнение наложенных нами на m_1 условий.

Для того чтобы можно было найти число m_1, состоящее из простых множителей, полностью распадающихся в $\bar{K}$, и принадлежащее к автоморфизму σ в L, необходимо и достаточно, чтобы в пересечении $\bar{K} \cap L$ σ индуцировал единичный автоморфизм. Очевидно, что $\bar{K} \cap L$ есть поле, получающееся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$. Таким образом, нам надо выписать условия, при которых σ индуцирует в каждом из полей $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$ единичный автоморфизм.

Найдем автоморфизм, который σ индуцирует в $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$. Для этого возьмем произвольный дивизор $\mathfrak{a}$, принадлежащий к σ в L. Мы видели, что $\mathfrak{a} = (\alpha)\mathfrak{b}^l$ и, следовательно, (α) принадлежит в L к σ. Автоморфизм, индуцируемый σ в $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$, сводится к умножению $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$ на $\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha_\chi}{\alpha}\right)$. Так как α_χ l-гиперпримарно и тотально-положительно, то

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_\chi}\right) = \prod_{\mathfrak{p}, u} \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^u}\right)^{\varphi_{\mathfrak{p}, \chi}(u)} = \zeta^{\sum\limits_{\mathfrak{p}, u} x_{\mathfrak{p}, u} \varphi_{\mathfrak{p}, \chi}(u)},$$

если

$$(\alpha_\chi) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\sum \varphi_{\mathfrak{p}, \chi}(u)}.$$

Таким образом, для того чтобы существовало тотально-положительное число m_1, состоящее из полностью распадающихся в $\bar{K}$ простых дивизоров, сравнимое с 1 по модулю l^g и удовлетворяющее условиям (25), должно иметь место уравнение:

$$\sum_{\mathfrak{p}, u} x_{\mathfrak{p}, u} \varphi_{\mathfrak{p}, \chi}(u) = 0 \text{ для всех } \chi. \tag{27}$$

Нам остается доказать, что существуют $x_{\mathfrak{p}, u}$, удовлетворяющие уравнениям (26) и (27). Мы выпишем условия совместности этой системы уравнений и покажем, что они состоят в равенстве единице инвариантов $[\chi, X]$.

Если система, состоящая из уравнений (26) и (27), не совместна, то существует такая линейная комбинация этих уравнений, в которой все коэффициенты при неизвестных $x_{\mathfrak{p}, u}$ равны нулю, а свободный член не равен нулю. Пусть

$$\sum_\chi c_\chi \sum_{\mathfrak{p}, u} x_{\mathfrak{p}, u} \varphi_{\mathfrak{p}, \chi}(u) + \sum_{f_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}} d_{f_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}} \sum_u f_\mathfrak{p}(u^{-1}) g(u^{-1}) x_{\mathfrak{p}, u} = \sum_{f_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}} d_{f_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}} b_{f_\mathfrak{p}} \tag{28}$$

есть такая линейная комбинация.

Положим

$$\prod_\chi \chi^{c_\chi} = \chi_0, \quad \sum_{f_\mathfrak{p}} d_{f_\mathfrak{p}, \mathfrak{p}} f_\mathfrak{p}(u) = F_\mathfrak{p}(u).$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_{\chi} c_{\chi} \varphi_{\mathfrak{p},\chi}(u) = \varphi_{\mathfrak{p},\chi_0}(u),$$

$$\sum_{f_{\mathfrak{p}}} d_{f_{\mathfrak{p}},\mathfrak{p}} b_{f_{\mathfrak{p}}} = b_{F_{\mathfrak{p}}}.$$

Принимая во внимание, что в (28) коэффициенты при всех $x_{\mathfrak{p},u}$ равны нулю, получаем:

$$\varphi_{\mathfrak{p},\chi_0}(u) = -F_{\mathfrak{p}}(u^{-1}) g(u^{-1}) \text{ для всех } \mathfrak{p} \text{ и } u.$$

Из этого мы заключаем, что, во-первых,

$$(\mathfrak{D}^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{p},\chi_0}(u)\, g(u)\, u}, \mathfrak{p}) \approx 1$$

и, во-вторых,

$$\prod_{\mathfrak{p}} \left[\frac{\mu^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{p},\chi_0}(u)\, g(u)\, u}}{\mathfrak{p}} \right] = \zeta^{\Sigma b_{F_{\mathfrak{p}}}}. \tag{29}$$

Для совместности системы (28) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{f_{\mathfrak{p}},\mathfrak{p}} d_{f_{\mathfrak{p}},\mathfrak{p}} b_{f_{\mathfrak{p}}} = \sum b_{F_{\mathfrak{p}}} = 0,$$

т. е. чтобы правая часть (29) равнялась 1. Левая же часть этого равенства есть как раз $[\chi_0, X]$, так как, ввиду того что поле K_1 уже предположено шольцевым, $\left(\frac{\alpha_{\chi}}{\mathfrak{m}}\right) = 1$. Таким образом, система, состоящая из уравнений (26) и (27), совместна, а следовательно, число m_1 с нужными нам свойствами существует.

Обозначим число μm_1 через μ_1. Тогда, по доказанному, поле $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu_1})$ шольцево, а в композите всех его сопряженных все критические простые дивизоры $\overline{K}$ имеют порядок 1. Нам надо найти такое число m_2, чтобы для числа $\mu_1 m_2$ вместо μ_1 все эти свойства сохранялись, а в композите сопряженных к полю $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu_1 m_2})$ все критические простые дивизоры имели порядок 1.

Мы выберем m_2 так, чтобы оно было тотально-положительным, состояло из простых дивизоров, полностью распадающихся в $\overline{K}$, и удовлетворяло условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{m_2}{\mathfrak{p}}\right) = 1 \text{ для всех } \mathfrak{p}, \text{ критических в } \overline{K}/k, \\ m_2 \equiv 1\ (l^g), \quad (m_2, m_2^u) = 1 \quad u \in F, \quad u \neq 1. \end{array}\right\} \tag{30}$$

Так как $\overline{K}/\Omega$ нормально, то вместе с $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}^u$ будет критическим в $\overline{K}/k$. Из этого следует, что при таком выборе m_2 для $\mu_1 m_2$ будут сохраняться те свойства, выполнения которых для μ_1 мы перед тем добились. Обозначим через K композит сопряженных к $\overline{K}(\sqrt[l]{\mu_1 m_2})$ над Ω. Нам остается подобрать m_2 так, чтобы оно удовлетворяло условиям (30), а в поле K/k все критические дивизоры $K/\overline{K}$ имели порядок 1. Критическими дивизорами $K/\overline{K}$, не являющимися критическими в $\overline{K}$, будут только делители $(\mathfrak{m}_1 m_2)^u$, если

$$(\mu_1) = \mathfrak{C}_1^l \mathfrak{D} \mathfrak{m}_1.$$

Мы предположим, что

$$(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1^u) = 1,$$

так как этого, как легко видеть, можно добиться, умножая μ_1 на число m_2, удовлетворяющее условиям (30).

Для того чтобы делители $\mathfrak{m}_1 m_2$ имели порядок 1 в K, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left[\frac{\mu_1 m_2}{\mathfrak{q}^u}\right] = 1 \text{ для всех } \mathfrak{q} \mid \mathfrak{m}_1 m_2.$$

Эти условия естественно распадаются на две части:

$$\left[\frac{\mu_1 m_2}{\mathfrak{q}^u}\right] = 1, \text{ т. е. } \left(\frac{m_2}{\mathfrak{q}^u}\right) = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{q}^u}\right]^{-1} \text{ для } \mathfrak{q} \mid \mathfrak{m}_1$$

и

$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{r}^u}\right) = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{r}^u}\right]^{-1} \text{ для } \mathfrak{r} \mid m_2.$$

Мы будем подбирать m_2 таким, чтобы все делящие его простые дивизоры $\mathfrak{r}$ удовлетворяли условию:

$$\left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{r}^u}\right] = \zeta(u), \tag{31}$$

где $\zeta(u)$ — некоторая система корней степени l из 1. Само же m_2 должно тогда удовлетворять условиям:

$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{q}^u}\right) = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{q}^u}\right]^{-1}, \quad \mathfrak{q} \mid \mathfrak{m}_1,$$
$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{r}^u}\right) = \zeta(u)^{-1}, \quad u \in F, \quad u \neq 1, \quad \mathfrak{r} \mid m_2. \tag{32}$$

Вопрос о существовании таких чисел был рассмотрен в работе ([5]). Для того чтобы иметь возможность применить доказанную в этой работе теорему, мы будем предполагать, что корни из единицы $\zeta(u)$ удовлетворяют условиям:

$$\zeta(u) = \zeta(u^{-1})^{g(u^{-1})} \tag{33}$$

и в случае $l = 2$ потребуем, чтобы для любых инволютивных автоморфизмов $u_1, \ldots, u_r$ из F выполнялось условие:

$$\zeta(u_1) \ldots \zeta(u_r) = 1 \text{ всякий раз, как } \mathfrak{D}_{u_1} \ldots \mathfrak{D}_{u_r} \approx 1. \tag{34}$$

Здесь $\mathfrak{D}_{u_i}$ означает дифференту поля $\overline{K}/\overline{K}_{u_i}$, а $\overline{K}_{u_i}$ — поле, принадлежащее автоморфизму u_i.

Из теоремы работы ([5]) следует существование бесконечного количества чисел m_2, удовлетворяющих условиям (32) для любых $\zeta(u)$, удовлетворяющих условиям (33) и (34). Нам остается выяснить, можно ли при этом удовлетворить условиям (30) и (31). Для этого надо отдельно рассмотреть случаи $l \neq 2$ и $l = 2$.

Предположим, что $l \neq 2$. В этом случае число m_2, согласно доказательству теоремы в работе ([5]), может быть найдено в виде произведения двух простых чисел $\pi_1 \pi_2$, удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{q}^u}\right) = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{q}^u}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2,$$

причем мы можем добиться выполнения условий (30) и (31) для m_2, если докажем существование бесконечного числа простых чисел π, полностью распадающихся в $\overline{K}$ и удовлетворяющих условиям (33) и следующим условиям:

$$\left[\frac{\mu_1}{\pi^u}\right]=\zeta(u); \tag{35}$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}}\right)=1 \text{ для } \mathfrak{p}, \text{ критических в } \overline{K}/k; \tag{36}$$

$$\pi\equiv 1 \ (l^g); \tag{37}$$

$$(\pi)\neq(\pi^u), \quad u\in F, \quad u\neq 1. \tag{38}$$

Выясним, когда существуют простые числа π, удовлетворяющие всем этим условиям. Как и в первой части доказательства, мы построим модуль $\mathfrak{F}$, состоящий из произведения всех $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}^u$, l^g и бесконечно удаленных простых дивизоров, обозначим через H группу l-х степеней классов вычетов по модулю $\mathfrak{F}$ и через L — поле классов к H и построим такой автоморфизм σ в L, что принадлежность дивизора $\mathfrak{a}$ к σ означает, что $\mathfrak{a}=(\alpha)\mathfrak{b}^l$, причем α тотально-положительно и

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}^u}\right)=\left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{q}^u}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)=1, \quad \alpha\equiv 1\,(l^g).$$

Условие (35), чтобы простой дивизор $\mathfrak{r}$ полностью распадался в $\overline{K}$ и удовлетворял условиям

$$\left(\frac{\mu_1}{\mathfrak{r}^u}\right)=\zeta(u)$$

или

$$\left(\frac{\mu_1^u}{\mathfrak{r}}\right)=\zeta(u^{-1})^{g(u)},$$

эквивалентно тому, чтобы $\mathfrak{r}$ принадлежал ко вполне определенному автоморфизму τ поля K', полученного присоединением к $\overline{K}$ всех $\sqrt[l]{\mu_1^u}$, $u\in F$, $u\neq 1$. Таким образом, нам надо выяснить, когда существует простой дивизор поля k, принадлежащий в L к автоморфизму σ, а в K' — к автоморфизму τ.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы σ и τ индуцировали один и тот же автоморфизм в $K'\cap L$. Посмотрим, когда это будет так. Поле $K'\cap L$ получается, очевидно, присоединением к k всех $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$ и $\sqrt[l]{\alpha_\varphi}$, где φ — такая функция на группе F со значениями в группе вычетов по модулю l, что

$$\mu^{\Sigma\varphi(u)\,u}\approx\alpha_\varphi\in k, \quad \varphi(1)=0.$$

Таким образом, нам надо выяснить, когда σ и τ индуцируют один и тот же автоморфизм, во-первых, в поле $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$ и, во-вторых, в поле $k(\sqrt[l]{\alpha_\varphi})$. Очевидно, что в $k(\sqrt[l]{\alpha_\chi})$ и σ и τ — единичные автоморфизмы. Автоморфизм, который индуцирует σ в $k(\sqrt[l]{\alpha_\varphi})$, может быть найден точно таким же способом, который мы применяли в первой части доказательства. Этот автоморфизм сводится к умножению $\sqrt[l]{\alpha_\varphi}$ на $\left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{m}_\varphi}\right]$, где $\mathfrak{m}_\varphi=\mathfrak{m}_1^{\Sigma\varphi(u)\,u}$. Аналогично можно найти и тот автоморфизм, который индуцирует τ в $k(\sqrt[l]{\alpha_\varphi})$. Этот автоморфизм сводится к умножению $\sqrt[l]{\alpha_\varphi}$ на

$\prod_u \zeta(u^{-1})^{g(u)\varphi(u)}$. Таким образом, совпадение автоморфизмов σ и τ в $K' \cap L$ эквивалентно выполнению условий:

$$\prod_u \zeta(u^{-1})^{g(u)\varphi(u)} = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{m}_\varphi}\right]^{-\frac{1}{2}} \text{ для всех } \varphi. \tag{39}$$

Нам остается выяснить, когда существуют корни из единицы $\zeta(u)$, удовлетворяющие условиям (33) и (39).

Возьмем произвольный первообразный корень степени l из 1 и положим:

$$\zeta(u) = \zeta^{x_u}, \quad \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{m}_\varphi}\right]^{-\frac{1}{2}} = \zeta^{b_\varphi}.$$

Тогда условия (33) и (39) на x_u запишутся в виде уравнений в поле вычетов (mod l):

$$\begin{gathered} x_u = x_{u^{-1}} g(u^{-1}), \\ \sum_u x_{u^{-1}} g(u)\varphi(u) = b_\varphi. \end{gathered} \tag{40}$$

Мы выпишем условия совместности этой системы и покажем, что они заключаются в равенстве единице инвариантов $[X]_\psi$.

Если система (40) не совместна, то существует линейная комбинация входящих в нее уравнений, в которой все коэффициенты при неизвестных x_u равны 0, а свободный член $\neq 0$.

Пусть

$$\sum_u c_u(x_u - x_{u^{-1}} g(u^{-1})) + \sum_\varphi d_\varphi \sum_u x_{u^{-1}} g(u)\varphi(u) = \sum_\varphi d_\varphi b_\varphi \tag{41}$$

есть такая линейная комбинация.

Положим

$$\sum_\varphi d_\varphi \varphi(u) = \psi(u).$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_\varphi d_\varphi b_\varphi = b_\psi.$$

Учитывая, что в (41) коэффициенты при всех x_u равны 0, получаем:

$$g(u^{-1})\psi(u^{-1}) = c_{u^{-1}} - c_u g(u^{-1}),$$

откуда легко следует, что

$$\psi(u^{-1}) = -\psi(u) g(u), \quad \psi(1) = 0.$$

Таким образом, функция ψ удовлетворяет условию в определении символа $[X]_\psi$. Отсюда мы заключаем, что

$$\zeta^{b_\psi} = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{m}_\psi}\right]^{-\frac{1}{2}} = 1, \text{ т. е. } b_\psi = 0,$$

что и означает совместность системы (40).

Аналогичным образом мы поступаем и в случае $l = 2$. Согласно доказательству теоремы в работе ([5]), число m_2 в этом случае может быть найдено в виде произведения $\pi_1\pi_2\pi_3$ трех простых чисел, удовлетворяющих условиям

$$\left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{q}^u}\right) = \left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{q}^u}\right]^{-1} \quad (i = 1, 2, 3),$$

причем мы можем добиться выполнения условий (36) и (37) для m_2, если докажем существование бесконечного числа простых чисел π, полностью распадающихся в $\bar{K}$ и удовлетворяющих условиям:

$$\left[\frac{\mu_1}{\pi^u}\right] = \zeta(u)$$

и условиям (33), (34), (36), (37) и (38).

Как и в случае $l \neq 2$, для того чтобы существовали такие числа, необходимо и достаточно, чтобы была совместной следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_u &= x_{u^{-1}}, \\ x_{u_1} + \cdots + x_{u_r} &= 0, \text{ если } \mathfrak{D}_{u_1} \cdots \mathfrak{D}_{u_r} \approx 1, \\ \sum_u x_{u^{-1}} \varphi(u) &= b_\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Предположение о несовместности этой системы опять приводит к наличию линейной комбинации этих уравнений с коэффициентами при x_u, равными нулю, и свободным членом, не равным нулю. Пусть эта линейная комбинация есть

$$\sum_u c_u (x_u - x_{u^{-1}}) + \sum_\varphi d_\varphi \sum_u x_{u^{-1}} \varphi(u) +$$
$$+ \sum_{(u_1, \ldots, u_r)} e_{u_1, \ldots, u_r} (x_{u_1} + \cdots + x_{u_r}) = \sum d_\varphi b_\varphi,$$

где третья сумма слева распространена на все совокупности $(u_1, \ldots, u_r)$ инволютивных автоморфизмов, для которых

$$\mathfrak{D}_{u_1} \ldots \mathfrak{D}_{u_r} \approx 1.$$

Мы полагаем опять

$$\sum_\varphi d_\varphi \varphi(u) = \psi(u)$$

и получаем, как и при $l \neq 2$,

$$\psi(u^{-1}) c_{u^{-1}} - c_u + \sum_{u \in (u_1, \ldots, u_r)} e_{u_1, \ldots, u_r} = 0.$$

Отсюда мы видим, что при $u \neq u^{-1}$

$$\psi(u^{-1}) \neq -\psi(u),$$

а также, что на множестве инволютивных автоморфизмов

$$\psi(u) = \sum_{(u_1, \ldots, u_r)} \varepsilon_{u_1, \ldots, u_r}(u) \cdot e_{u_1, \ldots, u_r}, \quad (43)$$

где $\varepsilon_{u_1, \ldots, u_r}(u)$ есть характеристическая функция множества $(u_1, \ldots, u_r)$. Так как, по определению множеств $(u_1, \ldots, u_r)$,

$$\prod_u \mathfrak{D}_u^{\varepsilon_{u_1, \ldots, u_r}(u)} \approx 1,$$

где произведение распространено на все инволютивные автоморфизмы u, то из (34) следует, что

$$\prod_u \mathfrak{D}_u^{\psi(u)} \approx 1.$$

Таким образом, функция $\psi(u)$ удовлетворяет всем условиям, входящим в

определение инварианта $[X]_\psi$, а следовательно,

$$\zeta^{b_\psi} = \left[\frac{\mu_1}{m_\psi}\right] = [X]_\psi = 1,$$

что и означает совместность системы (42). Теорема доказана.

Мы применим теорему 4 к выводу условий, при которых шольцево поле K с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r-1)}$ над Ω может быть погружено в поле K с группой $F\cdot\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ над Ω. Подполе поля $\bar{K}$, принадлежащее $\mathfrak{G}_{d,F}^{c,r-1}$, мы попрежнему будем обозначать через k.

ТЕОРЕМА 5. *Если в поле $\bar{K}$ с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r-1)}$ над Ω инварианты $[\chi, X]$, $(X)_h$ и $[X]_\psi$ равны 1 для всех X, соответствующих расширению $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r-1)}$ до $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$, то K можно погрузить в нормальное над Ω шольцево поле K, имеющее над Ω группу Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$.*

Доказательство. Применяя следствие из теоремы 3, мы видим, что операторная группа $A = Z^{(l)}\times\mathfrak{N}$ может быть представлена в виде

$$A = A_1\times\cdots\times A_m,$$

где каждая группа A_i, в свою очередь, представляется в виде

$$A_i = \prod_{u\in F} Z_i^u,$$

причем Z_i является циклической группой порядка l. Проведем в группе A цепочку подгрупп B_i:

$$B_i = \mathfrak{N}A_{i+1}\ldots A_m, \quad B_0 = A, \quad B_m = \mathfrak{N}.$$

Очевидно, что

$$B_{i-1}/B_i \cong A_i/A_i \cap B_i. \tag{44}$$

Мы будем строить цепочку шольцевых полей K_i, содержащих K и имеющих группы Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}\times\mathfrak{N}/B_i$ над Ω. Так как K_m имеет группу Галуа $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$, то его и можно принять за поле K. Пусть поле K_{i-1} уже построено. Обозначим через X_i характер, обращающийся в 1 на всех циклических группах Z_j^u с $j \neq i$ или $u \neq 1$ и отличный от 1 на Z_i. Применим теорему 4 к полю K_{i-1} в качестве $\bar{K}$ и покажем, что K_{i-1} можно погрузить в такое циклическое поле степени l над K_{i-1} и нормальное над k, чтобы группа Галуа этого поля была расширением группы Галуа поля K_{i-1}/k, соответствующим X_i, а композит всех полей, сопряженных с ним над Ω, был шольцевым полем K_i. Для этого нам надо только проверить, что выполняются условия теоремы 4.

Будем различать два случая:

1) $c=1$, $r=1$ и

2) или c, или r отлично от 1.

Докажем, что в обоих случаях все инварианты $[\chi, X_i]$, $(X_i)_h$ и $[X_i]_\psi$ равны 1. В случае 1) это очевидно, так как $X_i = 1$. В случае 2) мы воспользуемся тем, что X_i обращается в 1 на всех A_j, $j < i$, и поэтому соответствует некоторому расширению группы Галуа $\mathfrak{G}_{dF}^{(c,r-1)}$ поля $\bar{K}$. С другой стороны, факторгруппа по подгруппе Фраттини не изменилась при переходе от группы Галуа поля $\bar{K}$ к группе Галуа поля K_{i-1}, так что характеры χ являются характерами $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r-1)}$. Ввиду этого, соотношения (15) и их аналоги для инвариантов $(X)_h$ и $[X]_\psi$ показывают, что

инварианты $[\chi, X_i]$, $(X_i)_h$ и $[X_i]_\psi$ в поле K_{i-1} совпадают с некоторыми инвариантами поля $\bar{K}$. Так как, по предположению, инварианты поля K равны 1, то это верно и для рассматриваемых инвариантов поля K_{i-1}.

Таким образом, доказано, что поле K_{i-1} погружаемо в шольцево поле $\tilde{K}_i$. Соотношение (44) показывает, что в поле $\tilde{K}_i$ содержится подполе K_i с группой Галуа $F \cdot \mathfrak{G}^{(c,\gamma)}/B_i$. Как подполе шольцева поля, поле K_i— шольцево. Теорема доказана.

§ 3. Конструкция полей, удовлетворяющих условиям задачи погружения

1. Операторные канонические гомоморфизмы. Содержание этого параграфа тесно примыкает к § 3 работы ([4]). Ввиду этого мы будем опускать доказательства некоторых предложений, если эти доказательства дословно повторяют рассуждения из работы ([4]), и ограничимся указаниями на соответствующие места этой работы.

Вместо групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ работы ([4]) мы будем рассматривать определенные выше операторные нильпотентные диспозиционные группы $\mathfrak{G}_{d,\,F}^{(c)}$. Так как большей частью c, k и F будут во всех рассуждениях одни и те же, то мы будем обозначать эти группы просто через $\mathfrak{G}_d$.

Во всех дальнейших рассуждениях будет играть роль некоторая фиксированная система образующих $s_{u,\,i}$ группы $\mathfrak{G}_d$. Все образующие $s_{u,\,i}$ при одном и том же i и всевозможных $u \in F$ мы будем называть классом образующих. Группа $\mathfrak{G}_d$ имеет, таким образом, d классов образующих.

Пусть даны группы $\mathfrak{G}_d$ и $\mathfrak{G}_\delta$ $(\delta \leqslant d)$ с образующими $s_{u,\,i}$ $(i = 1, \ldots, d)$ и $t_{u,\,i}$ $(i = 1, \ldots, \delta)$. Гомоморфизм $\mathfrak{G}_d$ на $\mathfrak{G}_\delta$ называется каноническим, если образующие $s_{u,\,i}$, $u \in F$, $i = 1, \ldots, \delta - 1$, переходят при этом гомоморфизме в $t_{u,\,i}$ при тех же u и i, а остальные образующие $s_{u,\,i}$ переходят при некоторых i в $t_{u,\,\delta}$ с тем же самым u, а при других i — в 1. Из определения следует, что всякий канонический гомоморфизм является операторным гомоморфизмом относительно группы F. Мы будем обозначать канонические гомоморфизмы буквами S, T и т. д. Описанный выше гомоморфизм мы будем называть гомоморфизмом типа $(s_{u,\,1}, \ldots, s_{u,\,\delta-1}; t_{u,\,1}, \ldots, t_{u,\,\delta-1} \,|\, t_{u,\,\delta})$, а то множество образующих группы $\mathfrak{G}_d$, для которых при гомоморфизме S $s_{u,\,i} \to s_{u,\,\delta}$, будем обозначать через $[S]$. Очевидно, что гомоморфизм S заданного типа однозначно определяется множеством $[S]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только канонические гомоморфизмы и поэтому называть их просто гомоморфизмами.

Два гомоморфизма S и T будем называть независимыми, если $[S]$ и $[T]$ не пересекаются. Тогда существует единственный гомоморфизм R, для которого

$$[R] = [S] \cup [T].$$

R мы будем называть композитом S и T и обозначать через $S * T$.

2. Функции гомоморфизмов. Рассмотрим функции $f(S)$, заданные на множестве всех гомоморфизмов и принимающие значения из некоторой конечной абелевой группы порядка ν. Для функций гомоморфизмов одного и того же типа $(s_{u,\,1}, \ldots, s_{u,\,\delta-1}; t_{u,\,1}, \ldots, t_{u,\,\delta-1} \,|\, t_{u,\,\delta})$ определяется степень относительно класса образующих $t_{u,\,\delta}$. Степень 0

имеет функция, тождественно равная 1. Функция $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$, если

$$\varphi(S, T) = f(S)^{-1} f(T)^{-1} f(S * T)$$

имеет для любого S, как функция от T, степень $\leqslant n-1$.

Функция $f(S)$ имеет степень $\leqslant n$ тогда и только тогда, когда для любого множества из $n+1$ попарно независимых гомоморфизмов $S_1, \ldots, S_{n+1}$ выполняется соотношение

$$\prod_{(i_1, \ldots, i_k)} f(S_{i_1} * \ldots * S_{i_k})^{(-1)^k} = 1, \qquad (45)$$

где $(i_1, \ldots, i_k)$ пробегает все непустые подмножества множества $(1, \ldots, n+1)$. Доказательство этого факта дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения из n° 2 § 3 работы ([4]), и мы его опускаем.

ТЕОРЕМА 6. *Для любых натуральных чисел k и n существует зависящее только от них число $C(k, n)$ со следующим свойством: какие бы k функций гомоморфизмов $f_1(S), \ldots, f_k(S)$ степени $\leqslant n$ ни были заданы на группе $\mathfrak{G}_d$ с $d \geqslant C(k, n)$, всегда найдется такой гомоморфизм S, что $f_i(S) = 1$, $i = 1, \ldots, k$.*

Следствие. *Если при тех же предположениях, что и в теореме 6, в группе $\mathfrak{G}_d$ указаны m классов образующих $s_{u, i_1}, \ldots, s_{u, i_m}$, $i_1, \ldots, i_m \geqslant \delta - 1$ и $d \geqslant C(k, n+m)$, то группу $\mathfrak{G}_d$ можно отобразить при помощи канонического гомоморфизма на группу $\mathfrak{G}_{\delta+m}$ с образующими $s'_{u,1}, \ldots, s'_{u, \delta+m}$, у которой все функции $f_1, \ldots, f_k$ обращаются в единицу на гомоморфизме $s'_{u,1} \to t_{u,1}, \ldots, s'_{u,\delta} \to t_{u,\delta}$, $s'_{u,\delta+1} \to 1, \ldots, s_{u,\delta+m} \to 1$.*

Доказательства теоремы 6 и следствия дословно повторяют доказательства теоремы 3 и следствия из нее в n° 3 § 3 работы ([4]). Мы их опускаем.

В дальнейшем мы будем применять теорию канонических гомоморфизмов не к группам $\mathfrak{G}^{(c)}_{d, F}$, а к факторгруппам $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{d, F}$ при некотором фиксированном значении r. Легко видеть, что всякий канонический гомоморфизм группы $\mathfrak{G}^{(c)}_{d, F}$ на группу $\mathfrak{G}^{(c)}_{\delta, F}$ определяет некоторый гомоморфизм $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{d, F}$ на $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{\delta, F}$ при любом $r \leqslant k$. Эти гомоморфизмы мы также будем называть каноническими и именно с ними мы и будем иметь дело. Группу центральных элементов порядка l в группе $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{\delta, F}$, соответственно $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{d, F}$, т. е. группу $Z^{(r-1)}$ для этой группы мы будем обозначать через $Z^{(r-1)}_{\delta}$, соответственно $Z^{(r-1)}_{d}$.

Пусть дана цепочка полей $\Omega \subset k \subset \overline{K}$, причем k/Ω нормально и имеет группу Галуа F, $\overline{K}/\Omega$ также нормально и группа Галуа $\overline{K}/k$ есть $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d, F}$, а $\overline{K}/\Omega$ — полупрямое произведение $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{d, F}$ на F. Изучим инварианты $[\chi, X]$ и $[X]_{\psi}$ для тех классов l-инвариантных чисел, которые соответствуют простым центральным расширениям $\mathfrak{G}^{(c, r)}_{d, F}$ до различных факторгрупп группы $\mathfrak{G}^{(c, r+1)}_{d, F}$. Все такие расширения находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами порядка l группы $Z^{(r)}_{d}$. Характер, соответствующий таким образом классу X, мы будем также обозначать через X.

Рассмотрим базис группы характеров порядка l $\chi_{u, i}$ $(i = 1, \ldots, d)$, взаимный к системе образующих $s_{u, i}$. Числа $\alpha_{\chi_{u_i}} \in k$ будем сокращенно

обозначать через $\alpha_{u,i}$. Если перенести операторы из F с группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ на ее группу характеров при помощи правила:

$$\chi^u(\sigma^u) = \chi(\sigma),$$

то мы будем иметь:

$$\chi_{u,i} = \chi_{1,i}^u, \quad \alpha_{u,i} \approx \alpha_{1,i}^u.$$

Ввиду этого мы обозначим $\alpha_{1,i}$ через α_i и будем считать, что

$$\alpha_{u,i} = \alpha_i^u.$$

Начиная с этого места, мы всегда будем предполагать, что α_i и α_j^u взаимно просты для всех i, j и u. Это условие будет выполнено, если, например, α_i будут делиться только на простые дивизоры порядка 1 над Ω, причем если $\mathfrak{p} \mid \alpha_i$, то $\mathfrak{p}^u \nmid \alpha_j$ при всех i, j и u.

Легко проверить, как это сделано в работе (4), стр, 290, что образующим автоморфизмом группы дивизора $\mathfrak{p}$, делящего α_i^u, будет автоморфизм σ, удовлетворяющий условиям:

$$\chi_{u,i}(\sigma) \neq 1, \quad \chi_{v,j}(\sigma) = 1 \text{ при } v \neq u \text{ или } i \neq j.$$

Такой автоморфизм, очевидно, имеет порядок l^k в факторгруппе группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ по ее коммутанту. Таким образом, если $c \neq 1$, то образующие автоморфизмы групп инерции делителей α_i^u не повышают своего порядка при переходе от $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ к расширению этой группы, соответствующему классу X. Из этого следует, что дивизор $\mathfrak{D}(X)$ l-взаимно прост с α_i^u, а следовательно, все инварианты $[\chi, X]$ определены.

Если $c = 1$, то классы X находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами χ. Будем обозначать через $\tilde{\chi}$ класс, соответствующий характеру X. Инвариант $[\chi_{u,i}, \tilde{\chi}_{v,j}]$ всегда определен, за исключением случая, когда $u = v$, $i = j$. Доказательство этих утверждений дословно повторяет доказательство соответствующих утверждений в n^0 4 § 3 работы (4).

Рассмотрим теперь шольцево поле $\bar{K} \supset k \supset \Omega$ с группой Галуа $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ над k и $F \cdot \mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ над Ω. Рассмотрим канонический операторный гомоморфизм S $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ на $\mathfrak{G}_{\delta,F}^{(c,r)}$ при некотором $\delta \leqslant d$. Его ядро $\mathfrak{N}$ является нормальным делителем группы $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$, так что к $\mathfrak{N}$ принадлежит нормальное подполе поля $\bar{K}$, которое мы будем обозначать через $\bar{K}^S$. Поле $\bar{K}^S$ имеет над k группу Галуа $\mathfrak{G}_{\delta,F}^{(c,r)}$, а над $\Omega - F \cdot \mathfrak{G}_{\delta,F}^{(c,r)}$. Кроме того, числа α_i^u, соответствующие полю $\bar{K}^S$, будут l-взаимно просты между собой, как доказано в n^0 5 § 3 работы (4). Каждый из инвариантов $[\chi, X]$ $(X)_h$ и $[X]_\psi$, определенный для поля $\bar{K}^S$, является при фиксированном $\bar{K}$ функцией гомоморфизма S.

Мы можем отождествить X с характером группы $Z^{(r)}$. С другой стороны, группа $Z^{(r)}$ операторно-изоморфна аддитивно записанному модулю многочленов Π степени c от переменных $x_{u,i}$ $(i = 1, \ldots, \delta)$. Все переменные $x_{u,i}$ при фиксированном i и любых $u \in F$ мы будем называть классом переменных.

ТЕОРЕМА 7. *Если характер X имеет относительно совокупности переменных класса $x_{u,\delta}$ степень $\leqslant n$, не аннулирует хотя бы одного многочлена, зависящего хотя бы от одной переменной $x_{u,\delta}$, и аннулирует все многочлены, зависящие только от $x_{u,i}$ $(i = 1, \ldots, \delta - 1)$,*

то инварианты $[\chi_{u,i}, X]$ *и* $(X)_\psi$, *как функции гомоморфизмов типа* $(s_{u,1}, \ldots, s_{u,\delta-1}\ ;\ t_{u,1}, \ldots, t_{u,\delta-1} \mid t_{u,\delta})$ *группы Галуа* $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ *шольцева поля* $\overline{K}$, *имеют следующие степени:* $(X)_h$ — *степень* $\leqslant n$, $[\chi_{u,i}, X]$ *при* $i \neq \delta$ — *степень* $\leqslant n$, $[\chi_{u,\delta}, X]$ — *степень* $\leqslant n+1$. *Таким образом, все эти инварианты имеют степень* $\leqslant c+1$.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 4 из n^0 5 § 3 работы (4) (причем нужно доказать и предшествующую ей лемму). Мы его опускаем.

Нам остается исследовать поведение инварианта $[X]_\psi$ как функции гомоморфизма.

При этом мы ограничимся случаем, когда в поле $\overline{K}/k$ с группой Галуа $\mathfrak{G}_{d,F}^{(c,r)}$ все инварианты $[\chi, X]$ и $(X)_h$ равны 1.

ТЕОРЕМА 8. *Если в поле* $\overline{K}$ *все инварианты* $[\chi, X]$ *и* $(X)_h$ *равны* 1, *а характер* X *модуля* $Z_d^{(r)}$ *имеет степень* $\leqslant n$ *относительно совокупности переменных класса* $x_{u,\delta}$, *не аннулирует хотя бы одного многочлена, зависящего хотя бы от одного из* $x_{u,\delta}$, *и аннулирует все многочлены, зависящие только от* $x_{u,i}$ $(i = 1, \ldots, \delta-1)$, *то инвариант* $[X]_\psi$, *как функция гомоморфизмов типа* $(s_{u,1}, \ldots, s_{u,\delta-1}; t_{u,1}, \ldots, t_{u,\delta-1} \mid t_{u,\delta})$ *группы Галуа поля* $\overline{K}$, *имеет степень* $\leqslant 2n$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в рассматриваемом нами случае вопрос о том, для каких ψ и X определен инвариант $[X]_\psi$, решается, если известны ψ как функция на группе F, X как система множителей на группе $\mathfrak{G}_{d,F}^{(r,r)}$, и поле k, вне зависимости от свойств поля $\overline{K}$. В самом деле, условия 1 и 3 в определении символа $[X]_\psi$ относятся только к свойствам функции ψ и поля k, а условие 2 эквивалентно такому:

$$X^{\Sigma\psi(u)u} = 1. \tag{46}$$

Здесь X^u обозначает образ X при автоморфизме, который u индуцирует в группе характеров группы $Z_d^{(r)}$. Очевидно, что условие (46) не зависит от поля $\overline{K}$.

Пусть X_1, X_2 и X_3 — три характера, для которых определен инвариант $[X]_\psi$. Докажем, что для них выполняется соотношение:

$$[X_1X_2X_3]_\psi [X_1X_2]_\psi^{-1} [X_1X_3]_\psi^{-1} [X_2X_3]_\psi^{-1} [X_1]_\psi [X_2]_\psi [X_3]_\psi = 1, \tag{47}$$

аналогичное частному случаю (45) при $n = 2$.

Соотношение (47) доказывается непосредственной проверкой. Выберем для этого в классах l-инвариантных чисел, соответствующих X_1, X_2 и X_3, таких представителей μ_1, μ_2 и μ_3, чтобы соответствующие дивизоры $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_3$ удовлетворяли соотношениям: $(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j^u) = 1$, $i, j = 1, 2, 3$, кроме случая $i = j$, $u = 1$. Пусть $\mathfrak{m}_\psi^{(i)} = \mathfrak{m}_i^{\Sigma\psi(u)u}$, $i = 1, 2, 3$. Тогда равенство (47) переписывается так:

$$\left[\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\mathfrak{m}_\psi^{(1)}\mathfrak{m}_\psi^{(2)}\mathfrak{m}_\psi^{(3)}}\right]\left[\frac{\mu_1\mu_2}{\mathfrak{m}_\psi^{(1)}\mathfrak{m}_\psi^{(2)}}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_1\mu_3}{\mathfrak{m}_\psi^{(1)}\mathfrak{m}_\psi^{(3)}}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_2\mu_3}{\mathfrak{m}_\psi^{(2)}\mathfrak{m}_\psi^{(3)}}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_1}{\mathfrak{m}_\psi^{(1)}}\right]\left[\frac{\mu_2}{\mathfrak{m}_\psi^{(2)}}\right]\left[\frac{\mu_3}{\mathfrak{m}_\psi^{(3)}}\right] = 1. \tag{48}$$

В свою очередь, равенство (48) проверяется непосредственно, если воспользоваться мультипликативностью символа $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right]$.

Рассмотрим теперь все характеры X, для которых определен инвариант $[X]_\psi$ с фиксированной функцией ψ. Как показывает равенство (46), эти характеры образуют группу. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — базис этой группы и

$$X = X_1^{c_1} \ldots X_m^{c_m} \tag{49}$$

— запись произвольного характера через базисные. При фиксированном поле $\overline{K}$ инвариант $[X]_\psi$ может быть записан в виде $\zeta^{f(c_1,\ldots,c_m)}$, где ζ — некоторый корень степени l из 1, $f(c_1, \ldots, c_m)$ является функцией от m переменных, причем как аргументы, так и функция пробегают значения из поля классов вычетов по модулю l.

Докажем, что имеет место представление:

$$\begin{gathered} f(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{i,k} c_i c_k + \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \quad (a_{i,k} = a_{k,i}) \text{ при } l \neq 2, \\ f(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} a_{i,k} c_i c_k + \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \text{ при } l = 2. \end{gathered} \tag{50}$$

Для этого обозначим через $\bar{c}$ вектор с координатами $(c_1, \ldots, c_m)$ из поля классов вычетов по модулю l. Тогда равенство (47) запишется так:

$$f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}) - f(\boldsymbol{d} + \boldsymbol{e}) + f(\boldsymbol{c}) + f(\boldsymbol{d}) + f(\boldsymbol{e}) = 0.$$

Отсюда следует, что симметричная относительно $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ функция

$$\varphi(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = f(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) - f(\boldsymbol{c}) - f(\boldsymbol{d}) \tag{51}$$

линейна как по аргументу $\boldsymbol{c}$, так и по аргументу $\boldsymbol{d}$.

При $l \neq 2$ мы можем записать $\varphi(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ в виде:

$$\varphi(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) = \sum_{i,k=1}^{m} a_{i,k} c_i d_k \quad (a_{i,k} = a_{k,i}).$$

Если мы положим

$$f_1(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{1}{2} a_{i,k} c_i c_k, \tag{52}$$

то f_1 будет, как легко проверить, удовлетворять тому же соотношению (51), что и f. Из этого следует, что функция $f(\boldsymbol{c}) - f_1(\boldsymbol{c})$ линейна относительно $\boldsymbol{c}$, т. е.

$$f = f_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i c_i,$$

что вместе с (52) и дает в этом случае формулу (50).

При $l = 2$ мы можем записать φ в виде

$$\varphi = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} a_{i,k} (c_i d_k + d_i c_k) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i d_i.$$

Положим

$$f_1(c_1, \ldots, c_m) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} a_{i,k} c_i c_k.$$

Как легко проверить,

$$f_1(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) - f_1(\boldsymbol{c}) - f_1(\boldsymbol{d}) = \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant m} a_{i,k} (c_i d_k + d_i c_k).$$

Таким образом, если положим $f_2 = f - f_1$, то будем иметь:

$$f_2(c+d) - f_2(c) - f_2(d) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i d_i. \tag{53}$$

Положим в равенстве (53) $c = d$. В левой части мы получим:

$$f_2(c+c) - f_2(c) - f_2(c) = 0,$$

а следовательно,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i c_i = 0.$$

Так как это равенство имеет место для всех c_i, то отсюда следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Ввиду этого, функция $f(c) - f_1(c)$ линейна относительно c, откуда, как и раньше, следует (50).

Рассмотрим теперь любой характер X группы $Z_8^{(r)}$, для которого определен инвариант $[X]_\psi$. При любом каноническом гомоморфизме S ему соответствует характер X^S группы $Z_d^{(r)}$, для которого инвариант $[X^S]_\psi$ также определен. Если записать X^S в виде (49), то c_i будет функцией $c_i(S)$ гомоморфизма S. Ввиду (50), имеем:

$$f(S) = \sum a_{i,k} c_i(S) c_k(S) + \sum b_i c_i(S).$$

С другой стороны, формула (37) работы [4] показывает, что каждая функция $c_i(S)$ имеет степень $\leqslant n$ относительно S. Утверждение теоремы будет доказано, если мы покажем, что произведение двух функций, имеющих степень $\leqslant n$, имеет степень $\leqslant 2n$.

Мы докажем, что вообще, если $f(S)$ и $\varphi(S)$ имеют соответственно степени $\leqslant n$ и $\leqslant m$, то $f(S)\varphi(S)$ имеет степень $\leqslant n+m$. Воспользуемся индукцией по n и m. Нам надо доказать, что

$$f(S*T)\varphi(S*T) - f(S)\varphi(S) - f(T)\varphi(T) \tag{54}$$

имеет как относительно S, так и относительно T степень $\leqslant m+n-1$.

Для упрощения записи обозначим выражение $f(S*T) - f(S) - f(T)$ через Δf. Непосредственным приведением подобных членов проверяется следующее тождество:

$$\Delta(f\varphi) = \Delta f \Delta\varphi + f(S)\Delta\varphi + f(T)\Delta\varphi + \varphi(S)\Delta f + \varphi(T)\Delta f + \\ + f(S)\varphi(T) + \varphi(S) f(T). \tag{55}$$

Если m или n равно 0, то $f\varphi$ очевидным образом имеет степень, равную $m+n$, так что в этом случае наше утверждение доказано. Рассмотрим теперь случай, когда ни m, ни n не равно 0, и найдем степень $\Delta(f\varphi)$ относительно S (ввиду симметрии S и T степень относительно T будет такой же). Степень $\Delta f \leqslant m-1$, а степень $\Delta\varphi \leqslant n-1$. По индуктивному предположению, степень $\Delta f \Delta\varphi \leqslant m+n-2$, степень $f(S)\Delta\varphi \leqslant m+n-1$, степень $\varphi(T)\Delta f \leqslant m+n-1$. Так как мы интересуемся теперь степенью относительно S, то $f(T)$ и $\varphi(T)$ являются постоянными. Очевидно, что при умножении на постоянную степень функция не изменяется. Таким образом степень $f(T)\Delta\varphi \leqslant n-1$, степень $\varphi(T)\Delta f \leqslant m-1$, степень $f(T)\varphi(S) \leqslant n$ и степень $f(S)\varphi(T) \leqslant m$. Так как $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$, то $m \leqslant m+n-1$ и $n \leqslant m+n-1$. Мы доказали, таким образом, что каждое слагаемое в формуле (55) имеет степень $\leqslant m+n-1$, а значит, и степень $\Delta(f\varphi) \leqslant m+n-1$. Теорема доказана.

Теперь мы можем перейти к доказательству того, что любое поле алгебраических чисел k/Ω с группой Галуа F можно погрузить при $l > c$ в поле K, нормальное над Ω и имеющее над k группу Галуа $\mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}$ (как операторную группу).

Доказательство весьма тесно примыкает к содержанию n° 6 § 3 работы (4).

ТЕОРЕМА 9. *Для любого натурального δ существует натуральное $C(\delta)$ со следующим свойством: в любом шольцевом поле $\overline{K}$, имеющем над k группу Галуа $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$, над Ω — $F\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$ с $d > C(\delta)$, и попарно l-взаимно простые числа α_i^u, существует подполе $\overline{K}^S$, у которого группа Галуа над k есть $\mathfrak{G}^{(c,r)}_{\delta,F}$, а над Ω — $F\cdot\mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$ и все инварианты $[\chi, X]$, $(X)_h$ и $[X]_\psi$ равны 1. Здесь $\overline{K}^S$ означает подполе, соответствующее некоторому операторному каноническому гомоморфизму S.*

Доказательство. Сначала доказывается существование числа $C_1(\delta)$, которое обладает теми же свойствами, что и число $C(\delta)$ в формулировке теоремы 9, за исключением того, что у поля $\overline{K}^S$ инварианты $[X]_\psi$ не обязаны быть равными 1. Доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 5 работы (4). Мы его опускаем. Затем предполагается, что в поле $\overline{K}$ все инварианты $[\chi, X]$ и $[X]_\psi$ уже равны 1. Тогда это имеет место и для любого его подполя, соответствующего некоторому операторному каноническому гомоморфизму его группы Галуа. Доказывается, что для такого поля существует число $C_2(\delta)$, которое обладает теми же свойствами, что и число $C(\delta)$ в формулировке теоремы 9. Доказательство опять дословно повторяет доказательство теоремы 5 работы (4). Очевидно, что если взять за $C(\delta)$ число $C_1(C_2(\delta))$, то $C(\delta)$ будет удовлетворять всем требованиям теоремы 9.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть заданы произвольное нормальное поле алгебраических чисел k/Ω с группой Галуа F и F — операторная группа $\mathfrak{G}$ порядка l^α и класса c, причем $l > c$. Существует поле K, содержащее k, нормальное над Ω и имеющее над k группу Галуа $\mathfrak{G}$, а над Ω — $F\cdot\mathfrak{G}$.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая:

1. k содержит корень степени l из 1. В этом случае мы можем применять все предшествующие рассуждения. Мы докажем даже, что поле $\overline{K}$ можно построить шольцевым и таким, чтобы соответствующие ему числа α_i^u были попарно l-взаимно просты.

Так как каждая группа c является операторно гомоморфным образом некоторой группы $\mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}$, то достаточно рассмотреть случай $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(c)}_{d,F}$. Мы рассмотрим более общий случай $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^{(c,r)}_{d,F}$. Доказательство будем вести индукцией по c, а при фиксированном c — индукцией по r. Так как $\mathfrak{G}^{(c,0)}_{d,F} = \mathfrak{G}^{(c-1)}_{d,F}$, а $\mathfrak{G}^{(c,k)}_{d,F} = \mathfrak{G}^{(c+1)}_{d,F}$, то достаточно рассмотреть только индукцию по r при фиксированном c.

Пусть нам надо построить поле K с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}^{(c,r)}_{\delta,F}$ над Ω. Мы можем считать построенным поле $\overline{K}$ с группой $\mathfrak{G}^{(c,r-1)}_{d,F}$ с любым d. Возьмем за d число $C(\delta)$, существование которого установлено теоремой 9. Пусть $\overline{K}$ — поле с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}^{(c,r-1)}_{d,F}$ над Ω, существование которого следует из индуктивного предположения. Согласно теореме 9, в нем существует подполе $\overline{K}^S$ с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}^{(c,r-1)}_{\delta,F}$ над Ω и всеми инвариантами $[\chi, X]$, $(X)_h$ и $[X]_\psi$, равными 1. Как подполе шольцева поля $\overline{K}$, поле $\overline{K}^S$ — шольцево и все соответствующие ему числа α_i^u будут l-взаимно просты.

Из теоремы 5 настоящей работы следует, что поле $\overline{K}^S$ можно погрузить в шольцево поле K с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{\delta,F}^{(c,r)}$ над Ω. Дословным повторением рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 6 работы (⁴), доказывается, что у поля K числа α_i^u попарно l-взаимно просты.

2. k не содержит корня степени l из единицы. Пусть в результате присоединения к k этого корня получается поле $\overline{k}$ с группой Галуа $\overline{F}$ над Ω. Группа F имеет нормальный делитель H, являющийся группой Галуа $\overline{k}/k$. Рассмотрим $\mathfrak{G}$ как операторную группу с группой операторов $\overline{F}$, считая, что элементам H соответствует единичный оператор, а любому $\overline{u}\in\overline{F}$ соответствует тот же оператор, что и $u\in F$, если $u=\overline{u}H$. Ввиду того что в $\overline{k}$ содержится корень степени l из 1, мы можем применить результат, полученный в случае 1, и построить поле $\overline{K}$ с группой $\overline{F}\cdot\mathfrak{G}$ над Ω. В группе $\overline{F}\cdot\mathfrak{G}$ H является нормальным делителем. К нему принадлежит нормальное подполе $K\supset k$, которое, очевидно, имеет над Ω группу Галуа $\overline{F}\cdot\mathfrak{G}/H\cong F\cdot\mathfrak{G}$. Теорема доказана.

Заметим в заключение, что ограничение $l>c$, накладывавшееся все время, использовалось нами только один раз — при доказательстве теоремы 2. Это ограничение было существенно в том месте, где мы доказали, что представление Ли является прямым слагаемым тензорного представления. Как известно [см. (¹), стр. 211], если $(m, l)=1$, то любое представление группы F порядка m в поле характеристики l вполне приводимо. Отсюда следует, что представление Ли, являющееся фактором тензорного представления, содержится в нем в качестве прямого слагаемого. Таким образом, все предшествующие рассуждения сохранят силу, если заменить ограничение $l>c$ ограничением $(m, l)=1$. Мы получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 11. *Пусть k/Ω — нормальное поле алгебраических чисел с группой Галуа F порядка m и G — любая группа, имеющая такой нормальный делитель $\mathfrak{G}$ порядка l^α, что $G/\mathfrak{G}\cong F$, $(m, l)=1$. Существует поле $K\supset k$, нормальное над Ω и имеющее над ним группу Галуа G.*

В формулировку теоремы не включено требование, чтобы G было полупрямым произведением F и $\mathfrak{G}$, так как, ввиду условия $(m, l)=1$, это следует из теоремы Шура [см. (³), стр. 386].

Поступило
10. V. 1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ван дер Варден, Современная алгебра, т. II, М., 1947.

[2] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947.

[3] Курош А. Г., Теория групп, М., 1953.

[4] Шафаревич И. Р., О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 261—296.

[5] Шафаревич И. Р., Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 327—334.

[6] Brauer R., On algebras which are connected with the semisimple continuous groups, Ann. Math., v. 38 (1937), 857—872.

[7] Scholtz A., Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe, Math. Zeitschr., Bd. 30 (1929), 332—356.

[8] Thrall R. M., A note on a theorem by Witt, Bull. Amer. Math. Soc., v. 47 (1941), 303—308.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 419—426

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

РАДИКАЛ В ОБОБЩЕННЫХ Q-КОЛЬЦАХ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В работе изучаются обобщенные Q-кольца, т. е. такие топологические кольца, в которых все обобщенно-радикальные элементы [см. ([4])] образуют открытое множество.

Введение

Радикал кольца в смысле Джекобсона был недавно использован в работах Капланского [см. ([1]), ([2]), ([3])] для изучения структуры топологических колец.

В работе ([1]) доказывается, что радикал Джекобсона замкнут не только в банаховых алгебрах, но и вообще в любом топологическом кольце, в котором квази-регулярные элементы образуют открытое множество; такое кольцо Капланский называет Q-кольцом. Далее, в той же работе полностью описывается структура компактных (бикомпактных) полупростых колец при помощи следующей теоремы:

Компактное полупростое кольцо есть топологическая прямая сумма (любого числа) конечных простых колец.

В нашей работе рассматриваются топологические кольца, в которых обобщенно-радикальные элементы [см. ([4])] образуют открытое множество; такие кольца, как это следует из теоремы 1, являются естественным обобщением Q-колец и поэтому мы их называем *обобщенными Q-кольцами.*

В § 1 показывается, что в обобщенных Q-кольцах радикал N, в смысле Сегала, Бруна и Маккоя, замкнут, а также, что обобщенное Q-кольцо, не содержащее собственных замкнутых присоединенных идеалов, является или присоединенно-простым кольцом, или простым кольцом с единицей.

В § 2 рассматривается радикал N в ограниченных кольцах.

Совсем недавно примерно эти же вопросы рассматривались в заметке ([5]) *. Часть наших результатов, правда, полученных другим методом, пересекается с результатами этой заметки, так как нетрудно показать, что понятие обобщенного Q-кольца совпадает с понятием G-кольца, введенного в заметке ([5]). Действительно, это сразу вытекает из следующих двух предложений, доказанных в работах ([4]) и ([6]).

1. *Элемент a будет обобщенно-радикальным тогда и только тогда, когда a является F-регулярным, т. е. когда $a \in F(a)$, где*

$$F(a) = \left\{ax - x - ya + y + \sum (x_i a y_i - x_i y_i)\right\}.$$

---

* Автор ознакомился с этой заметкой после того, как результаты, излагаемые в настоящей работе, уже были получены и рукопись в значительной мере была подготовлена к печати.

2. *Элемент a будет F-регулярным тогда и только тогда, когда a является G-регулярным, т. е. когда $a \in G(a)$, где*

$$G(a) = \left\{ax - x + \sum (x_i a y_i - x_i y_i)\right\}.$$

§ 1. Обобщенные Q-кольца

Как обычно, под топологическим кольцом мы будем понимать такое ассоциативное кольцо, которое одновременно является хаусдорфовым пространством, причем разность $a - b$ и произведение ab являются непрерывными функциями от a и b.

Топологическое кольцо называется Q-кольцом [см. ([1]), ([2])], если все его квази-регулярные элементы образуют открытое множество. Для колец с единицей это равносильно тому, что все обратимые элементы образуют открытое множество. Ясно, что всякое топологическое тело является Q-кольцом, так как в нем все элементы, кроме нуля, обратимы. Очевидно также, что всякое топологическое радикальное кольцо в смысле Джекобсона тоже является Q-кольцом, так как в нем все элементы квази-регулярны.

В работах ([1]) и ([2]) доказывается, что полные нормированные кольца, а также локально компактные (бикомпактные) кольца без делителей нуля являются Q-кольцами.

Можно легко показать, что *локально компактные полурадикальные кольца* [см. ([7])] *также являются Q-кольцами.*

Действительно, это следует из того, что при доказательстве соответствующей теоремы для колец без делителей нуля используется только то обстоятельство, что в кольце без делителя нуля, в достаточно малой окрестности нуля, нет идемпотентных элементов, отличных от нуля. Но в полурадикальных кольцах вовсе нет идемпотентных элементов, отличных от нуля, так как в таких кольцах из равенства $ax = x$ следует $x = 0$.

Определение 1. Топологическое кольцо будем называть *обобщенным Q-кольцом,* если все его обобщенно-радикальные элементы образуют открытое множество.

Нетрудно показать, что топологическое кольцо $\mathfrak{A}$ с единицей будет обобщенным Q-кольцом тогда и только тогда, когда все его элементы, порождающие двусторонние идеалы, совпадающие со всем кольцом, образуют открытое множество. Это вытекает из следующего замечания.

Замечание 1. *В кольце $\mathfrak{A}$ с единицей e элемент a будет обобщенно-радикальным тогда и только тогда, когда элемент $e - a$ порождает двусторонний идеал, совпадающий с $\mathfrak{A}$.*

Действительно, покажем сперва, что в любом кольце с единицей e имеет место равенство

$$\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A} = e + (e - a), \tag{1}$$

где $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$ — двусторонний присоединенный идеал, порожденный элементом a, а $(e - a)$ — двусторонний идеал, порожденный элементом $e - a$.

Пусть элемент $b \in \mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$, т. е.

$$b = \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i),$$

где $\Sigma \lambda_i = 1$. Имеем:

$$b = \sum \lambda_i [e - (e - x_i)(e - a)(e - y_i)] = e - \sum \lambda_i (e - x_i)(e - a)(e - y_i) \in e + (e - a).$$

Обратно, пусть элемент $c \in e + (e - a)$. Имеем:

$$c = e + \sum_{i=1}^{n} (e - x_i)(e - a)(e - y_i) = e + \sum_{i=1}^{n} (e - x_i \circ a \circ y_i) =$$
$$= e + ne - \sum_{i=1}^{n} x_i \circ a \circ y_i \in \mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}.$$

Из равенства (1) сразу получается замечание 1.

Легко видеть, что *всякое топологическое простое кольцо является обобщенным Q-кольцом.*

Действительно, если простое кольцо не содержит единицы, то оно будет присоединенно-простым, т. е. всякий его элемент является обобщенно-радикальным. Если же простое кольцо содержит единицу, то оно будет обобщенным Q-кольцом в силу того, что всякий его элемент, отличный от единицы, является обобщенно-радикальным.

Замечание 2. *Если u, v — произвольные элементы кольца $\mathfrak{A}$, то элемент $a_1 = u \circ a \circ v - u \circ v$ принадлежит двустороннему идеалу, порожденному элементом a, т. е. $a_1 \in (a)$.*

Действительно,

$$a_1 = (u + a - ua) \circ v - (u + v - uv) = u + a - ua + v - uv - av + uav -$$
$$- u - v + uv = a - ua - av + uav \in (a).$$

Замечание 3. *В произвольном кольце $\mathfrak{A}$ имеет место следующее, для дальнейшего основное тождество:*

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ x_i \circ (a + x) \circ y_i \circ t_j] = \sum \mu_j \left\{ z_j \circ \left[a_1 + \sum \lambda_i (x_i \circ x \circ y_i) \right] \circ t_j \right\}, \quad (2)$$

где a, x, x_i, y_i, z_j, t_j — произвольные элементы кольца $\mathfrak{A}$, λ_i и μ_j — целые, удовлетворяющие условиям

$$\sum \lambda_i = 1, \quad \sum \mu_j = 1,$$

а элемент $a_1 = \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i - x_i \circ y_i)$ принадлежит идеалу, порожденному элементом a.

Действительно, учитывая дистрибутивный закон присоединенного умножения [см. ([7])], имеем:

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ x_i \circ (a + x) \circ y_i \circ t_j] = \sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ (x_i \circ a \circ y_i + x_i \circ x \circ y_i -$$
$$- x_i \circ y_i) \circ t_j] = \sum \mu_j \left\{ z_j \left[\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i - x_i \circ y_i) + \sum \lambda_i (x_i \circ x \circ y_i) \right] \circ t_j \right\} =$$
$$= \sum \mu_j \left\{ z_j \circ \left[a_1 + \sum \lambda_i (x_i \circ x \circ y_i \right] \circ t_j \right\},$$

где элемент $a_1 = \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i - x_i \circ y_i)$, в силу замечания 2, принадлежит идеалу (a).

Теперь нетрудно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Если в топологическом кольце $\mathfrak{A}$ существует окрестность нуля, состоящая из обобщенно-радикальных элементов, то $\mathfrak{A}$ есть обобщенное Q-кольцо.*

Доказательство. Пусть x — произвольный обобщенно-радикальный элемент кольца $\mathfrak{A}$, а элементы x_i, y_i и числа λ_i таковы, что

$$\sum \lambda_i (x_i \circ x \circ y_i) = 0, \quad (3)$$

где $\sum \lambda_i = 1$. Обозначим через V окрестность нуля, состоящую из обобщенно-радикальных элементов. В силу непрерывности операций, существует такая окрестность нуля U, что для любого элемента a из U элемент

$$a_1 = \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i - x_i \circ y_i)$$

принадлежит окрестности V. Следовательно, элемент a_1 — обобщенно-радикальный, и существует такое конечное число элементов z_j, t_j и чисел μ_j, что

$$\sum \mu_j (z_j \circ a_1 \circ t_j) = 0, \tag{4}$$

где $\sum \mu_j = 1$. Применяя к тождеству (2) равенства (3) и (4), получаем:

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ x_i \circ (a + x) \circ y_i \circ t_j] = 0,$$

где

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i = \left(\sum \mu_j\right) \cdot \left(\sum \lambda_i\right) = 1,$$

т. е. элемент x обладает окрестностью $x + U$, состоящей из обобщенно-радикальных элементов.

ЛЕММА 1. *Если элемент a принадлежит обобщенно-радикальному идеалу I, а элемент x — обобщенно-радикальный, то элемент $a + x$ будет также обобщенно-радикальным.*

Действительно, так как x — обобщенно-радикальный элемент, то существует такое конечное число элементов x_i, y_i и чисел λ_i, что

$$\sum \lambda_i (x_i \circ x \circ y_i) = 0, \text{ где } \sum \lambda_i = 1.$$

Применяя к тождеству (2) предыдущее равенство, получаем:

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ x_i \circ (a + x) \circ y_i \circ t_j) = \sum \mu_j (z_j \circ a_1 \circ t_j),$$

где $a_1 \in (a) \subseteq J$. Так как a_1 — обобщенно-радикальный элемент, то можно подобрать элементы z_j, t_j и числа μ_j так, что

$$\sum \mu_j (z_j \circ a_1 \circ t_j) = 0, \text{ где } \sum \mu_j = 1.$$

Следовательно,

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i [z_j \circ x_i \circ (a + x) \circ y_i \circ t_j] = 0,$$

где

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i = \left(\sum \mu_j\right) \left(\sum \lambda_i\right) = 1,$$

т. е. элемент $a + x$ — обобщенно-радикальный.

ТЕОРЕМА 2. *В обобщенном Q-кольце радикал N в смысле Брауна-Маккоя есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть y — произвольный элемент из замыкания N, а U — окрестность нуля, состоящая из обобщенно-радикальных элементов. В силу того что $y \in \overline{N}$, найдется такой элемент a в N, что $y - a \in U$, т. е. $y = a + x$, где x — обобщенно-радикальный элемент. Согласно лемме 1, элемент y будет также обобщенно-радикальным. Следовательно, идеал $\overline{N}$ состоит из обобщенно-радикальных элементов, т. е. $\overline{N} \subseteq N$, откуда $\overline{N} = N$.

Как известно [см. (7)], если I есть присоединенный идеал в кольце $\mathfrak{A}$, а e — произвольный элемент из I, то множество $I^* = I - e$ будет двусторонним идеалом, причем e является единицей по модулю I^*, т. е.

$$ex \equiv x \,(\mathrm{mod}\, I^*), \quad xe \equiv x \,(\mathrm{mod}\, I^*)$$

и обратно, если существует единица по модулю I^*, где I^* — идеал, то множество $e + I^* = I$ будет присоединенным идеалом в кольце $\mathfrak{A}$. В дальнейшем, следуя Сегалу [см. (8)], идеал I^* мы будем называть регулярным, если существует единица по модулю I^*.

Замечание 4. *Из соотношения*

$$I = e + I^* \tag{5}$$

следует, что если идеал I^* обладает некоторым топологическим свойством P, то это же свойство присуще и присоединенному идеалу I, и обратно.

Замечание 5. *Так как в топологическом кольце замыкание идеала есть идеал, то из замечания 4 следует, что замыкание присоединенного идеала есть присоединенный идеал.*

Определение 2. Присоединенный идеал I будем называть *собственным*, если он отличен от самого кольца $\mathfrak{A}$ и от единицы кольца, если она существует.

ТЕОРЕМА 3. *Замыкание всякого собственного присоединенного идеала I в обобщенном Q-кольце $\mathfrak{A}$ есть также собственный идеал.*

Доказательство. Пусть I — собственный присоединенный идеал в кольце $\mathfrak{A}$. В силу замечания 5, замыкание $\bar{I}$ есть также присоединенный идеал. Допустим, что $\bar{I} = \mathfrak{A}$. Выберем в кольце $\mathfrak{A}$ такую окрестность нуля U, все элементы которой являются обобщенно-радикальными. В силу нашего предположения, $0 \in \bar{I}$. Следовательно, существует элемент x, принадлежащий одновременно идеалу I и окрестности U, т. е. I содержит обобщенно-радикальный элемент. Таким образом, $I = \mathfrak{A}$, что противоречит предположению теоремы.

Следствие 1. *В обобщенном Q-кольце всякий максимальный присоединенный идеал M замкнут.*

Следствие 2. *В обобщенном Q-кольце максимальные регулярные идеалы замкнуты.*

Это непосредственно вытекает из замечания 4 и следствия 1, если учесть, что максимальным регулярным идеалам соответствуют [см. (9)] максимальные присоединенные идеалы.

Замечание 6. *В обобщенном Q-кольце с единицей все максимальные идеалы замкнуты, так как в таком кольце всякий идеал является регулярным.*

Теперь можно привести еще одно доказательство теоремы 2.

Действительно, радикал N есть пересечение всех максимальных регулярных идеалов [см. (4)], а последние, в силу следствия 2, замкнуты.

ТЕОРЕМА 4. *Обобщенное Q-кольцо, не содержащее собственных замкнутых присоединенных идеалов, является или присоединенно-простым кольцом, или простым кольцом с единицей.*

Доказательство. Допустим что кольцо $\mathfrak{A}$ не присоединенно-простое. Тогда, как известно [см. (4)], $\mathfrak{A}$ содержит максимальный при-

соединенный идеал M. Если предположить, что M — собственный, то, в силу условия теоремы, $\overline{M} = \mathfrak{A}$, а с другой стороны, в силу следствия 1, $\overline{M} = M$. Это противоречие показывает, что идеал M — несобственный, т. е. что кольцо $\mathfrak{A}$ содержит единицу e и $M = e$. Таким образом, в кольце с единицей вовсе не существует собственных присоединенных идеалов и, следовательно, собственные идеалы, т. е. $\mathfrak{A}$ есть простое кольцо с единицей.

ЛЕММА 2. *Центр присоединенно-простого кольца $\mathfrak{A}$ есть радикальное кольцо в смысле Джекобсона.*

Действительно, если $\mathfrak{A}$ — присоединенно-простое кольцо, то всякий элемент центра будет квази-регулярным, так как в коммутативном случае понятие обобщенно-радикального элемента и квази-регулярного совпадают. Кроме того, легко заметить, что если $z \circ z' = 0$ и z принадлежит центру, то и z' принадлежит центру. Действительно, умножая присоединенно равенство $z \circ x = x \circ z$, где x — произвольный элемент кольца, на z' слева и справа, получаем:

$$z' \circ z \circ x \circ z' = z' \circ x \circ z \circ z',$$

т. е. $x \circ z' = z' \circ x$. Следовательно, элемент z' принадлежит центру.

ТЕОРЕМА 5. *Если обобщенное Q-кольцо $\mathfrak{A}$ не содержит собственных замкнутых присоединенных идеалов, то его центр является или радикальным кольцом, или полем.*

Действительно, согласно теореме 4, кольцо $\mathfrak{A}$ будет или присоединенно-простым, или простым кольцом с единицей. Если $\mathfrak{A}$ — присоединенно-простое кольцо, то, в силу леммы 2, его центр будет радикальным кольцом. Если же $\mathfrak{A}$ — простое кольцо с единицей, то его центр, как известно, будет полем.

Замечание 7. *Если в обобщенном Q-кольце $\mathfrak{A}$ присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}$ всюду плотен, то элемент a является обобщенно-радикальным.*

Действительно, пусть $\overline{\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, т. е. пусть $0 \in \overline{\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A}}$. Выберем в кольце $\mathfrak{A}$ окрестность нуля U, состоящую из обобщенно-радикальных элементов. Так как пересечение $U \cap (\mathfrak{A} \circ a \circ \mathfrak{A})$ не пусто, то существует такое конечное число элементов x_i, y_i и чисел λ_i, что

$$\sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) = u,$$

где $u \in U$ и $\sum \lambda_i = 1$. В силу того что элемент u — обобщенно-радикальный, существует такое конечное число элементов z_j, t_j и чисел μ_j, что

$$\sum \mu_j (z_j \circ u \circ t_j) = 0,$$

где $\sum \mu_j = 1$. Следовательно,

$$\sum \mu_j [z_j \circ \sum \lambda_i (x_i \circ a \circ y_i) \circ t_j] = 0$$

или

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i (z_j \circ x_i \circ a \circ y_i \circ t_j) = 0,$$

где

$$\sum \sum \mu_j \lambda_i = \left(\sum \mu_j\right) \left(\sum \lambda_i\right) = 1.$$

Таким образом, элемент a является обобщенно-радикальным элементом.

Замечание 8. *Если в произвольном кольце $\mathfrak{A}$ обобщенно-радикальные элементы образуют замкнутое множество, то радикал N замкнут.*

Действительно, пусть P — замкнутое множество всех обобщенно-радикальных элементов. Так как $N \subseteq P$, то $\overline{N} \subseteq \overline{P} = P$, т. е. идеал $\overline{N}$ состоит из обобщенно-радикальных элементов и, следовательно, $\overline{N} \subseteq N$, т. е. $\overline{N} = N$.

§ 2. Радикал N в ограниченных и компактных (бикомпактных) кольцах

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если A и B — два подмножества кольца $\mathfrak{A}$, то через $A \cdot B$ мы будем обозначать множество всех произведений ab, где $a \in A$, $b \in B$, а через AB, как обычно, будем обозначать множество всевозможных конечных сумм таких произведений ab.

Следуя И. Р. Шафаревичу [см. ([10])], мы будем называть подмножество S топологического кольца $\mathfrak{A}$ *ограниченным справа*, если для всякой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V, что $V \cdot S \subset U$. Аналогично определяется *ограниченность слева*.

Множество называется *ограниченным*, если оно является ограниченным справа и слева.

ТЕОРЕМА 6. *Если обобщенное Q-кольцо $\mathfrak{A}$ ограничено и обладает полной системой окрестностей нуля, являющихся подгруппами аддитивной группы кольца, то его радикал есть открытое множество.*

Доказательство. Так как кольцо $\mathfrak{A}$ ограничено и обладает системой окрестностей, состоящей из групп, то $\mathfrak{A}$ будет обладать и системой окрестностей нуля, состоящих из двусторонних идеалов [см. ([1])]. В силу того что $\mathfrak{A}$ есть обобщенное Q-кольцо, существует двусторонний идеал-окрестность нуля, состоящий из обобщенно-радикальных элементов. Этот идеал содержится в радикале и, следовательно, радикал есть открытое множество.

Следствие 3. *Ограниченное полупростое обобщенное Q-кольцо, обладающее полной системой групповых окрестностей нуля, дискретно.*

Следствие 4. *Компактное нульмерное полупростое обобщенное Q-кольцо конечно.*

Действительно, как известно [см. ([1])], компактное кольцо ограничено и, будучи нульмерным, оно обладает системой групповых окрестностей нуля. В силу предыдущего следствия это кольцо дискретно и, следовательно, конечно.

Как обычно, будем говорить, что элемент x кольца $\mathfrak{A}$ топологически нильпотентен, если для всякой окрестности нуля U существует такое натуральное n_0, что для всех $n > n_0$ $x^n \in U$. Кольцо $\mathfrak{A}$ будет называться топологическим нилькольцом, если всякий его элемент топологически нильпотентен. Наконец, кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть топологически нильпотентным, если для всякой окрестности нуля U существует такое натуральное n_0, что $\mathfrak{A}^n \subset U$ для всех $n > n_0$.

Топологически нильпотентный идеал в топологическом кольце $\mathfrak{A}$ не обязательно содержится в радикале N. Так, например, в кольце целых чисел с p-адической топологией радикал N есть нулевой идеал, а идеал (p) топологически нильпотентен. Однако имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. *В обобщенном Q-кольце $\mathfrak{A}$ всякий топологически нильпотентный элемент x является обобщенно-радикальным.*

Эта теорема вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Если в произвольном кольце $\mathfrak{A}$ степень x^n некоторого элемента x есть обобщенно-радикальный элемент, то и сам элемент x будет обобщенно-радикальным.*

Действительно, в силу того что степень x^n есть обобщенно-радикальный элемент, существует такое конечное число элементов x_i, y_i и чисел λ_i, что

$$\sum \lambda_i (x_i \circ x^n \circ y_i) = 0,$$

где $\sum \lambda_i = 1$. Но легко заметить, что

$$x^n = x \circ z, \quad \text{где} \quad z = -x - x^2 - x^3 - \cdots - x^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\sum \lambda_i (x_i \circ x^n \circ y_i) = \sum \lambda_i (x_i \circ x \circ z \circ y_i) = 0,$$

т. е. элемент x является обобщенно-радикальным.

Докажем теперь теорему 7. Пусть U — окрестность нуля, состоящая из обобщенно-радикальных элементов. В силу того что элемент x топологически нильпотентен, существует такое натуральное n_0, что для всех $n > n_0$ $x^n \in U$, т. е. степень x^n есть обобщенно-радикальный элемент и, следовательно, согласно лемме 3, и сам элемент x будет обобщенно-радикальным.

Замечание 9. Из основной теоремы Капланского о том, что всякое компактное (бикомпактное) полупростое кольцо в смысле Джекобсона есть топологическая прямая сумма (любого числа) конечных простых колец, легко след ет, что в случае компактных колец радикал Брауна-Маккоя N совпадает с радикалом Джекобсона N'. Следовательно, *в компактном кольце радикал N, так же как и N', есть объединение всех топологически нильправых и нильлевых идеалов* [см. ([1])].

Считаю своим долгом выразить благодарность А. Г. Курошу за ряд указаний, которыми я воспользовался при написании настоящей работы.

Поступило
10. II. 1953

ЛИТЕРАТУРА

1 Kaplansky I., Topological rings, Amer. J. Math., 69 (1947), 153—183.

2 Kaplansky I., Locally compact rings, Amer. J. Math., 70 (1948), 447—459.

3 Kaplansky I., Locally compact rings, Amer. J. Math., 73 (1951), 19—24.

4 Андрунакиевич В. А., К определению радикала, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 217—224.

5 Iséki K., Sur le G-radical d'un anneau topologique, Comptes rendus, 234 (1952), 1938—1939.

6 Brown B. and McCoy N., The radical of a ring, Duke Math. J., 15 (1948), 495—499.

7 Андрунакиевич В. А., Полурадикальные кольца, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 129—178.

8 Segal I., The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 69—105.

9 Шульгейфер Е. Г., Мультипликативная теория присоединенных идеалов в коммутативных кольцах, Доклады Ак. наук СССР, 64 (1949), 633—636.

10 Шафаревич И. Р., О нормируемости топологических полей, Доклады Ак. наук СССР, 40 (1943), 149—151.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 427—448

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧАХ (ОБОБЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ)

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В настоящей работе строится естественное обобщение аппарата интеграла Фурье и дается интегральное представление для определенных классов непрерывных функций, заданных на полупрямых в комплексной области. Эти классы функций могут быть представлены как предел целых функций конечного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, тип которых стремится к бесконечности.

Введение

Если функция $\varphi(v)$ задана и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то при сходимости интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi(v)|\,dv \tag{1}$$

функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-vz} \varphi(v)\,dv, \tag{2}$$

голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, непрерывна на ее границе $\operatorname{Re} z = 0$.

Функция $G(w, \sigma)$, определяемая интегралом

$$G(w, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\sigma \Phi(it)\, e^{iwt} dt + \int_0^\sigma \Phi(-it)\, e^{-iwt} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(it)\, e^{iwt} dt \quad (w = u + iv), \tag{3}$$

является целой функцией от w первого порядка и типа σ.

Одним из основных предложений теории интегралов Фурье является следующее:

Если функция $\varphi(v)$ непрерывна и, кроме условия (1), удовлетворяет условиям Дирихле на любом отрезке $[0, R]$, $0 < R < \infty$, то существует предел

$$\lim_{\sigma \to +\infty} G(u, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(it)\, e^{iut} dt = \begin{cases} \varphi(u) & \text{при} \quad u > 0, \\ \frac{1}{2}\varphi(0) & \text{при} \quad u = 0, \\ 0 & \text{при} \quad u < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, формула (4) означает, что при $u > 0$ функция $\varphi(u)$ может быть представлена как предел целых функций первого порядка, тип которых стремится к бесконечности.

Если функция $\varphi(u)$ задана и удовлетворяет всем поставленным выше условиям на всей оси $(-\infty, +\infty)$, то для ее представления рассматривают функции

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-vz}\varphi(v)\,dv, \quad \Phi_2(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-vz}\varphi(-v)\,dv, \tag{5}$$

непрерывные на прямой $\operatorname{Re} z=0$, и составляют целые функции

$$G_1(w, \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi_1(it)\,e^{iwt}dt, \quad G_2(w, \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi_2(it)\,e^{iwt}dt. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$\Phi(it)=\Phi_1(it)+\Phi_2(-it)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ivt}\varphi(v)\,dv \tag{7}$$

и

$$G(w, \sigma)=G_1(w, \sigma)+G_2(-w, \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(it)\,e^{iwt}dt. \tag{8}$$

Из (4) легко следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty}G(u, \sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(it)\,e^{iut}dt=\varphi(u) \quad (-\infty<u<\infty). \tag{9}$$

Заметим, что если отказаться от аппарата интеграла Фурье, то имеет место более сильное предложение, доказанное H. Kober'ом [см. ([1])]: любая *равномерно непрерывная* на всей оси $(-\infty, +\infty)$ функция может быть *равномерно* аппроксимирована на всей оси $(-\infty, +\infty)$ целыми функциями первого порядка, тип которых стремится к бесконечности.

В настоящей работе вышеприведенное построение интеграла Фурье для функции, заданной на полуоси $(0, +\infty)$, обобщается так, чтобы приближающие целые функции имели наперед заданный порядок $\rho\geqslant\frac{1}{2}$. Заметим, что порядок таких целых функций не может быть меньше половины, так как целая функция порядка $\rho<\frac{1}{2}$, отличная от постоянной, не может быть ограниченной вдоль луча $(0, +\infty)$ [см. ([2])].

Устанавливается, что при $\rho\geqslant 1$ целые функции порядка ρ, аппроксимирующие заданную функцию на полуоси $(0, +\infty)$, стремятся к нулю в области $|\arg w|\geqslant\frac{\pi}{\rho}$. Это обстоятельство дает возможность построить аппарат для интегрального представления непрерывных функций, заданных на двух или нескольких лучах, исходящих из одной точки в комплексной области.

В § 1 настоящей работы изучаются асимптотические свойства целой функции типа Миттаг-Лефлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})} \quad (p>0,\ -\infty<\mu<+\infty)$$

в различных частях плоскости z.

В § 2 строится обобщенный интеграл Фурье и доказываются его основные свойства.

В § 3 конструируется аппарат интеграла Фурье для функций, заданных на двух или нескольких лучах, исходящих из начала координат.

§ 1. Асимптотические свойства функции типа Миттаг-Лефлера

Настоящий параграф имеет предварительный характер. Здесь будут приведены некоторые асимптотические свойства целой функции, определяемой рядом Тейлора вида

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}, \tag{1.1}$$

где $\rho>0$ и $-\infty<\mu<+\infty$ — произвольные параметры. Легко видеть, что при всяком фиксированном значении μ функция $E_\rho(z;\mu)$ есть целая функция порядка ρ и типа 1.

Функция $E_\rho(z;1)$ известна под названием функции Миттаг-Лефлера и в литературе обозначается несколько иначе:

$$E_{\frac{1}{\rho}}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho^{-1})}. \tag{1.2}$$

Асимптотические свойства функций вида (1.1) в различных частях плоскости z при $|z|\to\infty$ были изучены в работе ([3]).

Здесь будут приведены некоторые результаты из этой работы, но в более уточненной форме, необходимой нам в дальнейшем.

1. Интегральное представление для $E_\rho(z;\mu)$. Известно следующее интегральное представление для гамма-функции Эйлера:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\alpha)}e^u u^{-s}\,du, \tag{1.3}$$

где при произвольном $\varepsilon>0$ контур $\gamma(\varepsilon,\alpha)$ $\left(\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ состоит из прямолинейного луча $\arg u=-\alpha$, $|u|\geqslant\varepsilon$, дуги окружности $|u|=\varepsilon$, определяемой условием $|\arg u|\leqslant\alpha$, и из симметричного с первым относительно действительной оси прямолинейного луча $\arg u=+\alpha$, $|u|\geqslant\varepsilon$ [см., например, ([4])]. При этом представление (1.3) справедливо во всей плоскости комплексного переменного s.

Заметим, что если $\frac{1}{2}<\rho\leqslant1$, то при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\rho\leqslant\pi$ имеем

$$\frac{\pi}{2\rho}<\frac{\alpha}{\rho}<\pi;$$

если же $\rho>1$, то вообще при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

$$\frac{\pi}{2\rho}<\frac{\alpha}{\rho}<\frac{\pi}{\rho}<\pi.$$

Поэтому после замены переменной $u=t^\rho$ $\left(\rho>\frac{1}{2}\right)$ в интеграле (1.3), переводящей полуплоскость $\operatorname{Re}u\geqslant0$ в угол $|\arg t|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}$ плоскости t, представление (1.3) примет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)}e^{t^\rho}t^{-\rho s+\rho-1}\,dt; \tag{1.4}$$

при этом $\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\pi$ при $\frac{1}{2}<\rho\leqslant 1$ и $\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\frac{\pi}{\rho}$ при $\rho>1$, а $\varepsilon>0$ произвольно.

Если z лежит в достаточно малой окрестности начала координат, а именно, если

$$\max_{t\subset\gamma(\varepsilon,\beta)}\left|\frac{z}{t}\right|<1, \tag{1.5}$$

то из (1.1) и (1.4) будем иметь:

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}e^{t^\rho}t^{-n-\mu\rho+\rho-1}\,dt\Big)z^n=$$

$$=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}e^{t^\rho}t^{-\mu\rho+\rho-1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{t}\Big)^n\Big)dt=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{t^\rho}\,t^{\rho(1-\mu)}}{t-z}\,dt. \tag{1.6}$$

Представление (1.6) получено при условии (1.5), т. е. в достаточно малой окрестности точки $z=0$. Но интеграл (1.6) сходится и представляет аналитическую функцию по ту сторону от пути $\gamma(\varepsilon,\beta)$, где $z=0$.

Так как $\varepsilon>0$ было у нас произвольным, то представление (1.6) применимо для любых точек плоскости z, если только радиус ε дуги окружности, входящей в контур $\gamma(\varepsilon,\beta)$, выбран достаточно большим так, чтобы точка z лежала слева от пути $\gamma(\varepsilon,\beta)$.

Таким образом, при произвольном $\varepsilon>0$ слева от пути $\gamma(\varepsilon,\beta)$ имеет место интегральное представление

$$E_\rho(z;\mu)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{t^\rho}\,t^{\rho(1-\mu)}}{t-z}\,dt,$$

где β определяется из условий:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\pi \quad \text{при}\ \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1,\\ &\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\frac{\pi}{\rho} \quad \text{при}\ \rho>1.\end{aligned} \tag{1.7}$$

2. Асимптотическое поведение $E_\rho(z;\mu)$ при $\rho>\frac{1}{2}$. Приведем некоторые асимптотические свойства функции $E_\rho(z;\mu)$ в различных частях плоскости z, когда $|z|\to\infty$.

ЛЕММА 1. *Если число* β *определяется из условий* (1.7), *то при* $|\arg z|\leqslant\beta$ *и* $|z|\to\infty$ *имеют место асимптотические формулы:*

а) *если* $\rho>\frac{1}{2}$, $\mu\neq-k+\rho^{-1}$ $(k=0,1,\ldots)$, *то*

$$E_\rho(z;\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}+O\Big(\frac{1}{|z|}\Big); \tag{1.8}$$

б) *если* $\rho>\frac{1}{2}$, $\mu=-k+\rho^{-1}$ $(k=0,1,\ldots)$, *то*

$$E_\rho(z;\mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}+O\Big(\frac{1}{|z|^2}\Big). \tag{1.8'}$$

Доказательство. Определим число β' из условий

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\beta'<\pi \quad \text{при}\ \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1,\\ &\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\beta'<\frac{\pi}{\rho} \quad \text{при}\ \rho>1.\end{aligned} \tag{1.7'}$$

Пусть $|\arg z| \leqslant \beta$ и $|z| > 1$; тогда нетрудно видеть, что при $\varepsilon > |z|$

$$\frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta') - \gamma(\varepsilon, \beta')} \frac{e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)}}{t - z}\, dt = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho}. \tag{1.9}$$

Поэтому из (1.6), заменив β на β', при $|z| > 1$ и $|\arg z| \leqslant \beta$ получим представление:

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} + \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta')} \frac{e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)}}{t - z}\, dt. \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.10) вместо ядра $\frac{1}{t-z}$ его значение

$$-\frac{1}{z} + \frac{t}{z(t-z)}$$

и замечая, что, в силу (1.4),

$$\frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta')} e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)}\, dt = \frac{1}{\Gamma(\mu - \rho^{-1})}, \tag{1.4}$$

получим формулу:

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \frac{1}{z\Gamma(\mu - \rho^{-1})} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta')} \frac{e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)+1}}{t - z}\, dt. \tag{1.11}$$

Оценим последнее слагаемое в (1.11), которое обозначим через $I(z)$. С этой целью заметим, что при достаточно большом $|z|$, если $|\arg z| \leqslant \beta$, в силу (1.7′),

$$\min_{t \subset \gamma(1, \beta')} |z - t| = |z| \sin(\beta' - \beta).$$

Поэтому при $|\arg z| \leqslant \beta$ и $|z| \to \infty$ имеем:

$$|I(z)| \leqslant \frac{\rho}{2\pi |z|^2 \sin(\beta' - \beta)} \int\limits_{\gamma(1, \beta')} |e^{t^\rho}|\, |t|^{\rho(1-\mu)+1} |dt|. \tag{1.12}$$

Но на прямолинейных лучах $\arg t = \pm\beta'$ пути интегрирования

$$|e^{t^\rho}| = e^{|t|^\rho \cos \beta' \rho};$$

следовательно, по (1.7′), $\cos \beta' \rho < 0$. Это значит, что интеграл в правой части (1.12) сходится и, следовательно, при $|\arg z| \leqslant \beta$, когда $|z| \to \infty$,

$$I(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{1.12′}$$

Из (1.11) и (1.12′) следует, что при $|z| \to \infty$

$$E_\rho(z; \mu) = \rho z^{\rho(1-\mu)} e^{z^\rho} - \frac{1}{z\Gamma(\mu - \rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{1.11′}$$

Асимптотические формулы (1.8) и (1.8′) следуют из (1.11′), если заметить, что целая функция $\frac{1}{\Gamma(s)}$ имеет нули в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$.

Нам остается выяснить асимптотическое поведение функции $E_\rho(z; \mu)$ в области $|\arg z| \geqslant \beta$, где число β определяется из того же условия (1.7).

ЛЕММА 2. *Если число β определяется условиями* (1.7), *то при* $|\arg z| \geqslant \beta$ *и* $|z| \to \infty$ *имеют место асимптотические формулы:*

а) *если* $\rho > \frac{1}{2}$, $\mu \neq -k + \rho^{-1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *то*

$$E_\rho(z; \mu) = O\left(\frac{1}{|z|}\right); \tag{1.13}$$

б) *если* $\rho > \frac{1}{2}$, $\mu = -k + \rho^{-1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, *то*

$$E_\rho(z; \mu) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{1.13'}$$

Доказательство. Определим число β'' из условий:

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2\rho} < \beta'' < \beta < \pi \quad \text{при } \frac{1}{2} < \rho \leqslant 1, \\ &\frac{\pi}{2\rho} < \beta'' < \beta < \frac{\pi}{\rho} \quad \text{при } \rho > 1. \end{aligned} \tag{1.7''}$$

Если z лежит слева от контура $\gamma(1, \beta'')$, то, по (1.6), имеем представление:

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta'')} \frac{e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)}}{t - z} dt. \tag{1.14}$$

Из (1.7''), в частности, следует, что представление (1.14) справедливо при $|\arg z| \geqslant \beta$.

Как при доказательстве леммы 1, заменяя ядро $\frac{1}{t-z}$ его значением

$$-\frac{1}{z} + \frac{1}{z(t-z)}$$

и имея в виду формулы (1.4') и (1.14), получим:

$$E_\rho(z; \mu) = -\frac{1}{z\Gamma(\mu - \rho^{-1})} + \frac{1}{z} \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(1, \beta'')} \frac{e^{t^\rho} t^{\rho(1-\mu)+1}}{t - z} dt.$$

Но при достаточно большом $|z|$, если $|\arg z| \geqslant \beta$, в силу (1.7''), находим:

$$\min_{t \subset \gamma(1, \beta)} |z - t| = |z| \sin(\beta - \beta'').$$

Поэтому при $|\arg z| \geqslant \beta$, если $|z| \to \infty$, имеем:

$$E_\rho(z; \mu) = -\frac{1}{z\Gamma(\mu - \rho^{-1})} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right). \tag{1.15}$$

Асимптотические формулы (1.13) и (1.13') следуют из (1.15), если заметить, что целая функция $\frac{1}{\Gamma(s)}$ имеет нули в точках $s = 0, -1, -2, \ldots$.

3. Асимптотическое поведение $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho \leqslant \frac{1}{2}$. В леммах 1 и 2 было выяснено асимптотическое поведение функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho > \frac{1}{2}$ и $-\infty < \mu < \infty$ вдоль любого луча, исходящего из начала координат.

Что касается асимптотического поведения функции $E_\rho(z; \mu)$ при $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ и $-\infty < \mu < \infty$, то существующий здесь результат [см. ([2])] нам пока не удалось уточнить так, чтобы он мог быть использован для наших целей. Поэтому приводим его без доказательства.

ЛЕММА 3. *Если* $\rho \leqslant \frac{1}{2}$, *то при* $|\arg z| < \pi$ *и* $|z| \to \infty$

$$E_\rho(z;\ \mu) \sim \rho \sum_k Z_k^{1-\mu} e^{Z_k}, \tag{1.16}$$

где $Z_k = z^\rho e^{2\pi k\rho i}$, *а сумма распространяется на те целые значения* k, *для которых*

$$|\arg z + 2\pi k| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.17}$$

Таким образом, при $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ и произвольном $-\infty < \mu < \infty$ поведение функции $E_\rho(z;\ \mu)$ на отрицательной полуоси нам неизвестно.

Из леммы 3, в частности, следует, что при $|\arg z| < \pi$ и $|z| \to \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z, \mu) \sim \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} e^{z^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.18}$$

Но отметим, что при частном значении параметра μ, именно, когда $\mu = 1$, поведение функции $E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)$ известно во всей плоскости z.

Действительно, как следует из (1.1),

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ 1) = \operatorname{ch} \sqrt{z}. \tag{1.19}$$

Это значит, что при $|\arg z| < \pi$ и $|z| \to \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z; 1) \sim \frac{1}{2} e^{z^{\frac{1}{2}}}, \tag{1.18'}$$

что следовало и из (1.18), но, кроме того, при $|\arg z| = \pi$ имеем:

$$E_{\frac{1}{2}}(z; 1) = \cos \sqrt{|z|}. \tag{1.18''}$$

Таким образом, функция $E_{\frac{1}{2}}(z; 1)$ остается ограниченной и колеблется на отрицательной вещественной полуоси.

§ 2. Обобщенный интеграл Фурье

На основании асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$, указанных выше, в этом параграфе приводится построение и основные свойства обобщенного интеграла Фурье.

Пусть функция $\varphi(v)$ задана и измерима на полуоси $(0, +\infty)$. При сходимости интеграла

$$\int_0^\infty |\varphi(v)|\, v^{\mu\rho-1} dv,$$

где $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ и $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$, функция

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int_0^\infty e^{-v^\rho z^\rho} \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv \tag{2.1}$$

голоморфна в угле $|\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}$ и непрерывна на его границе $|\arg z| = \frac{\pi}{2\rho}$.

Определим целую функцию $G(w, \sigma, \rho, \mu)$ порядка ρ и типа σ следующим образом:

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \Phi\left(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right) t^{\mu\rho-1}dt + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \Phi\left(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right) t^{\mu\rho-1}dt\right\}, \qquad (2.2)$$

где $E_\rho(z; \mu)$ — целая функция порядка ρ и типа 1 определена рядом (1.1).

Отметим, что при $\rho = \mu = 1$ функция $G(w, \sigma, \rho, \mu)$ совпадает с функцией $G(w, \sigma)$, определенной по формуле (3) введения.

Имеет место следующий основной результат.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция $\varphi(v)$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$, имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[0, R]$, $0 < R < \infty$, и удовлетворяет условию*

$$\int_0^\infty |\varphi(v)| v^{\mu\rho-1} dv < +\infty, \qquad \rho \geqslant \frac{1}{2}, \qquad 0 < \mu \leqslant \rho^{-1}; \qquad (2.3)$$

тогда справедливы следующие утверждения:

а) *если $u > 0$ и при $\rho = \frac{1}{2}$ $\mu = 1$, а при $\rho > \frac{1}{2}$ $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$, то имеет место представление:*

$$\varphi(u) = \lim_{\sigma\to+\infty} G(u, \sigma, \rho, \mu) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty \Phi\left(te^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(ute^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right) t^{\mu\rho-1}\, dt + \right.$$

$$\left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^\infty \Phi\left(te^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) E_\rho\left(ute^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right) t^{\mu\rho-1}\, dt\right\}; \qquad (2.4)$$

б) *если при $\rho = \frac{1}{2}$ $\mu = 1$ или при $\rho > \frac{1}{2}$ $0 < \mu \leqslant 1$, то*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(0, \sigma, \rho, \mu) = \frac{1}{2\rho}\varphi(0); \qquad (2.5)$$

в) *если при $\rho \geqslant 1$ $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$, то для любого $w \neq 0$ при $|\arg w| \geqslant \frac{\pi}{\rho}$*

$$\lim_{\sigma\to\infty} G(w, \sigma, \rho, \mu) = 0. \qquad (2.6)$$

Доказательство. Предварительно преобразуем выражение (2.2) для целой функции $G(w, \sigma, \rho, \mu)$.

Из (2.1) и (2.2) имеем:

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) =$$

$$= \frac{\rho}{2\pi}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left(\int_0^\infty e^{-iv^\rho t^\rho}\varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}dv\right) E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu\right) t^{\mu\rho-1}dt + \right.$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left(\int\limits_0^{\infty}e^{iv^\rho t^\rho}\varphi(v)\,v^{\mu\rho-1}dv\right)E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}\,dt\Big\}=$$

$$=\frac{\rho}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\varphi(v)\,v^{\mu\rho-1}\left\{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{-iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}\,dt\right\}; \qquad (2.2')$$

при этом перестановка порядка интегрирования по v и по t допустима в силу условия (2.1).

Обозначим отрезки лучей $\arg z=-\frac{\pi}{2\rho}$ и $\arg z=\frac{\pi}{2\rho}$, лежащие в круге $|z|<\sigma^{\frac{1}{\rho}}$, через $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ соответственно. Концы отрезков $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ соединим дугой $L_3(\sigma)$ окружности $|z|=\sigma^{\frac{1}{\rho}}$, проходящей через точку $z=\sigma^{\frac{1}{\rho}}$. Наконец, обозначим через $L(\sigma)$ замкнутый контур $L_1(\sigma)+L_3(\sigma)+$ $+L_2(\sigma)$, проходящий в положительном направлении. Заметим, что при $\rho=\frac{1}{2}$ $L(\sigma)$ представляет собой границу области, получающейся из круга $|z|<\sigma^{\frac{1}{\rho}}$ при выкидывании из него радиуса $-\sigma^{\frac{1}{\rho}}\leqslant z\leqslant 0$.

Как нетрудно видеть,

$$\int\limits_{L_1(\sigma)}e^{-v^\rho z^\rho}E_\rho(wz;\ \mu)\,z^{\mu\rho-1}\,dz=e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}dt, \qquad (2.7)$$

$$\int\limits_{L_2(\sigma)}e^{-v^\rho z^\rho}E_\rho(wz;\ \mu)\,z^{\mu\rho-1}dz=e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{-iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}dt; \qquad (2.7')$$

при этом в интегралах слева интегрирование совершается в направлении, идущем от начала координат.

Если заметить, что при любых v и w

$$\int\limits_{L(\sigma)}e^{-v^\rho z^\rho}E_\rho(wz;\ \mu)\,z^{\mu\rho-1}dz=0, \qquad (2.7'')$$

то из (2.7) и (2.7′) будем иметь:

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{-iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}\,dt+$$

$$+e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\int\limits_0^{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}e^{iv^\rho t^\rho}E_\rho\left(wte^{-i\frac{\pi}{2\rho}};\ \mu\right)t^{\mu\rho-1}dt=$$

$$=-i\int\limits_{L_3(\sigma)}e^{-v^\rho z^\rho}E_\rho(wz;\ \mu)\,z^{\mu\rho-1}dz; \qquad (2.8)$$

при этом интегрирование по $L_3(\sigma)$ совершается в направлении возрастания $\arg z$.

Из (2.2′) и (2.8) получим:

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) =$$
$$= -i\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}\left\{\int_{L_3(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} E_\rho(wz;\, \mu)\, z^{\mu\rho-1}\, dz\right\} dv. \qquad (2.9)$$

Переходим теперь к доказательству отдельных утверждений теоремы. а) Пусть $\rho = \frac{1}{2}$ и $\mu = 1$; тогда при $u > 0$, в силу (1.19), имеем:

$$\int_{L_3(\sigma)} e^{-\sqrt{vz}} E_{\frac{1}{2}}(uz;\, 1)\, z^{-\frac{1}{2}}\, dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{L_3(\sigma)} e^{-(\sqrt{v}-\sqrt{u})\sqrt{z}} z^{-\frac{1}{2}}\, dz + \frac{1}{2}\int_{L_3(\sigma)} e^{-(\sqrt{v}+\sqrt{u})\sqrt{z}} z^{-\frac{1}{2}}\, dz =$$
$$= 2i\,\frac{\sin(\sqrt{v}-\sqrt{u})\sigma}{\sqrt{v}-\sqrt{u}} + 2i\,\frac{\sin(\sqrt{v}+\sqrt{u})\sigma}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}. \qquad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10) получим:

$$G\left(u, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\, v^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sin(\sqrt{v}-\sqrt{u})\sigma}{\sqrt{v}-\sqrt{u}} + \frac{\sin(\sqrt{v}+\sqrt{u})\sigma}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\right\} dv,$$

откуда после замены переменной $\sqrt{v} = t$ следует представление:

$$G\left(u, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t^2)\,\frac{\sin\sigma(t-\sqrt{u})}{t-\sqrt{u}}\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t^2)\,\frac{\sin\sigma(t+\sqrt{u})}{t+\sqrt{u}}\, dt. \qquad (2.11)$$

Из (2.11), по известной лемме Дирихле [см. ([5])], следует, что при $u > 0$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G\left(u, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) = [\varphi(t^2)]_{t=\sqrt{u}} + 0 = \varphi(u). \qquad (2.4')$$

Отметим, что из (2.11) следует также, что

$$G\left(0, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t^2)\,\frac{\sin\sigma t}{t}\, dt,$$

и по той же лемме Дирихле

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G\left(0, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) = \varphi(0). \qquad (2.5')$$

Таким образом, из (2.4′) и (2.5′) следует, что при $u \geqslant 0$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G\left(u, \sigma, \frac{1}{2}, 1\right) = \varphi(u). \qquad (2.12)$$

б) В случае, когда $\rho > \frac{1}{2}$ и $u > 0$, имеем:

$$\int\limits_{L_s(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} E_\rho(uz;\mu) z^{\mu\rho-1} dz =$$

$$= \int\limits_{L_s(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} \{E_\rho(uz;\mu) - \rho(uz)^{\rho(1-\mu)} e^{u^\rho z^\rho}\} z^{\mu\rho-1} dz +$$

$$+ \rho u^{\rho(1-\mu)} \int\limits_{L_s(\sigma)} e^{z^\rho(u^\rho - v^\rho)} z^{\rho-1} dz =$$

$$= I(u, v) + 2iu^{\rho(1-\mu)} \frac{\sin\sigma(u^\rho - v^\rho)}{u^\rho - v^\rho}. \tag{2.13}$$

Оценим выражение

$$I(u, v) = \int\limits_{L_s(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} \{E_\rho(uz;\mu) - \rho(uz)^{\rho(1-\mu)} e^{u^\rho z^\rho}\} z^{\mu\rho-1} dz$$

при $u > 0$, $v \geqslant 0$ и $\sigma \to +\infty$. По лемме 1, если $0 < \mu < \rho^{-1}$, то при $\sigma \to +\infty$

$$|I(u, v)| \leqslant \frac{M\sigma^\mu}{u\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^\rho \cos\rho\varphi} d\varphi \leqslant \frac{\pi M}{\rho u} \sigma^{\mu-\rho^{-1}}; \tag{2.14}$$

если же $\mu = \rho^{-1}$, то

$$|I(u, v)| \leqslant \frac{M_1 \sigma^{\frac{1}{\rho}}}{u^2 \sigma^{\frac{2}{\rho}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^\rho \cos\rho\varphi} d\varphi \leqslant \frac{\pi M_1}{\rho u^2} \sigma^{-\frac{1}{\rho}}; \tag{2.14'}$$

при этом выведенные оценки справедливы для всех значений $v \geqslant 0$, и постоянные M и M_1 не зависят от v и σ.

Из (2.9), (2.13) и из оценок (2.14), (2.14′) следует, что при $u > 0$, когда $\sigma \to +\infty$,

$$G(u, \sigma, \rho, \mu) =$$

$$= u^{\rho(1-\mu)} \frac{\rho}{\pi} \int\limits_0^\infty \varphi(v) \frac{\sin\sigma(v^\rho - u^\rho)}{v^\rho - u^\rho} v^{\mu\rho-1} dv + o(1), \tag{2.15}$$

где $o(1) \to 0$.

Но после замены переменной $v^\rho = t$ формула (2.15) примет вид:

$$G(u, \sigma, \rho, \mu) = u^{\rho(1-\mu)} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \varphi\left(t^{\frac{1}{\rho}}\right) t^{\mu-1} \frac{\sin\sigma(t - u^\rho)}{t - u^\rho} dt + o(1) \tag{2.15'}$$

при $\sigma \to +\infty$.

Из условия (2.1) после замены переменной $v^\rho = t$ следует, что

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(t)^{\frac{1}{\rho}}| t^{\mu-1} dt < +\infty. \tag{2.1'}$$

С другой стороны, очевидно, что, в силу условия теоремы, функция $\varphi(t^{\frac{1}{\rho}}) t^{\mu-1}$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию в любом отрезке

$[\delta, R]$, $0<\delta<R<+\infty$. Поэтому из (2.15′) по лемме Дирихле следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(u, \sigma, \rho, \mu) = u^{\rho(1-\mu)}\,[\varphi(t^{\frac{1}{\rho}})t^{\mu-1}]_{t=u^\rho} = \varphi(u).$$

Таким образом, утверждения а) и б) при $\rho=\frac{1}{2}$ доказаны.

б) При $u=0$ из (2.9) имеем:

$$G(0, \sigma, \rho, \mu) = -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}\left\{\int_{L_s(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} z^{\mu\rho-1}\,dz\right\}. \tag{2.16}$$

Замечая, что при $v\geqslant 0$ и $\rho\geqslant\frac{1}{2}$

$$\int_{L_s(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho} z^{\rho-1}\,dz = 2i\,\frac{\sin\sigma v^\rho}{\rho v^\rho},$$

из (2.16) получим, что

$$G(0, \sigma, \rho, 1) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\,\frac{\sin\sigma v^\rho}{v^\rho}\, v^{\rho-1}dv = \frac{1}{\pi\rho}\int_0^\infty \varphi(t^{\frac{1}{\rho}})\,\frac{\sin\sigma t}{t}\,dt. \tag{2.16′}$$

Отсюда, по лемме Дирихле, следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(0, \sigma, \rho, 1) = \frac{1}{2\rho}\varphi(0) \text{ при } \rho\geqslant\frac{1}{2}. \tag{2.5″}$$

Таким образом, нам остается доказать справедливость равенства (2.5) при $\rho>\frac{1}{2}$ и $0<\mu<1$.

Так как, по условию, функцию $\varphi(v)$ можно представить в виде разности двух монотонно возрастающих функций, то достаточно положить, что в достаточно малой окрестности точки $v=0$ $\varphi(v)$ монотонна (скажем, монотонно возрастает). Тогда для любого $\varepsilon>0$ число $\delta=\delta(\varepsilon)$ возможно выбрать так, чтобы иметь

$$0\leqslant\varphi(v)-\varphi(0)<\varepsilon \text{ при } 0\leqslant v\leqslant\delta. \tag{2.17}$$

Представим формулу (2.16) в виде

$$G(0, \sigma, \rho, \mu) = -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\int_{L_s(\sigma)} z^{\mu\rho-1}\left\{\int_0^\delta \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}e^{-v^\rho z^\rho}dv\right\}dz -$$

$$-i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\int_{L_s(\sigma)} z^{\mu\rho-1}\left\{\int_\delta^\infty e^{-v^\rho z^\rho}\varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}dv\right\}dz = R_1(\sigma)+R_2(\sigma). \tag{2.18}$$

Но

$$|R_2(\sigma)|\leqslant\frac{\rho\sigma^\mu}{2\pi\Gamma(\mu)}\int_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}}\left\{\int_\delta^\infty e^{-\sigma v^\rho\cos\rho\varphi}\,|\varphi(v)|\,v^{\mu\rho-1}dv\right\}d\varphi, \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^\rho \cos\rho\varphi} d\varphi = 2\rho^{-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma v^\rho \sin\varphi} d\varphi <$$

$$< \frac{2}{\rho}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma v^\rho \frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi < \frac{2}{\rho}\int\limits_0^{\infty} e^{-\sigma \frac{2v^\rho}{\pi}\varphi} d\varphi = \frac{\pi}{\rho v^\rho \sigma}. \tag{2.20}$$

Поэтому из (2.19) и (2.20) следует, что

$$|R_2(\sigma)| \leqslant \frac{\sigma^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)}\int\limits_\delta^\infty |\varphi(v)|\, v^{\mu\rho-1}\frac{dv}{v^\rho},$$

откуда, в силу $0<\mu<1$, заключаем:

$$\lim_{\sigma\to+\infty} R_2(\sigma) = 0. \tag{2.21}$$

Далее, представим $R_1(\sigma)$ в виде:

$$R_1(\sigma) = -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\varphi(0)\int\limits_{L_3(\sigma)} z^{\mu\rho-1}\left\{\int\limits_0^\delta e^{-v^\rho z^\rho} v^{\mu\rho-1}dv\right\}dz -$$

$$-i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\int\limits_{L_3(\sigma)} z^{\mu\rho-1}\left\{\int\limits_0^\delta [\varphi(v)-\varphi(0)]\, e^{-v^\rho z^\rho} v^{\mu\rho-1}dv\right\}dz =$$

$$= R_3(\sigma) + R_4(\sigma). \tag{2.22}$$

После замены переменного $z = \sigma^{\frac{1}{\rho}} w$, $v = \sigma^{-\frac{1}{\rho}} x$ в выражении $R_4(\sigma)$ получим:

$$R_4(\sigma) = -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\int\limits_{L_3(1)} w^{\mu\rho-1}\left\{\int\limits_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)\right]e^{-x^\rho w^\rho}x^{\mu\rho-1}dx\right\}dw,$$

откуда следует оценка:

$$|R_4(\sigma)| \leqslant \frac{1}{2\Gamma(\mu)}\max_{\substack{|\arg w|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}\\ |w|=1}}\left|\int\limits_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)\right]e^{-x^\rho w^\rho}x^{\mu\rho-1}dx\right|. \tag{2.23}$$

Далее, имеем:

$$R_5(\sigma) = \int\limits_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)\right]e^{-x^\rho w^\rho}x^{\mu\rho-1}dx =$$

$$= \int\limits_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)\right]x^{\mu\rho-1}\operatorname{Re}\left[e^{-x^\rho w^\rho}\right]dx +$$

$$+ i\int\limits_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\left[\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)\right]x^{\mu\rho-1}\operatorname{Im}\left[e^{-x^\rho w^\rho}\right]dx. \tag{2.24}$$

Но функция $\varphi\left(\frac{x}{\sigma^{\frac{1}{\rho}}}\right)-\varphi(0)$ на интервале $0\leqslant x\leqslant\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}$ положительна и не убывает, поэтому по второй теореме о среднем из (2.24) получим:

$$R_5(\sigma)=[\varphi(\delta)-\varphi(0)]\left\{\operatorname{Re}\int_{\xi_1}^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}} x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx+\right.$$

$$\left.+\,i\operatorname{Im}\int_{\xi_2}^{\delta\rho^{\frac{1}{\rho}}} x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx\right\}, \qquad (2.24')$$

где ξ_1 и ξ_2 — некоторые числа из интервала $(0, \delta\sigma^{\frac{1}{\rho}})$.

Заметим, что если $w\neq 0$ и $\operatorname{Re} w^\rho\geqslant 0$, то при $0<\mu<1$

$$\int_0^\infty x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx=\rho^{-1}\int_0^\infty v^{\mu-1}e^{-vw^\rho}dv=\frac{\Gamma(\mu)}{\rho w^{\mu\rho}}. \qquad (2.25)$$

Легко видеть, что при $|w|=1$ и $|\arg w|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}$ интеграл (2.25) равномерно сходится.

Действительно, при любом $A>0$ интегралы

$$\int_0^A e^{-vw^\rho}dv=\frac{1-e^{-Aw^\rho}}{w^\rho}$$

по абсолютному значению равномерно ограничены числом 2, а функция $x^{\mu-1}$ $(0<\mu<1)$ при $x\to+\infty$ монотонно стремится к нулю. Поэтому применим известный признак равномерной сходимости несобственных интегралов [см. ([6])], и при $|w|=1$ и $|\arg w|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}$ для любых a и b, $0\leqslant a<$ $<b<+\infty$,

$$\left|\int_a^b x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx\right|\leqslant M, \qquad (2.26)$$

где M — константа, не зависящая от $\arg w$, a и b.

Из (2.17), (2.24) и (2.26) следует оценка:

$$|R_5(\sigma)|\leqslant 2M\varepsilon \qquad (2.27)$$

при любом $\sigma>0$; поэтому, в силу (2.23),

$$|R_4(\sigma)|\leqslant\frac{M}{\Gamma(\mu)}\varepsilon,\quad \sigma>0.$$

Наконец, исследуем поведение $R_3(\sigma)$ при $\sigma\to+\infty$. Из (2.22) после замены $z=\sigma^{\frac{1}{\rho}}w$, $v=\sigma^{-\frac{1}{\rho}}x$, в силу (2.25), получим:

$$R_3(\sigma)=-i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\varphi(0)\int_{L_2(1)} w^{\mu\rho-1}\left\{\int_0^{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}} x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx\right\}dw=$$

$$= -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\varphi(0)\int\limits_{L_2(1)} w^{\mu\rho-1}\left\{\int\limits_0^\infty x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx\right\}dw +$$

$$+ i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\varphi(0)\int\limits_{L_2(1)} w^{\mu\rho-1}\left\{\int\limits_{\delta\sigma^{\frac{1}{\rho}}}^\infty x^{\mu\rho-1}e^{-x^\rho w^\rho}dx\right\}dw =$$

$$= -i\frac{\rho}{2\pi\Gamma(\mu)}\varphi(0)\int\limits_{L_2(1)} w^{\mu\rho-1}\frac{\Gamma(\mu)}{\rho w^{\mu\rho}}dw + R_6(\sigma) = \frac{1}{2\rho}\varphi(0) + R_6(\sigma). \quad (2.28)$$

Так как при $|w| = 1$, $|\arg w| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$, интеграл (2.25) сходится равномерно, то из (2.28) следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty} R_6(\sigma) = 0. \quad (2.29)$$

Из (2.18), (2.21), (2.22), (2.27), (2.28) и (2.29) следует, что

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\sup\left|G(0, \sigma, \rho, \mu) - \frac{1}{2\rho}\varphi(0)\right| \leqslant \frac{M}{\Gamma(\mu)}\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, вытекает (2.5).

Переходим к доказательству последнего утверждения теоремы.

в) Мы должны доказать, что при $\rho \geqslant 1$, $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$ для любого $w \neq 0$, $|\arg w| \geqslant \frac{\pi}{\rho}$, имеет место равенство

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(w, \sigma, \rho, \mu) = 0. \quad (2.5)$$

Пусть $w = re^{i\vartheta}$. По условию, $r \neq 0$ и $\frac{\pi}{\rho} \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ $(\rho \geqslant 1)$.

Исследуем поведение интеграла

$$F(re^{i\vartheta}; \sigma) = \int\limits_{L_2(\sigma)} e^{-v^\rho z^\rho}E_\rho(re^{i\vartheta}z; \mu)z^{\mu\rho-1}dz \quad (2.30)$$

при $\sigma \to +\infty$.

Обозначая $z = \sigma^{\frac{1}{\rho}}e^{i\varphi}$, имеем:

$$F(re^{i\vartheta}; \sigma) = i\sigma^\mu\int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^\rho\cos\rho\varphi}E_\rho\left(r\sigma^{\frac{1}{\rho}}e^{i(\vartheta+\varphi)}; \mu\right)e^{i\mu\rho\varphi}d\varphi. \quad (2.30')$$

Заметим, что при $\frac{\pi}{\rho} \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ и $-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$

$$\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \vartheta + \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Рассмотрим три случая:

1) $\rho > 1$, $\frac{\pi}{\rho} < \vartheta < 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$,

2) $\rho > 1$, $\vartheta = \frac{\pi}{\rho}$ или $\vartheta = 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$,

3) $\rho = 1$ и, следовательно, $\vartheta = \pi$.

Случай 1). Пусть $-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$, $\frac{\pi}{2\rho} < \vartheta + \varphi < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$. Определим число β так, чтобы $\frac{\pi}{2\rho} < \beta < \frac{\pi}{\rho}$ и при $-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$ имели

место соотношения:

$$\frac{\pi}{2\rho} < \beta \leqslant \vartheta + \varphi \leqslant 2\pi - \beta < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Но тогда, по лемме 2, если $0 < \mu < \rho^{-1}$, то

$$|F(re^{i\vartheta}; \sigma)| \leqslant \frac{M\sigma^{\mu}}{r\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^{\rho} \cos \rho\varphi} d\varphi < \frac{\pi M}{\rho r} \sigma^{\mu - \frac{1}{\rho}}, \tag{2.31}$$

если же $\mu = \rho^{-1}$, то

$$|F(re^{i\vartheta}; \sigma)| \leqslant \frac{M_1\sigma^{\mu}}{r^2\sigma^{\frac{2}{\rho}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^{\rho} \cos \rho\varphi}\, d\varphi < \frac{\pi M_1}{\rho r^2} \sigma^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.31'}$$

и эти оценки справедливы для всех $v \geqslant 0$, а постоянные M и M_1 не зависят от v и σ.

Из формулы (2.9) и из оценок (2.31) и (2.31′) следует равенство (2.5).

Случай 2). Пусть, например, $\vartheta = \frac{\pi}{\rho}$; тогда при $-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$ будем иметь:

$$\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \vartheta + \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2\rho} < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} \quad (\text{так как } \rho > 1).$$

Положим, что число β имеет тот же смысл, что и выше, тогда из (2.30′) имеем:

$$F(re^{i\frac{\pi}{\rho}}; \sigma) = i\sigma^{\mu} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{-\left(\frac{\pi}{\rho} - \beta\right)} e^{-\sigma v^{\rho} \cos \rho\varphi} E_{\rho}(r\sigma^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\frac{\pi}{\rho} - \varphi\right)}; \mu)\, e^{i\mu\rho\varphi} d\varphi +$$

$$+ i\sigma^{\mu} \int\limits_{-\left(\frac{\pi}{\rho} - \beta\right)}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^{\rho} \cos \rho\varphi} E_{\rho}(r\sigma^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\frac{\pi}{\rho} + \varphi\right)};\ \mu)\, e^{i\mu\rho\varphi} d\varphi = F_1(\sigma) + F_2(\sigma). \tag{2.32}$$

При $-\left(\frac{\pi}{\rho} - \beta\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$ имеем:

$$\beta \leqslant \frac{\pi}{\rho} + \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2\rho} < 2\pi - \frac{\pi}{2\rho},$$

поэтому, по лемме 2, как это было сделано выше в оценках (2.31) и (2.31′), получим при $0 < \mu < \rho^{-1}$:

$$|F_2(\sigma)| < \frac{\pi M}{\rho r} \sigma^{\mu - \frac{1}{\rho}}, \tag{2.33}$$

а при $\mu = \rho^{-1}$

$$|F_2(\sigma)| < \frac{\pi M_1}{\rho r^2} \sigma^{-\frac{1}{\rho}}, \tag{2.33'}$$

и эти оценки справедливы при любом $v \geqslant 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\sigma \to +\infty} F_2(\sigma) = 0 \tag{2.33''}$$

равномерно для всех $v \geqslant 0$.

Оценим величину $F_1(\sigma)$ при $\sigma \to +\infty$. Имеем:

$$F_1(\sigma) = i\sigma^{\mu} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{-\left(\frac{\pi}{\rho}-\beta\right)} e^{-\sigma v^{\rho}\cos\rho\varphi} E_{\rho}\left(r\sigma^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\frac{\pi}{\rho}+\varphi\right)};\ \mu\right) e^{i\mu\rho\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \int e^{-v^{\rho}z^{\rho}} \left\{E_{\rho}(re^{i\frac{\pi}{\rho}}z;\ \mu) - \rho\,(re^{i\frac{\pi}{\rho}}z)^{\rho(1-\mu)}\, e^{-z^{\rho}z^{\rho}}\right\} z^{\mu\rho-1}\, dz +$$

$$+ \rho\,(re^{i\frac{\pi}{\rho}})^{\rho(1-\mu)} \int e^{-(v^{\rho}+r^{\rho})\,z^{\rho}}\, z^{\rho-1}\, dz = F_3(\sigma) + F_4(\sigma), \qquad (2.34)$$

где в интегралах $F_3(\sigma)$ и $F_4(\sigma)$ интегрирование совершается по дуге окружности $|z| = \sigma^{\frac{1}{\rho}}$, определяемой из условия

$$-\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \arg z \leqslant -\left(\frac{\pi}{\rho} - \beta\right).$$

Но на указанной дуге

$$\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \arg(e^{i\frac{\pi}{\rho}}z) \leqslant \beta < \frac{\pi}{\rho},$$

поэтому, по лемме 1, если $0 < \mu < \rho^{-1}$, то при $\sigma \to \infty$

$$|F_3(\sigma)| \leqslant \frac{M\sigma^{\mu}}{r\sigma^{\frac{1}{\rho}}} \int\limits_{\frac{-\pi}{2\rho}}^{-\left(\frac{\pi}{\rho}-\beta\right)} e^{-\sigma v^{\rho}\cos\rho\varphi} d\varphi < \frac{\pi M}{r\rho}\, \sigma^{\mu-\frac{1}{\rho}}; \qquad (2.35)$$

если же $\mu = \rho^{-1}$, то

$$|F_3(\sigma)| \leqslant \frac{M_1\sigma^{\frac{1}{\rho}}}{r^2\sigma^{\frac{2}{\rho}}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2\rho}}^{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\sigma v^{\rho}\cos\rho\varphi}\, d\varphi < \frac{\pi M_1}{\rho r^2}\, \sigma^{-\frac{1}{\rho}}, \qquad (2.35')$$

где M и M_1 — константы, не зависящие от σ и $v \geqslant 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\sigma\to+\infty} F_3(\sigma) = 0 \qquad (2.35'')$$

равномерно для всех $v \geqslant 0$.

Наконец, имеем:

$$F_4(\sigma) = \rho e^{i\pi(1-\mu)} r^{\rho(1-\mu)} \int e^{-(v^{\rho}+r^{\rho})\,z^{\rho}} z^{\rho-1} dz =$$

$$= e^{i\pi(1-\mu)}\, r^{\rho(1-\mu)}\, \frac{-e^{-(v^{\rho}+r^{\rho})\,z^{\rho}}}{v^{\rho}+z^{\rho}} \Bigg|_{\sigma^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}}^{\sigma^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\left(\frac{\pi}{\rho}-\beta\right)}} =$$

$$= e^{i\pi(1-\mu)}\, r^{\rho(1-\mu)}\, \frac{e^{i\sigma(v^{\rho}+r^{\rho})} - e^{-\sigma(v^{\rho}+r^{\rho})\, e^{-i(\pi-\beta\rho)}}}{v^{\rho}+r^{\rho}}, \qquad (2.36)$$

где $0 < \pi - \beta\rho < \frac{\pi}{2}$.

Из формул (2.9), (2.33″), (2.35″) и (2.36) следует, что при $\rho > 1$ и $\sigma \to +\infty$

$$G(re^{i\frac{\pi}{\rho}}, \sigma, \rho, \mu) = o(1) - i\frac{\rho}{2\pi}\int_0^\infty \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1} F_4(\sigma)\, dv =$$

$$= o(1) - i\frac{\rho}{2\pi} r^{\rho(1-\mu)} e^{i\pi(1-\mu)} \left\{ \int_0^\infty \varphi(v) \frac{e^{i\sigma(v^\rho + r^\rho)}}{v^\rho + r^\rho} v^{\mu\rho-1}\, dv + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \varphi(v) \frac{e^{-\sigma(v^\sigma + r^\rho) e^{-i(\pi-\beta\rho)}}}{v^\rho + r^\rho} v^{\mu\rho-1} dv \right\}, \tag{2.37}$$

где $o(1) \to 0$.

Но $r > 0$ и $\operatorname{Re} e^{-i(\pi-\beta\rho)} = \cos(\pi - \beta\rho) > 0$, поэтому оба интеграла, стоящие в правой части формулы (2.37), стремятся к нулю при $\sigma \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(re^{i\frac{\pi}{\rho}}, \sigma, \rho, \mu) = 0. \tag{2.5′}$$

Совершенно аналогично получим, что при $\vartheta = 2\pi - \frac{\pi}{\rho}$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(re^{i\left(2\pi - \frac{\pi}{\rho}\right)}, \sigma, \rho, \mu) = 0. \tag{2.5″}$$

Таким образом, утверждение в) доказано полностью при $\rho > 1$.

Случай 3). Нужно доказать, что при $0 < \mu \leqslant 1$ и для любого $r\,(0 < r < +\infty)$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} G(-r, \sigma, 1, \mu) = 0. \tag{2.5‴}$$

Из (2.30′) имеем:

$$F(-r, \sigma) = i\sigma^\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma v\cos\varphi} E_1(r\sigma e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\, e^{i\mu\varphi}\, d\varphi =$$

$$= i\sigma^\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-(\pi-\beta)} e^{-\sigma v\cos\varphi} E_1(r\sigma e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\, e^{i\mu\varphi}\, d\varphi +$$

$$+ i\sigma^\mu \int_{-(\pi-\beta)}^{\pi-\beta} e^{-\sigma v\cos\varphi} E_1(r\sigma e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\, e^{i\mu\varphi} d\varphi +$$

$$+ i\sigma^\mu \int^{\frac{\pi}{2}} e^{-\sigma v\cos\varphi} E_1(r\sigma e^{i(\pi+\varphi)};\ \mu)\, e^{i\mu\varphi} d\varphi = \Phi_1(\sigma) + \Phi_2(\sigma) + \Phi_3(\sigma), \tag{2.38}$$

где число β удовлетворяет условию $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Оценка интеграла $\Phi_2(\sigma)$ вполне аналогична оценке интеграла $F_2(\sigma)$ и, как и в том случае,

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \Phi_2(\sigma) = 0 \tag{2.39}$$

равномерно для всех $v \geqslant 0$.

Точно так же, как это было уже сделано для интеграла $F_1(\sigma)$, проводятся оценки интегралов $\Phi_1(\sigma)$ и $\Phi_3(\sigma)$, а подстановка $F(-r, \sigma)$ в формулу (2.9) приводит к заключению (2.5‴). Так как соответствующие выкладки вполне аналогичны проведенным выше, то мы их опускаем.

Таким образом, сформулированная в начале этого параграфа теорема полностью доказана.

Выше мы полагали, что функция $\varphi(v)$ принимает лишь вещественные значения. Но ясно, что если $\varphi(v)$ является комплекснозначной функцией на $(0, +\infty)$, вещественная и мнимая части которой удовлетворяют всем условиям теоремы, то утверждения теоремы остаются в силе.

Отметим, что так как $G(w, \sigma, \rho, \mu)$ является целой функцией порядка ρ и типа σ, то доказанная теорема одновременно дает аппарат для приближения к функциям, заданным на полуоси $(0, +\infty)$, целыми функциями наперед заданного порядка $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, тип которых стремится к бесконечности.

Очевидно, что при $\rho = \mu = 1$ из доказанной теоремы будет следовать известный результат об интегралах Фурье, приведенный во введении.

§ 3. Представление непрерывных функций в комплексной области

В настоящем параграфе при помощи основной теоремы, доказанной выше, дается построение аппарата обобщенного интеграла Фурье для представления непрерывных функций, заданных на двух или нескольких полупрямых, исходящих из начала координат.

1. Обозначим через $L(\rho)$ контур области $|\arg w| < \frac{\pi}{2\rho}\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$, пробегаемый в положительном направлении. Пусть $L(\rho, \sigma)$ означает часть контура $L(\rho)$, лежащую в круге $|z| < \sigma^{\frac{1}{\rho}}$; тогда, как нетрудно видеть, для целой функции $G(w, \sigma, \rho, \mu)$, определяемой формулой (2.3), имеем такое представление:

$$G(w, \sigma, \rho, \mu) = i\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int\limits_{L(\rho,\sigma)} \Phi(z)\, E_\rho(wz; \mu)\, z^{\mu\rho-1}\, dz. \qquad (3.1)$$

Поэтому, обозначая

$$G(w, \rho, \mu) = i\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int\limits_{L(\rho)} \Phi(z)\, E_\rho(wz; \mu)\, z^{\mu\rho-1} dz \qquad (3.2)$$

для тех точек плоскости w, где интеграл (3.2) сходится в смысле главного значения, мы можем сформулировать теорему, доказанную в § 2 в случае $\rho \geqslant 1$, следующим образом:

Если непрерывная на полуоси $[0, +\infty]$ *функция* $\varphi(v)$, *вещественная и мнимая части которой имеют ограниченную вариацию на любом отрезке* $[0, R]$, $0 < R < \infty$, *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(v)|\, v^{\mu\rho-1}\, dv < +\infty, \quad \rho \geqslant 1, \quad 0 < \mu \leqslant \rho^{-1}, \qquad (3.3)$$

и

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-v^\rho z^\rho} \varphi(v)\, v^{\mu\rho-1} dv, \qquad (3.4)$$

то

а) $G(u, \rho, \mu) = \varphi(u)$ *при* $u > 0$,

б) $G(o, \rho, \mu) = \frac{1}{2\rho}\varphi(0)$,

в) $G(re^{i\vartheta}, \rho, \mu) = 0$ *при* $r > 0$, $|\vartheta| \geqslant \frac{\pi}{\rho}$.

Переходим теперь к построению аппарата для представления непрерывных функций на двух или нескольких полупрямых.

2. Случай двух полупрямых. Пусть функция $\varphi(w)$ задана и непрерывна на контуре, образованном полупрямыми

$$\arg w = 0, \quad \arg w = \frac{\pi}{\alpha},$$

где $\alpha \geqslant 1$. Полагаем, что действительные и мнимые части функций $\varphi(r)$, $\varphi(e^{i\frac{\pi}{\alpha}}r)$ имеют ограниченную вариацию на любом отрезке $0 \leqslant r \leqslant R < < +\infty$ и, кроме того, сходятся интегралы

$$\int_0^\infty |\varphi(r)|\, r^{\mu\rho-1}dr, \quad \int_0^\infty |\varphi(e^{i\frac{\pi}{\alpha}}r)|\, r^{\mu\rho-1}dr, \tag{3.5}$$

где $\rho \geqslant \alpha$ и $0 < \mu \leqslant \rho^{-1}$.

Введем функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-v^\rho z^\rho}\varphi(v)\, v^{\mu\rho-1}\,dv, \\ \Phi_2(z) &= \sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\int_0^\infty e^{-v^\rho z^\rho}\varphi(e^{i\frac{\pi}{\alpha}}v)\, v^{\mu\rho-1}\,dv, \end{aligned} \tag{3.6}$$

непрерывные на полупрямых $\arg z = \pm\frac{\pi}{2\rho}$, и при их помощи определим интегралы

$$G_k(w, \rho, \mu) = i\sqrt{\frac{\rho}{2\pi}}\int_{L(\rho)} \Phi_k(z)\, E_\rho(wz; \mu)\, z^{\mu\rho-1}\,dz \quad (k = 1, 2), \tag{3.7}$$

которые в силу свойств а), б), в), сформулированных выше, существуют при $w = 0$, $\arg w = 0$ и $|\arg w| \geqslant \frac{\pi}{\rho}$.

Если составить сумму интегралов

$$G(w, \rho, \mu) = G_1(w, \rho, \mu) + G_2(e^{-i\frac{\pi}{\alpha}}w, \rho, \mu), \tag{3.8}$$

то, в силу указанных выше свойств функций вида (3.7), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &G(r, \rho, \mu) = \varphi(r) && \text{при } r > 0, \\ &G(re^{i\frac{\pi}{\alpha}}, \rho, \mu) = \varphi(re^{i\frac{\pi}{\alpha}}) && \text{при } r > 0, \\ &G(0, \rho, \mu) = \frac{1}{\rho}\varphi(0). && \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

Таким образом, функция $G(w, \rho, \mu)$ $(0 \leqslant \mu < \rho^{-1})$, являющаяся, очевидно, пределом последовательности целых функций порядка ρ при стремлении их типа σ к бесконечности, представляет нашу непрерывную функцию $\varphi(w)$ везде на кривой ее определения, кроме точки $w = 0$.

Из (3.9) следует, что при $\alpha = \rho = 1$, $0 < \mu \leqslant 1$

$$G(u, 1, \mu) = \varphi(u) \quad \text{при} \; -\infty < u < \infty.$$

Очевидно, что при $\alpha = \rho = \mu = 1$ формула

$$\varphi(u) = G(u, 1, 1)$$

представляет собой интегральную формулу Фурье, приведенную во введении.

3. Случай любого числа полупрямых, исходящих из начала координат под равными углами. Пусть функция $\varphi(w)$ задана и непрерывна на полупрямых

$$\arg w = \frac{2\pi}{p} k \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1), \quad p \geqslant 2 \text{ — целое.}$$

Полагаем, что действительные и мнимые части функций

$$\psi_{k^\circ}(r) = \varphi(e^{i\frac{2\pi}{\rho}k} r) \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

имеют ограниченную вариацию на любом отрезке $0 \leqslant r \leqslant R < +\infty$, и, кроме того, существуют интегралы

$$\int_0^\infty |\psi_k(r)| \, r^{\frac{p}{2}\mu - 1} dr, \quad 0 < \mu \leqslant \frac{2}{p}. \tag{3.10}$$

Введем функции

$$\Phi_k(z) = \sqrt{\frac{p}{4\pi}} \int_0^\infty e^{-r^{\frac{p}{2}} z^{\frac{p}{2}}} \varphi(e^{i\frac{2\pi}{p}k} r) \, r^{\frac{p}{2}\mu - 1} dr, \tag{3.11}$$

непрерывные на полупрямых $\arg z = \pm \frac{\pi}{p}$, и при их помощи определим интегралы:

$$G_k\left(w, \frac{p}{2}, \mu\right) = i \sqrt{\frac{p}{4\pi}} \int_{L\left(\frac{p}{2}\right)} \Phi_k(z) \, E_{\frac{p}{2}}(wz; \mu) \, z^{\frac{p}{2}\mu - 1} dz \; (k = 0, 1, \ldots, p-1). \tag{3.12}$$

В силу свойств функций вида (3.2), имеем:

$$\left. \begin{aligned} & G_k\left(r, \frac{p}{2}, \mu\right) = \varphi(re^{i\frac{2\pi}{p}k}) \quad \text{при } r > 0, \\ & G_k\left(0, \frac{p}{2}, \mu\right) = \frac{1}{p} \varphi(0), \\ & G_k\left(re^{i\vartheta}, \frac{p}{2}, \mu\right) = 0 \qquad \text{при } r > 0, \; |\vartheta| \geqslant \frac{2\pi}{p} \end{aligned} \right\} \tag{3.13}$$

при $k = 0, 1, \ldots, p-1$.

Рассмотрим функцию

$$G\left(w, \frac{p}{2}, \mu\right) = \sum_{k=0}^{p-1} G_k\left(e^{-i\frac{2\pi}{p}k} w, \frac{p}{2}, \mu\right). \tag{3.14}$$

Из (3.13) следует, что при $k = 0, 1, \ldots, p-1$

$$\varphi\left(re^{i\frac{2\pi}{p}k}\right) = G\left(re^{i\frac{2\pi}{p}k}; \frac{p}{2}, \mu\right) \tag{3.15}$$

для всех значений $r \geqslant 0$.

Как и в случае классического интеграла Фурье, сумма интегралов (3.14) может быть представлена в более компактной форме. Однако на этом мы останавливаться не будем.

Поступило
26.1.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kober H., On the approximation to integrable functions by integral functions, Trans. Amer. Math. Soc., v. 54 (1943), 70—82.
[2] Bieberbach L., Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 1927.
[3] Fry Cleota G. and Hugens H. K., Asymptotic developments of certain integral functions, Duke Math. J., v. 9 (1942), 791—802.
[4] Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М. — Л., 1950.
[5] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, М. — Л., 1948.
[6] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М. — Л., 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 449—460

М. А. ЕВГРАФОВ

ОБ ОДНОМ РЕКУРРЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ, СВЯЗАННОМ С ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕЙ АБЕЛЯ-ГОНЧАРОВА

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

В статье получено новое рекуррентное соотношение, позволяющее в некоторых случаях дать весьма точные оценки для интерполяционных многочленов, главным образом снизу.

1°. Критерий сходимости интерполяционного ряда. Пусть дана целая функция.

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n, \quad \alpha_n \neq 0,$$

и система функционалов $l_n(F)$. Рассмотрим систему функций

$$\varphi_n(z) = \underset{\zeta}{l_n}[\Phi(z\zeta)]$$

и систему многочленов $P_n(z)$, определенных равенствами

$$l_n[P_m(z)] = \delta_{n,m}.$$

Под интерполяционным рядом для функции $F(z)$ будем понимать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} l_n(F) P_n(z). \tag{1}$$

Мы дадим один критерий сходимости этого ряда к $F(z)$ в случае, если функции $\varphi_n(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_n(z) = z^n \varphi_n^{(1)}(z), \quad \varphi_n^{(1)}(0) = 1.$

2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\varphi_n(z)|} \leqslant u(z)$ для всех z.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\varphi_n(z)|} = u(z)$ для всех z,

за исключением некоторого замкнутого множества плоской меры, равной нулю. Кривые $u(z) = \rho$ при $\rho < \rho_0$ являются замкнутыми кривыми, содержащими точку $z = 0$ и расширяющимися при увеличении ρ.

4. Ряды $z^k = \sum_{n=k}^{\infty} a_{k,n}\varphi_n(z)$ сходятся внутри области, ограниченной кривой $u(z) = \rho_1 < \rho_0$, для всех k, начиная с некоторого, причем

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_{k,n}| [u(z)]^n < [G(z)]^k.$$

При выполнении этих условий справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Ряд* (1) *сходится к* $F(z)$ *для любой*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

для которой

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha_n} z^{-n-1}$$

регулярна вне области, ограниченной кривой $u(z) = \rho_1$.

Доказательству этой теоремы предпошлем одну несложную лемму.

ЛЕММА 1. *При выполнении условий* 1, 2, 4 *любая целая функция может быть разложена в ряд по* $\varphi_n(z)$, *равномерно сходящийся внутри области, ограниченной кривой* $u(z) = \rho_1$.

Доказательство. Для целых функций, разложение которых начинается со степеней z, бóльших некоторой, утверждение леммы очевидно. Остается показать, что оно справедливо и для малых степеней z. Но, в силу условия 1,

$$z^{n-1} = \varphi_{n-1}(z) + \psi(z),$$

где $\psi(z)$ — целая функция, разложение которой начинается с z^n. Отсюда утверждение леммы получается без всякого труда.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы. По лемме 1, целая функция $\Phi(z\zeta)$ может быть разложена в ряд по $\varphi_n(\zeta)$ при любом фиксированном z, равномерно сходящийся по ζ внутри области, ограниченной кривой $u(\zeta) = \rho_1$, и равномерно по z в любой конечной области. Коэффициенты этого разложения будут многочленами от z степени n. С другой стороны, для любой $F(z)$, удовлетворяющей условиям теоремы, имеет место представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u(z)=\rho_1-\varepsilon} f(\zeta)\,\Phi(z\zeta)\,d\zeta.$$

Но

$$\Phi(z\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\zeta) P_n(z).$$

Отсюда

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(z)}{2\pi i} \int\limits_{u(z)=\rho_1-\varepsilon} f(\zeta)\,\varphi_n(\zeta)\,d\zeta,$$

а так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u(z)=\rho_1-\varepsilon} f(\zeta)\varphi_n(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u(z)=\rho_1-\varepsilon} f(\zeta)\ln_z \Phi(z\zeta)\,d\varsigma = l_n(F),$$

то

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} l_n(F)\,P_n(z),$$

что и требовалось доказать.

Кроме того справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если при выполнении условий 1, 2, 3 какой-либо из рядов*

$$z^k=\sum_{n=k}^{\infty} a_{k,n}\varphi_n(z)$$

не сходится в области $u(z)<\rho_2$ ни при каком $\rho_2>\rho_1$, то область, указанная в теореме 1, не может быть расширена.

Доказательство. Действительно, в противном случае нашлась бы точка ζ_0, удовлетворяющая условиям

$$u(\zeta_0)=\rho_2>\rho_1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\varphi_n(\zeta_0)|}=u(\zeta_0)=\rho_2,$$

$$\Phi(\zeta_0 z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\zeta_0)\,P_n(z). \tag{2}$$

Но из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда

$$\Phi(\zeta z)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\,P_n(z)$$

для всех ζ, удовлетворяющих условию $u(\zeta)<\rho_2$, $\rho_2>\rho_1$, откуда получаем, что ряды

$$\zeta^k=\frac{1}{2\pi i\alpha_k}\int\limits_C \Phi(\zeta z)\frac{dz}{z^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\varphi_n(\zeta)\frac{1}{2\pi i\alpha_k}\int\limits_C\frac{P_n(z)}{z^{k+1}}\,dz$$

сходятся при $u(z)<\rho_2$, $\rho_2>\rho_1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

2°. Рекуррентное соотношение для коэффициентов разложения z^k по функциям $\varphi_n(z)=z^n\Phi^{(n)}(\lambda_n z)$. С целью применения полученного критерия к вопросу сходимости интерполяционного ряда Абеля-Гончарова выведем одно рекуррентное соотношение между коэффициентами разложения z^k по $\varphi_n(z)=z^n\Phi^{(n)}(\lambda_n z)$, где

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!}z^n.$$

Прежде всего напишем формальное равенство:

$$z^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^{n+k} \Phi^{(n+k)}(\lambda_{n+k} z). \tag{3}$$

Разлагая $\Phi^{(n+k)}(\lambda_{n+k}z)$ в ряд и сравнивая в (3) коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем систему соотношений:

$$\begin{aligned} &\alpha_n a_0^{(k)} = 1, \\ &\alpha_{n+1}\left(a_0^{(k)} \frac{\lambda_n}{1!} + a_1^{(k)}\right) = 0, \\ &\alpha_{n+2}\left(a_0^{(k)} \frac{\lambda_n^2}{2!} + a_1^{(k)} \frac{\lambda_{k+1}}{1!} + a_2^{(k)}\right) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим через $A_m(\lambda_n, \ldots, \lambda_{n+m-1}, n)$ величины, удовлетворяющие системе соотношений:

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, \\ &A_0 \frac{\lambda_n}{1!} - A_1 = 0, \\ &A_0 \frac{\lambda_n^2}{2!} - A_1 \frac{\lambda_n}{1!} + A_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Так как зависимость A_m от последнего аргумента выражается лишь в замене всей последовательности $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ на $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$, то мы будем заниматься лишь величинами

$$A_m(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) = A_m(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, 0),$$

так как перенос полученных результатов на любое n не составит труда. Нетрудно видеть, что

$$a_n^{(k)} = A_n(\lambda_k, \ldots, \lambda_{k+n-1}, k)\frac{(-1)^n}{\alpha_n}.$$

ЛЕММА 2. *Для* $k = 0, 1, \ldots, n-2$

$$\frac{\partial A_n}{\partial \lambda_k} = A_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{n-1}) - A_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+2}, \ldots, \lambda_{n-1}),$$

а для $k = n-1$

$$\frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-1}} = A_{n-1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}).$$

Доказательство. Для $A_1(\lambda_0)$ утверждение леммы справедливо. Допустив, что оно доказано для всех $m < n$, из равенства

$$A_0 \frac{\lambda_0^n}{n!} - A_1 \frac{\lambda_0^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^n A_n = 0,$$

дифференцируя по λ_{n-1}, получаем равенство

$$(-1)^n \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-1}} + (-1)^{n-1} A_{n-1} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-1}} = A_{n-1},$$

а дифференцируя по λ_k, $k < n-1$, получаем равенство

$$(-1)^n \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_k} + (-1)^{n-1} \frac{\partial A_{n-1}}{\partial \lambda_k} \frac{\lambda_{n-1}}{1!} + \cdots + (-1)^k A_k \frac{\lambda_k^{n-k-1}}{(n-k-1)!} = 0$$

или, обозначая $A_n^{(k)} = A_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_n)$,

$$\frac{\partial A_n}{\partial \lambda_k} - \lambda_{n-1} A_{n-2}^{(k)} + \frac{\lambda_{n-2}^2}{2!} A_{n-3}^{(k)} - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{n-k+1} \frac{\lambda_{k+1}^{n-k-1}}{(n-k-1)!} A_k + \frac{\lambda_{k-1}^{n-k}}{(n-k)!} A_{k-1} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{\lambda_0^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_{n-1} A_{n-2}^{(k+1)} - \frac{\lambda_{n-2}^2}{2!} A_{n-3}^{(k+1)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-k} \frac{\lambda_k^{n-k-1}}{(n-k-1)!} A_k + (-1)^{n-k+1} \frac{\lambda_{k-1}^{n-k}}{(n-k)!} A_{k-1} + \ldots + (-1) \frac{\lambda_0^{n-1}}{(n-1)!},$$

т. е.

$$\frac{\partial A_n}{\partial \lambda_k} = A_{n-1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k+1)},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Обозначим*

$$A_n^{(k)}(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-k-1}) = A_n(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-k-2}, \lambda_{n-k-1}, \ldots, \lambda_{n-k-1}).$$

Тогда

$$\frac{\partial A_n^{(k)}}{\partial \lambda_{n-k-1}} = A_{n-1}^{(k-1)}, \qquad A_n^{(0)} = A_n. \tag{4}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial A_n^{(k)}}{\partial \lambda_{n-k-1}} = \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-k-1}}\Bigg|_{\lambda_{n-1}=\lambda_{n-2}=\ldots=\lambda_{n-k}=\lambda_{n-k-1}} +$$

$$+ \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-k}}\Bigg|_{\lambda_{n-1}=\lambda_{n-2}=\ldots=\lambda_{n-k}=\lambda_{n-k-1}} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-1}}\Bigg|_{\lambda_{n-1}=\ldots=\lambda_{n-k}=\lambda_{n-k-1}} =$$

$$= \frac{\partial A_n}{\partial \lambda_{n-1}}\Bigg|_{\lambda_{n-1}=\ldots=\lambda_{n-k}=\lambda_{n-k-1}} = A_{n-1}^{(k-1)}.$$

ЛЕММА 4. *Обозначим* $\Delta_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$. *Тогда*

$$A_{n+1}^{(k)} = A_{n+1}^{(k+1)} + \frac{\Delta_{n-k}}{1!} A_n^{(k)} + \frac{\Delta_{n-k}^2}{2!} A_{n-1}^{(k-1)} + \cdots + \frac{\Delta_{n-k}^{k+1}}{(k+1)!} A_{n-k}. \tag{5}$$

Доказательство. Разлагая $A_{n+1}^{(k)}$ по формуле Тейлора в окрестности точки λ_{n-k-1} по степеням Δ_{n-k} и замечая, что $A_{n+1}^{(k)}$ является многочленом $(k+1)$-й степени от λ_{n-k}, получаем равенство (5) при помощи равенства (4).

Теперь перейдем к интересующему нас результату.

ТЕОРЕМА 3. *Величины* A_n *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$A_{n+1} = c_0^{(n)} A_n + c_1^{(n)} A_{n-1} + \cdots + c_n^{(n)} A_0, \tag{6}$$

где для $m \geqslant 1$

$$c_m^{(n)} = \frac{\Delta_{n-m}^{m+1}}{(m+1)!} B_0^{(n)}(m) + \frac{\Delta_{n-m}^{m}}{m!} B_1^{(n)}(m-1) + \cdots + \frac{\Delta_{n-m}^{2}}{2!} B_{m-1}^{(n)}(1), \tag{7}$$

а $c_0^{(n)} = \Delta_n$. *В свою очередь,* $B_k^{(k)}(m)$ *определяются равенствами*

$$B_k^{(n)}(m) = B_k^{(n)}(m-1) + \frac{\lambda_{n-k-m}}{1!} B_{k-1}^{(n)}(m) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\Delta_{n-k-m}^{k}}{k!} B_0^{(n)}(m+k-1) \tag{8}$$

и

$$B_k^{(n)}(1) = \frac{\Delta_{n-k-1}}{1!} B_{k-1}^{(n)}(1) + \cdots + \frac{\Delta_{n-k-1}^{k}}{k!} B_0^{(n)}(k), \quad B_0^{(n)}(m) = 1. \tag{9}$$

Доказательство. Напишем равенство

$$A_{n+1} = A_{n+1}^{(1)} + \Delta_n A_n$$

и выразим $A_{n+1}^{(1)}$ при помощи (5). В получившемся равенстве все величины A с двумя индексами опять выразим при помощи равенства (5) и т. д. Такой процесс оборвется, так как

$$A_{n+1}^{(n)} = \frac{\lambda_0^n}{n!}.$$

Через $c_m^{(n)}$ обозначим коэффициент, получающийся при A_{n-m}, через $B_k^{(n)}(m)$ — коэффициент при $A_{n+1-k}^{(m)}$. Так как A_{n-m} может получиться из $A_{n+1}^{(m)}, A_n^{(m-1)}, \ldots, A_{n-m+2}^{(1)}$, то имеем соотношение (7). Аналогично получаем равенства (8) и (9).

3°. Некоторые оценки, получаемые из рекуррентного соотношения.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots, \lambda_n \to \infty;\ 0 < \lambda_0' \leqslant \lambda_1' \leqslant \ldots$ *и*

$$\rho_1 = \frac{\lambda_n' - \lambda_{n-1}'}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \leqslant \rho_2. \tag{10}$$

Тогда

$$\rho_1^n A_{n+1} \leqslant A_{n+1}' \leqslant \rho_2^n A_{n+1}, \tag{11}$$

где $A_{n+1} = A_{n+1}(\lambda_0, \ldots, \lambda_n),\ A_{n+1}' = A_{n+1}(\lambda_0', \ldots, \lambda_n')$.

Доказательство. По индукции получаем

$$\rho_1^m B_m^{(n)}(k) \leqslant B_m'^{(n)}(k) \leqslant \rho_2^m B_m^{(n)}(k),$$

откуда находим, что

$$\rho_1^{m+1} c_m^{(n)} \leqslant c_m'^{(n)} \leqslant \rho_2^{m+1} c_m^{(n)},$$

а отсюда опять по индукции убеждаемся, что (11) имеет место.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \quad \lambda_n \to \infty,$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 1.$$

Тогда при любом фиксированном m

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_m^{(n)}}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \ldots (\lambda_{n-m} + \lambda_{n-m-1})} = c_m,$$

где

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n e^{-nz} = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Доказательство. Действительно $\dfrac{c_0^{(n)}}{\Delta_n} = 1$, а для $m \geqslant 1$

$$\frac{c_m^{(n)}}{\Delta_n \ldots \Delta_{n-m}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{\Delta_{n-m}^m}{\Delta_n \ldots \Delta_{n-m+1}} + \cdots + \frac{1}{2!} \frac{\Delta_{n-m}}{\Delta_n} \frac{B_{m-1}^{(n)}(1)}{\Delta_{n-1} \ldots \Delta_{n-m+1}}.$$

Обозначим

$$\Delta_n^* = \max\{\Delta_n, \ \ldots, \ \Delta_{n-m}\}, \quad \Delta_n^{**} = \min\{\Delta_n, \ \ldots, \ \Delta_{n-m}\}.$$

Для всех n и $k + p \leqslant m$ величины $B_k^{(n)}(p)$ мажорируются величинами

$$(\Delta_n^*)^k B_k^*(p)$$

и минорируются величинами

$$(\Delta_n^{**})^k B_k^*(p),$$

где $B_k^*(m)$ от n не зависят и определяются соотношениями

$$B_k^*(m) = B_k^*(m-1) + \frac{B_{k-1}^*(m)}{1!} + \cdots + \frac{B_0^*(m+k-1)}{k!} \tag{8'}$$

и

$$B_k^*(1) = \frac{B_{k-1}^*(1)}{1!} + \cdots + \frac{B_0^*(k)}{k!}, \qquad B_0^*(m) = 1. \tag{9'}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_m^{(n)}}{\Delta_n \ldots \Delta_{n-m}} = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{B_1^*(m-1)}{m!} + \cdots + \frac{B_{m-1}^*(1)}{2!} = c_m.$$

Чтобы определить эти величины, заметим, что они возникают при решении задачи с $\lambda_n = n + 1$. В этом случае имеем

$$1 = e^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n z^n e^{nz},$$

а c_n определяются из равенств

$$A_{n+1} = c_0 A_n + c_1 A_{n-1} + \cdots + c_n A_0,$$

т. е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+1} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n w^n.$$

Разрешая последнее соотношение относительно $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ и полагая $w = ze^{-z}$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 5 дает возможность получения весьма точных оценок A_n снизу. Для этой цели мы используем еще одну несложную лемму.

ЛЕММА 5. *Пусть радиус сходимости ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

равен ρ_0, *все* $c_n > 0$ *и* $f(x) < 1$ *при* $0 \leqslant x < \rho$. *Тогда для любого* $\alpha \leqslant 1$ *можно подобрать сколь угодно малые положительные числа* $a_0, a_1, \ldots, a_k$ *такие, чтобы решение разностного уравнения*

$$\begin{gathered} A_{n+1} = \alpha (c_0 A_n + c_1 A_{n-1} + \cdots + c_k A_{n-k}) \\ A_{n_0} = a_0, \ \ldots, \ A_{n_0+k} = a_k, \quad \alpha < 1, \end{gathered} \tag{12}$$

удовлетворяло условию

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{\rho_0 + \varepsilon_k},$$

где ε_k *может быть сделано сколь угодно малым, если* k *достаточно велико.*

Доказательство. Среди решений уравнения (12) имеется решение $A_n = C\rho_k^n$, где ρ_k — положительный корень уравнения

$$x^{k+1} - \alpha(c_0 x^k + \cdots + c_k) = 0.$$

С одной стороны, $\rho_k \leqslant \frac{1}{\rho_0}$, так как $\alpha(c_0 + \cdots + c_k \rho_0^k) < 1$; с другой стороны, при увеличении k $\rho_k \to \rho_0^{-1}$, так как

$$c_0 + c_1\rho + \cdots + c_k \rho^k \to \infty \text{ при } \rho > \rho_0, \quad k \to \infty.$$

Значения $a_0, \ldots, a_k$ могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет выбора постоянной C.

Выведем оценку для A_n снизу.

ТЕОРЕМА 6. *При выполнении условий теоремы* 5

$$A_{n+1} > C(\varepsilon)(1-\varepsilon)^n e^n \Delta_n \Delta_{n-1} \cdots \Delta_0, \tag{13}$$

где $\Delta_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$, $\Delta_0 = \lambda_0$, $\varepsilon < 1$ — *любое положительное число,* $n > n_0(\varepsilon)$.

Доказательство. Коэффициенты c_n из теоремы 5 удовлетворяют условиям леммы 5 с $\rho_0 = e^{-1}$. Выберем k так, чтобы $\rho_k > e(1-\varepsilon)$, n_0 — так, чтобы $c_m^{(n)} > \frac{1}{2} c_m$ при $m < k$, а $C(\varepsilon)$ — так, чтобы

$$A_{n_0} > C(\varepsilon) \rho_k^{n_0-1}, \ \ldots, \ A_{n_0+k} > C(\varepsilon) \rho_k^{n_0+k-1}.$$

Тогда A_n при $n > n_0$ минорируется величиной A_n^*, удовлетворяющей соотношению

$$A_{n+1}^* = \frac{1}{2}(c_0 A_n^* + \cdots + c_k A_{n-k}^*),$$
$$A_{n_0}^* = C(\varepsilon) \rho_k^{n_0-1}, \ \ldots, \ A_{n_0+k}^* = C(\varepsilon) \rho_k^{n_0+k-1},$$

умноженной на $\Delta_n \Delta_{n-1} \ldots \Delta_0$, т. е. величиной

$$A_{n+1}^* = C(\varepsilon) \rho_k^n \Delta_n \Delta_{n-1} \ldots \Delta_0,$$

что и дает утверждение теоремы.

Эта оценка, по всей видимости, является точной, т. е. улучшение ее вероятно возможно лишь за счет уточнения величины $C(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Получение из рекуррентного соотношения (7) оценок сверху тоже возможно, но связано с более кропотливыми оценками. Поэтому непосредственно получать мы их не будем, а найдем для некоторых случаев обходным путем при помощи теоремы 4.

4°. Применения к сходимости интерполяционного ряда Абеля-Гончарова.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть дана целая функция*

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n, \quad \alpha_n \neq 0,$$

и две последовательности

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \ \lambda_n \to \infty, \quad 0 < \lambda_0' < \lambda_1' < \ldots, \ \frac{\Delta_n'}{\Delta_n} \to 1.$$

Пусть, далее,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Phi^{(n)}(\lambda_n z) \alpha_n^{-1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\Phi^{(n)}(\lambda_n' z) \alpha_n^{-1}|} = u_1(z)$$

для всех z, а для всех z, за исключением множества плоской меры нуль,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi^{(n)}(\lambda_n z) \alpha_n^{-1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi^{(n)}(\lambda_n' z) \alpha_n^{-1}|} = u_1(z),$$

где $|z| u_1(z)$ обладает свойствами $u(z)$ из условия 3 теоремы 1. Тогда число ρ_1, являющееся наибольшим из чисел ρ, для которых любая функция

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n c_n}{n!} z^n,$$

имеющая ассоциированную $f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^{-n-1}$, *регулярную вне области* $|\zeta| u_1(\zeta) < \rho_1$, *разлагается в сходящийся интерполяционный ряд Абеля-Гончарова, будет одним и тем же для обеих задач* (*с* λ_n *и* λ'_n).

Доказательство. В силу теоремы 4, «радиусы сходимости» рядов для z^k по $z^n \Phi^{(n)}(\lambda_n z)$ и $z^n \Phi^{(n)}(\lambda'_n z)$ удовлетворяют условию

$$1-\varepsilon_k < \frac{\rho'}{\rho} < 1+\varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда при помощи теорем 1 и 2 получаем наше утверждение.

Теорему 7 можно рассматривать как обобщение некоторых результатов работы автора (1) о полноте близких систем. Она использует специфику интерполяционной задачи Абеля-Гончарова и дает результаты более сильные, чем применение теорем работы (1) к случаю задачи Абеля-Гончарова. Отметим, например, такое

Следствие. *Если* $\lambda_{n+1}-\lambda_0 \to 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\lambda_n) P_n(z)$$

сходится к

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

если

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^{n+1}}$$

регулярна вне области $|\zeta e^{\zeta}| < \frac{1}{e}$, *причем эта область расширена быть не может.*

Так как в этом случае $\Phi(z)=e^z$, то утверждение получается немедленно из теоремы 7 и известного результата о ряде Абеля.

ТЕОРЕМА 8. *Если* $(\lambda_{n+1}-\lambda_n)/2n \to 1$, *то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(\lambda_n) P_n(z)$$

сходится к

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} z^n,$$

если

$$f(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^{n+1}}$$

регулярна в области $\left|\sqrt{1+z}-1\right| \left|e^{\sqrt{1+z}-1}\right| < \frac{1}{e}$, *причем эта область расширена быть не может.*

Доказательство. Первая часть утверждения получается комбинацией теоремы 7 и результата статьи автора (2). Вторая же часть (содержащая, в частности, одно утверждение, высказанное в работе (2) без доказательства) получается следующим образом. В работе (2) было доказано, что ($\Phi(z) = \operatorname{ch}\sqrt{z}$)

$$|z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!} |\Phi^{(n)}(zn^2)|} = 2|\sqrt{1+z}-1||e^{\sqrt{1+z}-1}|.$$

Но из теоремы 6 следует, что при $n > n_0$

$$A_n > C(\varepsilon)(1-\varepsilon)^n e^n n!\, 2^n.$$

Следовательно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \Phi^{(n)}(n^2 z)$$

сходится при условии

$$|z| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n \Phi^{(n)}(n^2 z)} < 1,$$

т. е.

$$2\,|(\sqrt{1+z}-1)e^{\sqrt{1+z}-1}| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!} A_n} < 1.$$

Но (так как ε сколь угодно мало)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!} A_n} \geqslant \frac{e}{2}.$$

Следовательно, сходимость возможна лишь при выполнении условия

$$|(\sqrt{1+z}-1)e^{\sqrt{1+z}-1}| < \frac{1}{e},$$

что и доказывает нашу теорему полностью, в силу теорем 2 и 7.

Теорема 8 подкрепляет соображения о неулучшаемости оценки (10). Интересно сравнить оценку снизу A_n с оценкой сверху

$$A_{n+1} < \frac{\lambda_n^n}{n!}, \tag{14}$$

которая может быть получена из соображений монотонности (A_{n+1} — возрастающая функция всех λ_k при $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$, что видно из леммы 2). Для $\Delta_n = n^\alpha$ оценка (14) дает:

$$(A_{n+1})^{\frac{1}{n}} < \frac{e}{1+\alpha} n^\alpha,$$

а оценка (13) —

$$(A_{n+1})^{\frac{1}{n}} > \frac{e}{e^\alpha} n^\alpha.$$

Для $\alpha=0$ обе оценки дают примерно одно и то же, а для любых других α различны, причем при $\alpha=1$ вторая оценка точна. (Кстати говоря, оценка (14) эквивалентна оценке В. Л. Гончарова

$$\left|\int_{\lambda_0}^{z}\int_{\lambda_1}^{z_1}\cdots\int_{\lambda_n}^{z_n} dz_1 dz_2 \ldots dz_{n+1}\right| <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left[\,|z-\lambda_0|+|\lambda_1-\lambda_0|+\ldots+|\lambda_n-\lambda_{n-1}|\,\right]^{n+1}.)$$

В заключение отметим, что метод этой статьи имеет по сравнению с методом, изложенным в статье ([1]), тот недостаток, что его весьма трудно использовать для получения теорем единственности для классов функций, более широких, чем те, для которых сходятся интерполяционные ряды.

Поступило
1.VII.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Евграфов М. А., О полноте систем, близких к $\{z^n P(z)\}$, $\{[\varphi(z)]^n P(z)\}$, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 17 (1953), 421—460.

[2] Евграфов М. А., О построении и единственности целой функции $F(z)$ по данным значениям $F^{(n)}(n^2)$, Известия Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 201—206.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 461—476

Е. В. КОЛЕСОВА

К ТЕОРИИ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* М. А. Лаврентьевым)

В работе исследуется характер однозначного решения системы уравнений

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1 \ldots, y_n) = 0\} \quad (s = 1, \ldots, p)$$

в случае, когда F_s определены в пространстве Евклида $m + n$ измерений и непрерывны в нем.

Введение

В настоящей работе мы исследуем характер однозначного решения системы уравнений

$$F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0 \quad (s = 1, \ldots, p) \tag{I}$$

в случае, когда F_s определены в замкнутой области пространства Евклида $m + n$ измерений и непрерывны в нем.

Система функций

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{II}$$

называется однозначным решением системы уравнений (I), если:

1) функции f_i однозначны и определены на проекции в пространство $(x_1, \ldots, x_m)$ множества всех точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ $(m + n)$-мерного пространства, координаты которых удовлетворяют системе (I);

2) все точки $(m + n)$-мерного пространства, удовлетворяющие системе (II), удовлетворяют системе (I).

Вопрос о неявных функциях, заданных системой (I), в случае, когда F_s определены в пространстве Бэра и являются функциями классификации Бэра, разобран П. С. Новиковым [1]. Если каждой точке пространства $(x_1, \ldots, x_m)$ соответствует самое большое счетное множество точек пространства $(y_1, \ldots, y_n)$, удовлетворяющих системе (I), то показано, что область E существования неявных функций y_i $(i = 1, \ldots, n)$ есть B-множество и что на E существует неявная функция y_i $(i = 1, \ldots, n)$, совпадающая с однозначной функцией $\varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ классификации Бэра, всюду определенной.

В общем случае, когда не предполагается счетность указанного множества, хотя и можно выделить однозначное решение $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (I), но, вообще говоря, может не существовать решения, для которого функция φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ совпадала бы на пространстве существования с какой-либо функцией классификации Бэра, всюду определенной. Следует заметить, что в случае, разобранном

П. С. Новиковым, нет разницы между тем, когда F_s — непрерывные функции и когда они являются произвольными функциями классификации Бэра.

Частный случай поставленной здесь задачи, когда каждой точке $(x_1, \ldots, x_m)$ соответствует не более одной точки $(y_1, \ldots, y_n)$, удовлетворяющей системе (I), был исследован В. И. Гливенко ([2]). Функции $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, являющиеся решением системы (I) и названные неявно-непрерывными, таковы, что определяемая ими поверхность есть множество типа F_σ.

Мы покажем, не делая никаких предположений относительно множества точек $(y_1, \ldots, y_m)$, соответствующих точкам $(x_1, \ldots, x_m)$ и удовлетворяющих системе (I), что система (I) имеет решение (II) в точках множества E типа F_σ и что функции $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — однозначные функции первого класса. Следуя Н. Н. Лузину, мы будем говорить, что множество E *униформизирует* множество $\mathcal{E}$, лежащее в пространстве $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, относительно $(x_1, \ldots, x_n)$, если $E \subset \mathcal{E}$ и каждая точка, принадлежащая к проекции $\mathcal{E}$ в пространство $(x_1, \ldots, x_m)$ является проекцией одной и только одной точки множества E.

Множество E называется *униформизирующим* для множества $\mathcal{E}$ или униформизирующей поверхностью.

Операция выделения из $\mathcal{E}$ униформизирующего множества называется *униформизацией* множества $\mathcal{E}$. На основании работы С. Браун ([3]), где показано, что существуют замкнутые множества, которые нельзя униформизировать множеством типа F_σ, легко заключить, что функции $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ в нашем случае не являются неявно-непрерывными, рассмотренными В. И. Гливенко.

§ 1

Пусть дана система уравнений

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0\} \quad (s = 1, \ldots, p), \tag{I}$$

где F_s — непрерывные функции, определенные во всех точках замкнутой области пространства Евклида $m + n$ измерений.

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, координаты которых удовлетворяют системе (I). Так как F_s $(s = 1, \ldots, p)$ — непрерывные функции, то множество $\mathcal{E}$ есть замкнутое множество.

Обозначим через E проекцию множества $\mathcal{E}$ на пространство $(x_1, \ldots, x_m)$. Множество E является областью существования неявных функций y_i $(i = 1, \ldots, n)$, определяемых системой (I), и как проекция замкнутого множества есть множество типа F_σ.

Ясно, что однозначное решение $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (I) определяет для $\mathcal{E}$ униформизирующее множество, и обратно.

Следовательно, задача нахождения однозначного решения системы (I) сводится к задаче об униформизации замкнутого множества $\mathcal{E}$.

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда системе (I) удовлетворяют координаты точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ с y_i $(i = 1, \ldots, n)$, по модулю меньшими некоторого числа N. В этом случае множество $\mathcal{E}$,

подлежащее униформизации, будет замкнутым и ограниченным относительно осей Oy_i $(i = 1, \ldots, n)$.

ЛЕММА 1. *Замкнутое множество* $\mathcal{E}$ *пространства* $(x_1, \ldots, x_m, y)$, *ограниченное относительно оси* Oy, *можно униформизировать поверхностью, определенной уравнением* $y = f(x_1, \ldots, x_m)$, *где* $f(x_1, \ldots, x_m)$ — *полунепрерывная сверху функция, определенная на* $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m} \mathcal{E}$ *и равная в точке разрыва верхнему пределу значений функции, взятых в точках непрерывности этой функции и стремящихся к точке разрыва* $(f(p) = \overline{\lim\limits_{p_н \to p}} f(p_н))$.

Доказательство. Проведем через каждую точку $p \subset E$ прямую $D_p \parallel Oy$. В пересечении D_p с $\mathcal{E}$ получим замкнутое множество l_p. Обозначим верхнюю границу этого множества через y_{max}. Точка $P(p, y_{max}) \subset \mathcal{E}$. Совокупность так выбранных точек P определяет для $\mathcal{E}$ униформизирующую поверхность h'.

Рассмотрим функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$, определенную на множестве E и равную в точке $p \subset E$ y_{max} для l_p. Уравнение $y = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ определит ту же поверхность h'. Рассматривая лебеговские множества $E[\varphi < a]$ и $E[\varphi \geqslant a]$, легко доказать, что функция φ полунепрерывна сверху.

Определим новую функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям леммы.

Так как функция $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ полунепрерывна сверху, то в любой порции множества E найдется точка $p_{н\varphi}$, в которой функция φ непрерывна. Следовательно, в каждой неизолированной точке $p \subset E$ существует

$$\overline{\lim_{p_{н\varphi} \to p}} \varphi(p_{н\varphi}).$$

Положим функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$ равной $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ в точках $p_{н\varphi}$ непрерывности этой функции и равной $\overline{\lim\limits_{p_{н\varphi} \to p}} \varphi(p_{н\varphi})$ в точке p разрыва этой функции.

Ясно, что уравнение $y = f(x_1, \ldots, x_m)$ определяет для $\mathcal{E}$ униформизирующую поверхность h.

Покажем, что функция f непрерывна в точке p, в которой существует $\lim\limits_{p_{н\varphi} \to p} \varphi(p_{н\varphi})$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как $f(p) = \lim\limits_{p_{н\varphi} \to p} \varphi(p_{н\varphi})$, то найдется порция $\delta E \supset p$, на которой значения $f(p)$ и $\varphi(p_{н\varphi})$ лежат в полосе шириной $\frac{\varepsilon}{3}$. Пусть $p_1 \subset \delta E$ и в ней функция $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ разрывна. Из определения функции f следует, что в δE найдется такая точка $p'_{н\varphi}$, что

$$|f(p_1) - \varphi(p'_{н\varphi})| < \frac{\varepsilon}{3},$$

а так как в точках $p_{н\varphi}$ значения функций f и φ равны, то, значит, на всей порции δE значения функции f лежат в полосе шириной $< \varepsilon$ и, в силу произвольности ε, отсюда следует, что функция f непрерывна в точке p.

Очевидно, что точки непрерывности функции φ остаются точками непрерывности и функции f, но функция f может иметь новые точки непрерывности. Но все же, как легко видеть,

$$\overline{\lim_{p_{н\varphi}\to p}}\ \varphi(p_{н\varphi}) = \overline{\lim_{p_{н\varphi}\to p}}\ f(p_{н\varphi}).$$

Следовательно, значение функции f в точке p разрыва равно

$$\overline{\lim_{p_{н\varphi}\to p}}\ f(p_{н\varphi}).$$

Легко видеть, что функция f является полунепрерывной сверху функцией.

Определение 1. Точку поверхности h, определенной системой уравнений $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, назовем точкой непрерывности, если в ее проекции на $(x_1, \ldots, x_m)$ все функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ непрерывны.

Определение 2. Назовем поверхность плотной, если любая порция ее содержит точку непрерывности поверхности.

Определение 3. Порцией $(m+n)$-мерной поверхности называется часть, высеченная из нее $(m+n)$-мерным интервалом*:

$$\begin{gathered} a_1 < x_1 < b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_m < x_m < b_m \\ a_{m+1} < y_1 < b_{m+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m+n} < y_n < b_{m+n} \end{gathered}$$

Определение 4. Точку непрерывности функции f, определенной на поверхности, назовем точкой усиленной непрерывности функции f, если она является точкой непрерывности поверхности.

ЛЕММА II. *Замкнутое множество $\mathscr{E}$ пространства $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, ограниченное относительно осей Oy_i $(i = 1, \ldots, n)$, можно униформизировать плотной поверхностью.*

Доказательство. Определим функцию $f_1(x_1, \ldots, x_m)$. Пусть

$$\mathscr{E}^{y_1} = \text{пр}_{x_1,\ldots,x_m y_1} \mathscr{E}.$$

Ясно, что $\mathscr{E}^{y_1}$ — замкнутое, ограниченное относительно оси Oy_1 множество. На основании леммы I, множество $\mathscr{E}^{y_1}$ можно униформизировать поверхностью, определенной уравнением $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m)$, которая, согласно определению 2, будет плотной.

Положим, что функции $f_1, \ldots, f_{k-1}$ уже определены и что система уравнений $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$, $i = 1, \ldots, k-1$, определяет для $\text{пр}_{x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_{k-1}}\mathscr{E}$ униформизирующую плотную поверхность h. Определим функции $f_k(x_1, \ldots, x_m)$ при помощи следующего построения:

1. Возьмем замыкание $\bar{h}$ поверхности h.

---

* Иногда нам придется употреблять понятие *замкнутой* порции, т. е. порции, высеченной *замкнутым* интервалом.

2. Проведем через каждую точку множества $\overline{h}$ прямую, параллельную Oy_k, и возьмем пересечение H полученного множества с $\text{пр}_{x_1,\ldots,x_m,\, y_1,\ldots,y_k}\mathcal{E}$. Множество H — замкнутое, ограниченное относительно оси Oy_k.

3. На основании леммы I, униформизируем множество H поверхностью $y_k = \psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$.

4. Рассмотрим функцию ψ в точках поверхности h. Пусть

$$\psi(x_1, \ldots, x_m, f_1, \ldots, f_{k-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_m).$$

Система уравнений

$$y_1 = f_1, \ldots, y_{k-1} = f_{k-1}, \quad y_k = \varphi,$$

определяет для H, а следовательно, и для $\text{пр}_{x_1,\ldots,x_m\, y_1,\ldots,y_k}\mathcal{E}$ униформизирующую поверхность относительно $(x_1, \ldots, x_m)$.

5. Определим новую функцию $f_k(x_1, \ldots, x_m)$ так, чтобы система уравнений $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ определяла для $\text{пр}_{x_1,\ldots,x_m, y_1,\ldots,y_k}\mathcal{E}$ плотную униформизирующую поверхность. Покажем прежде всего, что функция φ имеет точку непрерывности в каждой порции множества E.

Пусть даны $\varepsilon > 0$ и δE. Возьмем порцию $\sigma\overline{h}$, проектирующуюся в δE. Так как функция $\psi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$ первого класса на $\overline{h}$, то найдется порция $\sigma'\overline{h} \subset \sigma\overline{h}$, на которой $\omega_{\sigma'\overline{h}}(\psi) < \varepsilon$, а следовательно, $\omega_{\sigma' h}(\psi) < \varepsilon$. В $\sigma' h$ возьмем точку P непрерывности поверхности h. Тогда в точке $p = \text{пр}_{x_1,\ldots,x_m} P$ все функции f_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ непрерывны. Ясно, что $p \subset \delta E$ и что можно выбрать порцию $\delta_1 E \supset p$ так, чтобы проектирующаяся в нее часть поверхности h лежала внутри интервала $\sigma_1 \subset \sigma'$. Тогда $\omega_{\sigma_1, h}(\psi) < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\omega_{\delta_1 E}(\varphi) < \varepsilon,$$

что требовалось доказать.

Покажем, далее, что любая порция поверхности h содержит точку усиленной непрерывности функции φ.

Пусть дана порция σh. Она содержит точку P_0 непрерывности поверхности h. Пусть

$$p_0 = \text{пр}_{x_1,\ldots,x_m} P_0 \text{ и } \delta = \text{пр}_{x_1,\ldots,x_m}\sigma.$$

Ясно, что $p_0 \subset \delta E$ и что в p_0 функции f_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ непрерывны. Следовательно, найдется такая порция $\delta' E \supset p_0$, что вся проектирующаяся в нее часть поверхности h лежит в интервале $\sigma' \subset \sigma$.

Может оказаться, что $\delta' E$ содержит изолированную точку. Тогда соответствующая точка поверхности будет искомой. Если же нет, то $\delta' E$ — порция совершенного множества и любая ее порция содержит точку, в которой все функции, определяющие h, непрерывны. Следовательно, множество точек, в которых все функции f_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ непрерывны, есть множество второй категории. Множество же точек, в которых φ непрерывна, — также второй категории. Следовательно, найдется точка $p_1 \subset \delta' E$, в которой все функции f_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ и φ непрерывны. Точка P_1 поверхности h, проектирующаяся в p_1, является точкой

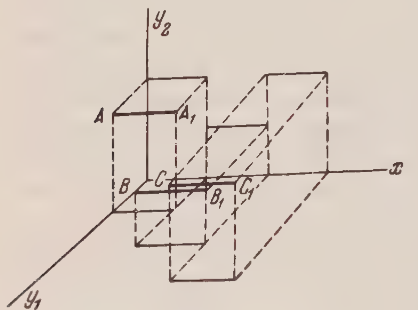
усиленной непрерывности функции φ и лежит в интервале $\sigma' \subset \sigma$, что требовалось доказать.

Определим на $\bar{h}$ функцию $\Phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$, положив ее в точке усиленной непрерывности функции φ равной значению этой функции, а в точке P, не являющейся таковой, — равной

$$\overline{\lim_{P_{\text{ус. н. }\varphi} \to P}} \varphi(P_{\text{ус. н. }\varphi}).$$

Уравнение $y_k = \Phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$ определяет для H униформизирующую поверхность относительно $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{k-1})$. Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые мы применяли в лемме I, получим, что функция Φ полунепрерывна сверху и в точке P, не являющейся точкой усиленной непрерывности функции Φ, равна

$$\overline{\lim_{P_{\text{ус. н. }\Phi} \to P}} \Phi(P_{\text{ус. н. }\Phi}).$$



Обозначим

$$\Phi(x_1, \ldots, x_m, f_1, \ldots, f_{k-1}) = \\ = f_k(x_1, \ldots, x_m).$$

Уравнения $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ определяют для $\text{пр}_{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k} \mathscr{E}$ униформизирующую поверхность h_1. Нетрудно показать, что поверхность h_1 — плотная.

Давая k последовательно значения $2, 3, \ldots, n$, получим униформизирующую для $\mathscr{E}$ плотную поверхность, определенную уравнениями $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

З а м е ч а н и е 1. Одна из полученных функций f_i $(i = 1, \ldots, n)$, а именно f_1, полунепрерывна сверху. Приведенный ниже пример показывает, что остальные функции нельзя выбрать также полунепрерывными сверху.

Пусть множество $\mathscr{E}$ определено условиями:

$$\text{на } \left[0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\right] \quad y_1 = 1, \quad y_2 = 2,$$
$$\text{на } \left[\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right] \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 1,$$
$$\text{на } \left[\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1\right] \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 2.$$

Ясно, что если функция y_1 полунепрерывна сверху, то функция y не может быть таковой, и наоборот.

ТЕОРЕМА I. *Замкнутое множество* $\mathscr{E}$ *пространства* $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, *ограниченное относительно осей* Oy_i $(i = 1, \ldots, n)$, *можно униформизировать плотной поверхностью, определенной уравнениями* $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, *где функции* f_i *определены на замкнутом множестве* $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m} \mathscr{E}$ *и первого класса на нем.*

Для доказательства нам потребуется понятие ступенчатой функции. Употребляемое нами понятие ступенчатой функции является небольшим расширением аналогичного понятия, данного Н. Н. Лузиным [см. ([4]), стр. 187].

Мы называем функцию f, заданную на замкнутом множестве P, *ступенчатой*, если P можно разбить на счетную сумму неперекрывающихся множеств e_k, каждое из которых есть разность двух замкнутых множеств, так, что на каждом e_k функция f постоянна.

Легко видеть, что ступенчатая функция f есть функция первого класса, так как для любого числа a множество $E[f > a]$ (и $E[f < a]$) точек $(x_1, \ldots, x_m)$, для которых $f(x_1, \ldots, x_m) > a$, есть множество типа F_σ.

Доказательство. Пусть дана последовательность $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots \ldots > \varepsilon_n > \ldots$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

а) Покажем, что множество $\mathcal{E}$ можно униформизировать плотной поверхностью h_1, определенной уравнениями $\{y_i = f_i'(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, для которой функции f_i' отличаются от ступенчатых на E функций $f_i'^*$ на величину $< \varepsilon_1$.

Согласно лемме II, униформизируем множество $\mathcal{E}$ плотной поверхностью h_{10}, определенной уравнениями $\{y_i = f_i^{10}(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим через E_1 множество точек, в которых колебание хотя бы одной из функций, определяющих поверхность, $\geqslant \varepsilon_1$. Множество $E_1 \subset E$ замкнуто и нигде не плотно на E. В каждой же точке множества $E - E_1$ колебание каждой из указанных функций $< \varepsilon_1$. Ясно, что часть поверхности h_{10}, проектирующаяся в $E - E_1$, остается плотной поверхностью. Часть L_{10}' множества $\bar{h}_{10}$, проектирующаяся в E_1, может быть униформизирована плотной поверхностью.

Пусть уже определены множества E_β $(\beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1)$ и для части L_{10}^β множества $\bar{h}_{10}$ — плотная униформизирующая поверхность h_{10}^β, определенная уравнениями

$$\{y_i = f_i'^\beta(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Определим E_α. Пусть E_α — множество точек $\subset E_{\alpha-1}$, в которых колебание относительно $E_{\alpha-1}$ хотя бы одной из функций $f_i'^{\alpha-1}$ $(i = 1, \ldots, n) \geqslant \varepsilon_1$. Множество E_α замкнуто и нигде не плотно на $E_{\alpha-1}$. В каждой же точке множества $E_{\alpha-1} - E_\alpha$ колебание каждой из этих функций (относительно множества $E_{\alpha-1}$) $< \varepsilon_1$. Часть поверхности $h_{10}^{\alpha-1}$, проектирующаяся в $E_{\alpha-1} - E_\alpha$, остается плотной поверхностью. Часть L_{10}^α множества $\bar{h}_{10}$, проектирующуюся в E_α, можно униформизировать плотной поверхностью (согласно лемме II).

Если α — второго рода, то полагаем E_α равным $\prod\limits_{\alpha' < \alpha} E_{\alpha'}$. Давая α последовательно значения $1, 2, 3, \ldots, \omega, \ldots$, получим последовательность замкнутых множеств $E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_\omega \supset \ldots$, каждое из которых нигде не плотно на всех предшествующих. Эта последовательность оборвется. Пусть E_γ — последнее непустое множество. Тогда

$$E = \sum_{\alpha=0}^{\gamma} (E_\alpha - E_{\alpha+1}).$$

Обозначим через $f'_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ функции, равные в точках множества $E_\alpha - E_{\alpha+1}$ значениям функций $f'^{\alpha}_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ясно, что система уравнений $\{y_i = f'_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяет для $\mathcal{E}$ униформизирующую поверхность $h_1 \subset \overline{h}_{10}$. Нетрудно видеть, что поверхность h_1 является плотной.

Покажем, что *существуют ступенчатые на E функции* f'^{*}_i $(i=1, \ldots, n)$ *такие, что*

$$|f'_i - f'^{*}_i| < \varepsilon_1 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

в каждой точке множества E.

Из построения функций f'_i $(i = 1, \ldots, n)$ следует, что колебание каждой из функций в каждой точке $p \subset E_\alpha - E_{\alpha+1}$ относительно $E_\alpha - E_{\alpha+1}$ меньше ε_1. Следовательно, $E_\alpha - E_{\alpha+1}$ можно разбить на счетное число замкнутых порций, на каждой из которых колебание каждой из функций f'_i $(i = 1, \ldots, n)$ меньше ε_1.

Положим $e^\alpha = \tilde{e}^\alpha_1$ и

$$e^\alpha_p = \tilde{e}^\alpha_p - \sum_{j<p} \tilde{e}^\alpha_j \quad \text{для} \quad p > 1.$$

Каждое e^α_p есть разность двух замкнутых множеств. Очевидно, что множества e^α_p попарно не пересекаются. Так как множеств E_α — счетное множество, то и множеств e^α_p — счетное множество. Перенумеровав их все подряд и обозначив k-е по порядку множество e^α_p через e'_k, мы увидим, что все множество E можно разбить на счетное число попарно не пересекающихся множеств e'_k, на каждом из которых колебание каждой из функций f'_i $(i=1, \ldots, n)$ меньше ε_1. Определим на E функции $f'^{*}_i(i=1, \ldots, n)$, положив f'^{*}_i равной на e'_k одному из значений f'_i на этом множестве. Функции f'^{*}_i $(i = 1, \ldots, n)$ являются ступенчатыми на E; кроме того, в каждой точке $p \subset E$

$$|f'_i(p) - f'^{*}_i(p)| < \varepsilon_1 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

б) Положим, что для $\mathcal{E}$ уже определена плотная униформизирующая поверхность h_k, определенная уравнениями

$$\{y_i = f^k_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

для которой функции f^k_i $(i = 1, \ldots, n)$ отличаются от ступенчатых на E функций f^{k*}_i на величину $< \varepsilon_k$. Положим, кроме того, что E разбивается на сумму счетного числа множеств

$$E = \sum_{j=1}^{\infty} e_{kj}$$

таких, что каждое e_{kj} есть разность двух замкнутых множеств, колебание каждой из функций f^k_i $(i = 1, \ldots, n)$ в каждой точке множества e_{kj} относительно e_{kj} меньше ε_k и что часть поверхности h_k, проектирующаяся в e_{kj}, является плотной.

Определим для $\mathscr{E}$ плотную униформизирующую поверхность h_{k+1}, заданную уравнениями $\{y_i = f_i^{k+1}(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, для которой функции f_i^{k+1} отличались бы от ступенчатых на E функций f_i^{k+1*} на величину $< \varepsilon_{k+1}$.

С этой целью замкнем множество e_{kj} и обозначим его замыкание через $\bar{e}_{kj}$. Возьмем часть h_{kj} поверхности h_k, проектирующуюся в e_{kj}, обозначим через $\bar{h}_{kj}$ замыкание взятой части и применим к множеству $\bar{h}_{kj}$ предшествующие рассуждения. Пусть $h_{k+1,j}$ — плотная униформизирующая множество $\bar{h}_{kj}$ поверхность, определенная уравнениями $\{y_i = f_i^{k+1,j}(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, a)$, и пусть f_i^{k+1*} — ступенчатые на $\bar{e}_{kj}$ функции такие, что

$$|f_i^{k+1,j} - f_i^{k+1,j*}| < \varepsilon_{k+1}$$

в каждой точке множества $\bar{e}_{kj}$. После этого вновь перейдем к множеству e_{kj}.

Аналогичные построения проведем для каждого множества e_{kj} $(j=1, 2, \ldots)$. Совокупность поверхностей $h_{k+1,j}$ образует для $\mathscr{E}$ униформизирующую поверхность $h_{k+1} \subset \bar{h}_k$.

Обозначим через f_i^{k+1} $(i = 1, \ldots, n)$ функцию, равную на e_{kj} функции $f_i^{k+1,j}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ясно, что система уравнений $\{y_i = f_i^{k+1}(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяет поверхность h_{k+1}, которая, как нетрудно показать, будет плотной.

Функции f_i^{k+1*} $(i=1, \ldots, n)$, равные на e_{kj} функциям $f_i^{k+1,j*}$ $(i=1, \ldots, n)$, будут ступенчатыми на E, и в каждой точке множества E будет справедливо неравенство

$$|f_i^{k+1} - f_i^{k+1*}| < \varepsilon_{k+1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Давая k последовательно значения $1, 2, 3, \ldots,$ получим последовательность униформизирующих множество $\mathscr{E}$ плотных поверхностей h_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

в) Определим плотную униформизирующую множество $\mathscr{E}$ поверхность h, заданную уравнениями $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$, для которой функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ были бы первого класса.

Рассмотрим последовательность

$$f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^k, \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Она равномерно сходится на E. Действительно, пусть дано $\varepsilon > 0$. Возьмем из последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots$ число $\varepsilon_k < \varepsilon$. Пусть p — какая-то точка множества E. Тогда $p \subset e_{kj}$. По построению, в каждой точке e_{kj} колебание каждой из функций f_i^k $(i = 1, \ldots, n)$ (относительно точек e_{kj}) меньше ε_k. Значит, существует порция $\delta e_{kj} \supset p$, на которой колебание функций f_i^k $(i = 1, \ldots, n)$ меньше ε_k. Следовательно, часть поверхности h_k (а значит, и $\bar{h}_k$), проектирующаяся в δe_{kj}, содержится в $(m+n)$-мерном интервале σ со сторонами, параллельными Oy_i $(i=1, \ldots, n)$, меньшими чем ε_k. Для $q > k$ часть поверхности h_q, проектирующаяся в e_{kj}, содержится в замыкании соответствующей части поверхности h_k и,

следовательно, содержится в интервале σ. Таким образом, в любой точке p будем иметь:

$$|f_i^k - f_i^q| < \varepsilon_k, \quad q > k, \quad i = 1, \ldots, n,$$

что указывает на равномерную сходимость последовательности (1) на множестве E.

Обозначим через f_i $(i = 1, \ldots, n)$ предельную функцию. Нетрудно видеть, что функция f_i $(i = 1, \ldots, n)$ является также пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых на E функций f_i^{k*}, а следовательно, f_i — первого класса на E.

Обозначим через h поверхность, определенную уравнениями

$$\{y_i = f_i\ (x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Покажем, что $h \subset \mathcal{E}$.

Возьмем точку $P \subset h$; P есть предельная для точек $P_k \subset h_k$, но поверхности h_k содержатся в h_{10} и, следовательно, в $\mathcal{E}$. Так как $\mathcal{E}$ замкнуто, то $P \subset \mathcal{E}$.

Покажем, что h является плотной поверхностью. Пусть дана порция σh. При достаточно большом значении k интервал σ будет содержать точки поверхности h_k. В порции σh_k найдется точка P непрерывности поверхности h_k. Из построения следует, что точки непрерывности поверхности h_k остаются точками непрерывности поверхности h_{k+1}, а следовательно, и h_{k+q}, где $q > 0$. В точке $p = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m} P$ будем иметь:

$$f_i^k = f_i^{k+q} \quad (q > 0;\ i = 1, \ldots, n),$$

а следовательно, f_i также равно f_i^k $(i = 1, \ldots, n)$ и $P \subset h$. Так как последовательность $f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^k, \ldots$ $(i = 1, \ldots, n)$ сходится равномерно и в точке p функции f_i^{k+q} $(q \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n)$ непрерывны, то и все функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными в точке p. Следовательно, порция σh содержит точку P, являющуюся точкой непрерывности поверхности h.

Теорема I доказана.

Определение 5. Назовем функцию $f(x_1, \ldots, x_m)$ плотной на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ в любой порции δE, содержащей точку p_0 разрыва функции, найдется точка p, в которой функция непрерывна и для которой

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА II. *Пусть* $F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ $(s = 1, \ldots, p)$ — *непрерывные функции, определенные в замкнутой области пространства Евклида* $m + n$ *измерений. Система уравнений*

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0\} \quad (s = 1, \ldots, p), \qquad \text{(I)}$$

которой удовлетворяют только числа $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, *с* y_i $(i = 1, \ldots, n)$, *по модулю меньшими некоторого числа* N, *имеет однозначное решение:*

$$\{y_i = f_i\ (x_1, \ldots, x_m)\}\ (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{(II)}$$

в точках замкнутого множества E; функции f_i $(i=2, \ldots, n)$ первого класса и плотны на E.

Доказательство. Ранее было замечено, что если $\{y_i=f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i=1, \ldots, n)$ есть система уравнений, определяющая униформизирующую поверхность для множества $\mathscr{E}$ точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (I), то функции $y_i=f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i=1, \ldots, n)$ являются решением системы (I). Нетрудно видеть, что $\mathscr{E}$ — замкнутое, ограниченное относительно осей Oy_i $(i=1, \ldots, n)$ множество. На основании теоремы I, его можно униформизировать плотной поверхностью h, определенной системой

$$\{y_i=f_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i=1, \ldots, n), \tag{II}$$

где f_i определены на замкнутом множестве $E=\text{пр}_{x_1, \ldots, x_m}\mathscr{E}$ и первого класса на E.

Покажем, что f_i $(i=1, \ldots, n)$ — плотные на E функции.

Пусть даны $\varepsilon>0$ и порция δE, содержащая точку p_0 разрыва функции f_i. Возьмем точку $P_0 \subset h$, проектирующуюся в p_0, и $(m+n)$-мерный интервал $\sigma \supset P_0$, проектирующийся в δ, со сторонами, параллельными осям Oy_i $(i=1, \ldots, n)$, по длине меньшими ε. Порция $\sigma h \supset P_1$ — точку непрерывности поверхности h. В точке $p_1=\text{пр}_{x_1, \ldots x_m}P_1$ все функции f_i $(i=1, \ldots, n)$ непрерывны и, кроме того,

$$|f_i(p_1)-f_i(p_0)|<\varepsilon, \quad i=1, \ldots, n, \quad p_1 \subset \delta E.$$

Следовательно, f_i — плотные на E функции.

Теорема доказана.

Определение 6. Решение $\{y_i=f_i\ (x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i=1, \ldots, n)$ системы

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)=0\} \quad (s=1, \ldots, p)$$

назовем *простейшим*, если для всякого другого решения

$$\{y_i=\varphi_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i=1, \ldots, n)$$

той же системы в каждой точке p области существования E выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_p(\varphi_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_p(f_i).$$

Замечание 2. *Пусть на замкнутом множестве E пространства $(x_1, \ldots, x_m)$ определены однозначные функции $f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(t=1, \ldots, n)$ первого класса, плотные на E. Тогда найдется система уравнений*

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)=0\} \quad (s=1, \ldots, p),$$

где F_s $(s=1, \ldots, p)$ — непрерывные функции в пространстве Евклида, для которой система

$$\{y_i=f_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i=1, \ldots, n)$$

является простейшим решением.

Чтобы убедиться в справедливости сделанного замечания, достаточно систему уравнений (I) выбрать так, чтобы множество точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ с координатами, удовлетворяющими ей, совпало с замыканием $\overline{h}$ поверхности h, определенной системой уравнений $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

§ 2

В этом параграфе мы рассмотрим решение системы уравнений (I) в общем случае, без ограничений, наложенных теоремой II.

ЛЕММА III. *Пусть множество* $E = \sum_{k=1}^{\infty} e_k$, $e_k \subset e_{k+1}$, *где* e_k — *замкнутые множества. Если функция* $f(p)$ *первого класса на каждой разности* $e_{k+1} - e_k$ *и на* e_1, *то она первого класса и на* E.

Доказательство. Покажем прежде всего, что f — первого класса на каждом e_k. По условию, f — первого класса на e_1. Покажем, что если f первого класса на e_k и на $e_{k+1} - e_k$, то она первого класса на e_{k+1}. Заметим, что разность $e_{k+1} - e_k$ есть сумма счетного множества замкнутых порций Δ_{k+1}^n множества e_{k+1}:

$$e_{k+1} - e_k = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_{k+1}^n .$$

Так как $f(p)$ — первого класса на e_k, то

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f_n^k(p),$$

где f_n^k — непрерывные на e_k функции. А так как f — первого класса на $e_{k+1} - e_k$, то

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n^{k+1}(p),$$

где $\tilde{f}_n^{k+1}$ — непрерывные на $e_{k+1} - e_k$ функции.

Построим функцию f_n^{k+1}, положив ее равной $\tilde{f}_n^{k+1}$ на $\sum_{i=1}^{n} \Delta_{k+1}^i$ и равной f_n^k на e_k. Так как $\sum_{i=1}^{n} \Delta_{k+1}^i$ и e_k — два замкнутых непересекающихся множества, то функция f_n^{k+1} непрерывна на их сумме. Дополним ее так, чтобы она была непрерывна всюду. Дополненную функцию будем обозначать также через f_n^{k+1}. Докажем, что последовательность непрерывных функций

$$f_1^{k+1}, \ f_2^{k+1}, \ \ldots, f_n^{k+1}, \ldots$$

сходится к f на всем e_{k+1}. Пусть $p_0 \subset e_{k+1}$. Если $p_0 \subset e_k$, то $f_n^{k+1}(p_0) = f_n^k(p_0)$ и, следовательно,

$$f(p_0) = \lim_{n\to\infty} f_n^{k+1}(p_0).$$

Пусть $p_0 \subset e_{k+1} - e_k$. Тогда найдется такое i, что $p_0 \subset \Delta_{k+1}^i$. Следовательно, в точке p_0 для $n \geqslant i$

$$f_n^{k+1}(p_0) = \tilde{f}_n^{k+1}(p_0)$$

и, значит,

$$f(p_0) = \lim_{n\to\infty} f_n^{k+1}(p_0).$$

Так как p_0 — произвольная точка множества e_{k+1}, то $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^{k+1}$ на множестве e_{k+1}.

Покажем, что последовательность

$$f_1^1(p),\ f_2^2(p), \ldots,\ f_n^n(p), \ldots$$

ходится в каждой точке множества E. Так как $p_0 \subset E$, то найдется такое k, что $p_0 \subset e_k$. Тогда, по построению, для любого n

$$f_n^k(p_0) = f_n^{k+1}(p_0) = \cdots = f_n^{k+r}(p_0) = \cdots$$

Следовательно, для $n > k$ имеем

$$f_n^n(p_0) = f_n^k(p_0),$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} f_n^n(p_0) = f(p_0).$$

Таким образом, f — первого класса на E, что требовалось доказать.

Пусть дано замкнутое множество $\mathcal{E}$ пространства $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Пусть $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m}\mathcal{E}$; поставим в соответствие каждой точке $p \subset E$ число ξ_p, равное расстоянию точки p до множества, представляющего собой пересечение множества $\mathcal{E}$ с n-мерным пространством, перпендикулярным пространству $(x_1, \ldots, x_m)$ и проходящим через точку p.

Определение 7. Точку $p_0(x_1, \ldots, x_m)$ назовем точкой неограниченности множества $\mathcal{E}$, если в любой порции δE, где $\delta \supset p$, найдутся точки, для которых ξ_p больше любого наперед заданного числа.

Определение 8. Порцию δE назовем порцией ограниченности множества $\mathcal{E}$, если для точек $p \subset \delta E$ множество чисел ξ_p ограничено.

ТЕОРЕМА III. *Замкнутое множество $\mathcal{E}$ пространства $(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ можно униформизировать поверхностью h, обладающей следующими свойствами:*

1) *функции $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, ее определяющие, заданы на множестве $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m}\mathcal{E}$ (типа F_σ) и являются функциями первого класса;*

2) *часть поверхности h, проектирующаяся в порцию ограниченности множества $\mathcal{E}$, является плотной;*

3) *множество E можно разбить на сумму счетного числа непересекающихся множеств e_k, каждое из которых есть разность двух замкнутых множеств, так что часть поверхности, проектирующаяся в e_k, является плотной.*

Определим униформизирующую поверхность для множества $\mathcal{E}$. Обрежем множество $\mathcal{E}$, полагая

$$|y_i| < N_k \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $N_k < N_{k+1}$ и $N_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Мы получим замкнутые ограниченные относительно осей Oy_i $(i = 1, \ldots, n)$ множества

$$\mathcal{E}^{N_1} \subset \mathcal{E}^{N_2} \subset \cdots \subset \mathcal{E}^{N_k} \subset \cdots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}^{N} = \mathcal{E};$$

их проекции $E^{N_1} \subset E^{N_2} \subset \cdots \subset E^{N_k} \subset \cdots$ в пространство $(x_1, \ldots, x_m)$ будут также замкнутыми множествами и

$$\sum_{k=1}^{\infty} E^{N_k} = E.$$

Множество $\mathcal{E}^{N_1}$, на основании теоремы I, униформизируем плотной поверхностью, для которой функции, ее определяющие, определены на E^{N_1} и первого класса. Положим, что для $\mathcal{E}^{N_k}$ уже определена соответствующая униформизирующая поверхность.

Определим ее для множества $\mathcal{E}^{N_{k+1}}$, проектирующегося в $E^{N_{k+1}}$.

Так как $E^{N_{k+1}} \supset E^{N_k}$, то остается доопределить униформизирующую поверхность на множестве

$$E^{N_{k+1}} - E^{N_k}.$$

Возьмем замыкание множества $E^{N_{k+1}} - E^{N_k}$. Часть множества $\mathcal{E}^{N_{k+1}}$, проектирующаяся в него, есть замкнутое, ограниченное относительно осей Oy_i $(i = 1, \ldots, n)$ множество. Униформизируем его поверхностью, согласно теореме I. Нетрудно видеть, что часть этой поверхности, проектирующаяся в $E^{N_{k+1}} - E^{N_k}$, останется плотной, а функции, ее определяющие, первого класса на этом множестве. Давая k последовательно значения $1, 2, \ldots$, получим разбиение множества E на счетное число множеств $E^{N_{k+1}} - E^{N_k}$, попарно не пересекающихся и таких, что часть множества $\mathcal{E}$, проектирующаяся в $E^{N_{k+1}} - E^{N_k}$, униформизируется плотной поверхностью, причем функции, определяющие эту поверхность,— первого класса на $E^{N_{k+1}} - E^{N_k}$. Сумма всех этих поверхностей есть поверхность h, униформизирующая $\mathcal{E}$.

На основании леммы III, функции $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$, определяющие поверхность h, являются функциями первого класса на всем E.

Заметим, что каждая порция ограниченности δE множества E входит целиком в некоторое множество E^{N_k}, поэтому часть поверхности h, проектирующаяся в эту порцию, является плотной.

Тем самым теорема доказана.

Пусть на множестве E определена система функций $\{f_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Определение 9. Назовем точку p точкой неограниченности системы функций, если для любого $\delta \supset p$ порция δE содержит точку, в которой хотя бы одна из функций системы по модулю была больше любого наперед заданного числа N.

Определение 10. Порцию $E\delta$ множества E назовем порцией ограниченности системы функций, если существует число N такое, что

$$E\delta = \varepsilon\,[\,|f_i|_{(i=1, \ldots, n)} \leqslant N\,]\,\delta.$$

ТЕОРЕМА IV. *Система уравнений*

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0\} \quad (s = 1, \ldots, p), \tag{I}$$

где F_s — непрерывные функции, определенные в замкнутой области пространства Евклида $m+n$ измерений, имеет решение

$$\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{II}$$

в точках множества E типа E_σ, причем функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ обладают следующими свойствами:

1° *они первого класса на E;*

2° *они плотны на каждой порции ограниченности;*

3° *множество E разбивается на счетное число непересекающихся множеств e_k, каждое из которых есть разность двух замкнутых множеств, на каждом из которых функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ плотные.*

Доказательство. В начале § 1 было замечено, что выделение решения системы уравнений (II) сводится к униформизации замкнутого множества $\mathcal{E}$ точек $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, координаты которых удовлетворяют системе (I). Возьмем это множество. На основании теоремы III, его можно униформизировать поверхностью, определенной уравнениями $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ со свойствами, указанными в той же теореме.

Система $\{y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m)\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ является решением системы уравнений (I). Функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ определены на $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m}\mathcal{E}$ (типа F_σ) и первого класса. Ясно, что порция ограниченности множества $\mathcal{E}$ является порцией ограниченности и системы функций f_i $(i = 1, \ldots, n)$, и обратно.

Из того, что часть униформизирующей поверхности, проектирующейся в порцию ограниченности, является плотной, следует, что на этой порции функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$ будут плотными. Таким образом, из свойств 2) и 3) поверхности (см. теорему III) следуют свойства 2° и 3° функций f_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Замечание 3. *Найденные функции f_i $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие системе* (I), *обладают следующим свойством: каково бы ни было N, точка p_0, предельная для точек $\varepsilon[|f_i|_{(i=1,\ldots,n)} \leqslant N]$, принадлежит E.*

Замечание 4. *Пусть на множестве E типа F_σ определена система однозначных функций*

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_m) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{II}$$

первого класса, плотных на каждой порции ограниченности этой системы и обладающих тем свойством, что точка p, предельная для точек множества $\varepsilon[|f_i|_{(i=1,\ldots,n)} \leqslant N]$, принадлежит E. Тогда найдется система уравнений

$$\{F_s(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) = 0\} \quad (s = 1, \ldots, p), \tag{I}$$

где F_s $(s = 1, \ldots, p)$ — непрерывные функции в пространстве Евклида, для которой система (II) *является простейшим решением.*

Чтобы убедиться в справедливости сделанного замечания, выбираем систему уравнений (I), как указано в замечании 1.

Легко видеть, что множество $E = \text{пр}_{x_1, \ldots, x_m} \bar{h}$. Это означает, что множество E служит областью существования и для всякого другого однозначного решения

$$\{y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m)\} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

системы уравнений (I).

Учитывая, что точки неограниченности и порции ограниченности заданной системы функций явятся соответственно точками неограниченности и порциями ограниченности и для системы функций φ_i $(i = 1, \ldots, n)$, приходим к выводу, что в любой точке $p \subset E$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_p(f_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_p(\varphi_i).$$

Поступило
4.VII.1953

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., Sur les fonctions implicites mesurables B, Fund. Math., XVII (1931), 8—25.
[2] Гливенко В. И., Sur les fonctions représentables implicitement par fonctions continues, Fund. Math., XIV (1929), 252—265.
[3] Braun S., Sur l'uniformisation des ensembles mesurables B, C. R. de Sci. Varsovie, XXIX (1936), 1—4.
[4] Лузин Н. Н., Теория функций действительного переменного, М.— Л., Учпедгиз, 1948.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 477—484

Б. Н. БАБКИН

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ С. А. ЧАПЛЫГИНА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе дается метод построения верхних и нижних приближений для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанный на новом варианте теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах.

Как известно, теорема о дифференциальных неравенствах, лежащая в основании метода академика С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, в общем случае для уравнений высших порядков и систем уравнений не имеет места.

Но для систем уравнений С. А. Чаплыгиным [1] был найден аналог указанной теоремы, имеющий столь же неограниченную применимость.

Основываясь на этой новой теореме, С. А. Чаплыгин дал метод построения приближений решения системы двух дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, z),$$
$$z' = \varphi(x, y, z)$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0,$$

в предположении, что функции f и φ являются монотонными по одной из переменных, а именно — первая по переменной z, вторая — по переменной y, внутри области, определенной начальной «вилкой».

В настоящей работе мы даем метод построения верхних и нижних приближений решения системы двух дифференциальных уравнений, не требуя никаких предположений о знаках f_y и φ_y. В том случае, когда f_z и φ_y будут сохранять знаки, наш алгорифм совпадает с алгорифмом С. А. Чаплыгина. Ради простоты формулировок и выкладок в работе рассматриваются системы двух уравнений, хотя результаты носят общий характер.

§ 1. Теорема о дифференциальных неравенствах

Сформулируем теорему, так же как это делает С. А. Чаплыгин, для случая системы двух уравнений.

Пусть дана система двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z) \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0.$$

Относительно функций f и φ будем предполагать, что они непрерывны вместе с частными производными первого порядка по аргументам y и z в некоторой замкнутой пространственной области D, содержащей точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$;

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Если каким-нибудь образом найдены четыре функции $u(x)$, $v(x)$, $s(x)$ и $t(x)$, принадлежащие классу $C_1[x_0, x_1]$ и удовлетворяющие следующим двум условиям:*

а) *пространственные кривые $y = u(x)$, $z = s(x)$ и $y = v(x)$, $z = t(x)$ проходят через точку M_0 и при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ целиком расположены в области D,*

б) $\dfrac{du}{dx} - f(x, u, \tau) < 0, \quad \dfrac{dv}{dx} - f(x, v, \tau) > 0$

при любых $\tau(x)$, заключенных между $s(x)$ и $t(x)$ (включая s и t),

$$\frac{ds}{dx} - \varphi(x, \sigma, s) < 0, \quad \frac{dt}{dx} - \varphi(x, \sigma, t) > 0$$

при любых $\sigma(x)$, заключенных между $u(x)$ и $v(x)$ (включая u и v) для всех x из сегмента $[x_0, x_1]$, то имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} &u(x) < y(x) < v(x), \\ &s(x) < z(x) < t(x) \text{ при } x_0 < x \leqslant x_1, \end{aligned}$$

где $y = y(x)$, $z = z(x)$ есть решение системы (1), проходящее через точку M_0.

Доказательство. В силу условий а) и б), в точке x_0 будем иметь:

$$\begin{aligned} u'(x_0) - f(x_0, y_0, z_0) &= u'(x_0) - y'(x_0) < 0, \\ v'(x_0) - f(x_0, y_0, z_0) &= v'(x_0) - y'(x_0) > 0, \\ s'(x_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0) &= s'(x_0) - z'(x_0) < 0, \\ t'(x_0) - \varphi(x_0, y_0, z_0) &= t'(x_0) - z'(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Тогда при непрерывности всех рассматриваемых функций в некоторой окрестности справа от точки x_0 будут справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} &u(x) < y(x) < v(x), \\ &s(x) < z(x) < t(x). \end{aligned}$$

Нам надо показать, что эти неравенства будут иметь место на всем интервале (x_0, x_1).

Допустим противное, т. е. что эти неравенства нарушаются внутри рассматриваемого интервала. Пусть $\bar{x}$ есть первая из точек (после x_0)

этого интервала, где нарушается хотя бы одно из четырех неравенств. Пусть, например, $u(\bar{x}) = y(\bar{x}) = \bar{y}$ и $t(\bar{x}) = z(\bar{x}) = \bar{z}$, а два других неравенства остаются в точке x справедливыми.

В силу условия б), в точке $\bar{x}$ должны иметь место следующие неравенства:

$$u'(\bar{x}) - f(\bar{x}, \bar{y}, \tau) < 0,$$
$$t'(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}, \sigma, \bar{z}) > 0.$$

Первое неравенство должно быть справедливым при любых $\tau \in [s(\bar{x}), t(\bar{x})]$ и, следовательно, при $\tau = \bar{z}$, так как $\bar{z} = t(\bar{x})$, а второе — при любых $\sigma \in [u(\bar{x}), v(x)]$ и, следовательно, при $\sigma = \bar{y}$, так как $\bar{y} = u(\bar{x})$.

Таким образом, в точке $\bar{x}$ будем иметь:

$$u'(\bar{x}) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = u'(\bar{x}) - y'(\bar{x}) < 0,$$
$$t'(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = t'(\bar{x}) - y'(\bar{x}) > 0.$$

С другой стороны, в силу нашего допущения, в точке $\bar{x}$ мы должны иметь противоположные неравенства:

$$u'(\bar{x}) \geqslant y'(\bar{x}), \quad z'(x) \geqslant t'(\bar{x}).$$

Полученное противоречие доказывает, что x не может принадлежать полуинтервалу $(x_0, x_1]$ и, следовательно, неравенства

$$u(x) < y(x) < v(x), \quad s(x) < z(x) < t(x)$$

будут справедливыми на всем этом полуинтервале.

Основная теорема доказана.

Отметим один класс систем уравнений, для которого теорема о дифференциальных неравенствах будет справедливой и в старой формулировке.

Нетрудно видеть, что если функции f и φ в рассматриваемой области имеют положительные производные f_z' и φ_y', то выполнение неравенств

$$\frac{du}{dx} - f(x, u, s) < 0, \quad \frac{ds}{dx} - \varphi(x, u, s) < 0,$$
$$\frac{dv}{dx} - f(x, v, t) > 0, \quad \frac{dt}{dx} - \varphi(x, v, t) > 0$$

на $[x_0, x_1]$ влечет за собой выполнение условия б) предыдущей теоремы и, следовательно, справедливость теоремы о дифференциальных неравенствах для рассматриваемого класса уравнений в первоначальной формулировке.

Хотя вопрос о построении функций u, v, s и t, удовлетворяющих основным неравенствам, С. А. Чаплыгиным и не рассматривается, в принципе это можно сделать так же, как он предлагает в случае одного уравнения.

Действительно, рассматривая верхние и нижние границы функций f и φ в области $\bar{D}$, мы можем построить четыре функции $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $\varphi_1(x, z)$ и $\varphi_2(x, z)$, удовлетворяющие неравенствам:

$$f_1(x, y) < f(x, y, z) < f_2(x, y), \quad \varphi_1(x, z) < \varphi(x, y, z) < \varphi_2(x, z).$$

Тогда, решая уравнения

$$u'(x) = f_1(x, u), \quad v'(x) = f_2(x, y), \quad u(x_0) = v(x_0) = y_0,$$
$$s' = \varphi_1(x, s) \qquad t' = \varphi_2(x, t), \quad s(x_0) = t(x_0) = z_0,$$

мы получим четыре функции, удовлетворяющие условиям основной теоремы.

§ 2. Построение и сходимость приближений

Допустим, что мы имеем четыре функции $u(x)$, $v(x)$, $s(x)$ и $t(x)$, удовлетворяющие условиям основной теоремы. Требуется аппроксимировать решение системы (1) $y = y(x)$, $z = z(x)$ с заданной степенью точности.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_0(x) = \min_{s(x) \leqslant z \leqslant t(x)} [f(x, u, z) - u'],$$
$$\beta_0(x) = \min_{u(x) \leqslant y \leqslant v(x)} [\varphi(x, y, s) - s'],$$
$$\gamma_0(x) = \min_{s(x) \leqslant z \leqslant t(x)} [v' - f(x, v, z)],$$
$$\delta_0(x) = \min_{u(x) \leqslant y \leqslant v(x)} [t' - \varphi(x, y, t)];$$

через K обозначим наибольший из $\max \{|f'_y|, |f'_z|, |\varphi'_y|, |\varphi'_z|\}$ в области $\overline{D}$.

Составим уравнения для определения первой четверки приближений $[u_1, v_1,; s_1, t_1]$:

$$\begin{aligned} (u_1 - u)' + K(u_1 - u) - \alpha_0(x) &= 0, \\ (s_1 - s)' + K(s_1 - s) - \beta_0(x) &= 0, \\ (v_1 - v)' + K(v_1 - v) + \gamma_0(x) &= 0, \\ (t_1 - t)' + K(t_1 - t) + \delta_0(x) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u_1(x_0) = v_1(x_0) = y_0; \quad s_1(x_0) = t_1(x_0) = z_0.$$

Покажем, что найденные из этих уравнений четыре функции $u_1(x)$, $s_1(x)$, $v_1(x)$, $t_1(x)$, давая лучшее приближение искомого решения системы (1), чем начальная четверка, удовлетворяют на интервале (x_0, x_1) основным дифференциальным неравенствам.

Легко видеть справедливость неравенств

$$u_1 - u > 0, \quad s_1 - s > 0, \quad v_1 - v < 0, \quad t_1 - t < 0,$$

следующих из положительности функций $\alpha_0(x)$, $\beta_0(x)$, $\delta_0(x)$, $\gamma_0(x)$.

Покажем, что, кроме этих неравенств, имеют место еще и следующие:

$$u_1 < v, \quad s_1 < t, \quad v_1 > u, \quad t_1 > s,$$

обеспечивающие требующиеся нам соотношения принадлежности:

$$[u_1, v_1,] \subset [u, v]; \quad [s_1, t_1] \subset [s, t].$$

Чтобы установить указанные выше неравенства, воспользуемся теоремой о дифференциальных неравенствах (для одного уравнения), применив ее к уравнениям (2).

Установим, например, первое из этих неравенств.

Подставим в первое из уравнений (2) вместо $u_1(x)$ функцию $v(x)$:

$$(v-u)'+K(v-u)-\alpha_0(x)=v'+K(v-u)-f(x,u,\tilde{\tau}), \tag{3}$$

где

$$\tilde{\tau}(x)\in[s(x),t(x)].$$

В силу неравенства $v'-f(x,v,\tau)>0$, справедливого при любых $\tau(x)\in[s(x),t(x)]$, равенство (3) можно заменить следующим неравенством:

$$(v-u')+K(v-u)-\alpha_0(x)>$$
$$>f(x,v,\tilde{\tau})+K(v-u)-f(x,u,\tilde{\tau})=(v-u)(K+\tilde{f}'_y)>0,$$

где

$$\tilde{f}'_y=f'_y[x,u+\theta(v-u),\tilde{\tau}],\quad 0<\theta<1.$$

Отсюда и следует, что $v>u_1$.

Аналогично устанавливаются и остальные три неравенства:

$$s_1<t,\quad v_1>u,\quad t_1>s.$$

Остается показать справедливость основных дифференциальных неравенств для четверки $[u_1,\ v_1;\ s_1,\ t_1]$ и тем самым установить, что функции $u_1(x)$ и $s_1(x)$ будут нижними, а $v_1(x)$ и $t(x)$ — верхними.

Для этого рассмотрим разности

$$u_1'-f(x,u_1,z),\quad v_1'-f(x,v_1z)\ \text{ при }\ s_1(x)\leqslant z\leqslant t_1(x),$$
$$s_1'-\varphi(x,y,s_1),\quad t_1'-\varphi(x,y,t_1)\ \text{ при }\ u_1(x)\leqslant y\leqslant v_1(x).$$

Пользуясь уравнениями (2) и теоремой о среднем, представим предыдущие разности в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&u_1'-f(x,u_1,z)=(u_1-u)'+u'-f(x,u_1,z)=\alpha_0(x)-K(u_1-u)+\\
&+u'-f(x,u_1,z)=\alpha_0(x)-K(u_1-u)+u'-f(x,u,z)+f(x,u,z)-\\
&\qquad-f(x,u_1,z)=[\alpha_0(x)+u'-f(x,u,z)]-(u_1-u)[K+\\
&\qquad\qquad+f_y'(x,u+\theta_1(u_1-u),z)],\\
&v_1'-f(x,v_1,z)=[-\gamma_0(x)+v'-f(x,v,z)]+\\
&\qquad+(v-v_1)[K+f_y'(x,v_1+\theta_2(v-v_1),z)],\\
&s_1'-\varphi(x,y,s_1)=[\beta_0(x)+s'-f(x,y,s)]-\\
&\qquad-(s_1-s)[K+\varphi_z'(x,y,s+\theta_3(s_1-s))],\\
&t_1'-\varphi(x,y,t_1)=[-\delta_0(x)+t'-\varphi(x,y,t)]+\\
&\qquad+(t-t_1)[K+\varphi_z'(x,y,t+\theta_4(t-t_1))],
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $0<\theta_i<1$ $(i=1,2,3,4)$.

В силу установленных выше неравенств:

$$u_1-u>0,\quad v-v_1>0,\quad s_1-s>0,\quad t_1-t>0,$$

из равенств (4) и следует справедливость основных дифференциальных неравенств на (x_0, x_1) для построенных первых приближений.

Таким образом установлено, что приближения u_1, v_1, s_1 и t_1, определенные из уравнений (2), обладают на (x_0, x_1) следующими свойствами:

$$1)\quad u(x) < u_1(x) < y(x) < v_1(x) < v(x),$$
$$s(x) < s_1(x) < z(x) < t_1(x) < t(x),$$
$$2)\quad \frac{du_1}{dx} - f(x, u_1, z) < 0,$$
$$\frac{dv_1}{dx} - f(x, v_1 z) > 0 \text{ при } z \in [s_1(x), t_1(x)],$$
$$\frac{ds_1}{dx} - \varphi(x, y, s_1) < 0,$$
$$\frac{dt_1}{dx} - \varphi(x, y, t_1) > 0 \text{ при } y \in [u_1(x), v_1(x)].$$

Продолжая указанные построения при помощи уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(u_{n+1} - u_n)' + K(u_{n+1} - u_n) - \alpha_n(x) = 0,\\ &(s_{n+1} - s_n)' + K(s_{n+1} - s_n) - \beta_n(x) = 0,\\ &(v_{n+1} - v_n)' + K(v_{n+1} - v_n) + \gamma_n(x) = 0,\\ &(t_{n+1} - t_n)' + K(t_{n+1} - t_n) + \delta_n(x) = 0,\\ &u_{n+1}(x_0) = v_{n+1}(x_0) = y_0, \quad s_{n+1}(x_0) = t_{n+1}(x_0) = z_0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\alpha_n(x) = \min_{s_n(x) \leqslant z \leqslant t_n(x)} [f(x, u_n, z) - u_n'],$$

$$\beta_n(x) = \min_{u_n(x) \leqslant y \leqslant v_n(x)} [\varphi(x, y, s_n) - s_n'],$$

$$\gamma_n(x) = \min_{s_n(x) \leqslant z \leqslant t_n(x)} [v_n' - f(x, v_n, z)],$$

$$\delta_n(x) = \min_{u_n(x) \leqslant y \leqslant v_n(x)} [t_n' - \varphi(x, y, t_n)],$$

получим последовательность четверок $\{[u_n, v_n; s_n, t_n]\}$, все теснее и теснее охватывающих искомое решение $y = y(x)$, $z = z(x)$.

Покажем, что построенные приближения сходятся к искомому решению и, следовательно, аппроксимируют его с любой степенью точности.

Для этого достаточно показать справедливость следующих двух равенств:

$$\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} (t_n - s_n) = 0.$$

С этой целью разности $v_n - u_n$ и $t_n - s_n$ представим предварительно в наиболее удобном для исследования виде.

Из уравнения (2) найдем:

$$u_1 - u = \int_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} \alpha_0(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} [f(t, u, \bar{z}) - u']\, dt,$$

$$v_1 - v = -\int_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} [v' - f(t, v, \bar{\bar{z}})]\, dt,$$

где $\bar{z}$ и $\bar{\bar{z}}$ — некоторые числа из сегмента $[s(x), t(x)]$.

После одной интеграции по частям предыдущие равенства можно представить в следующем виде:

$$u_1 = y_0 e^{-K(x-x_0)} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} [f(t, u, \bar{z}) + Ku]\, dt,$$

$$v_1 = y_0 e^{-K(x-x_0)} - \int\limits_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} [f(t, v, \bar{\bar{z}}) + Kv]\, dt.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим:

$$v_1 - u_1 = \int\limits_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} [f(t, v, \bar{\bar{z}}) - f(t, u, \bar{z})]\, dt + K \int\limits_{x_0}^{x} e^{-K(x-t)} (v - u)\, dt.$$

Принимая во внимание очевидные неравенства

$$e^{-K(x-t)} \leqslant 1, \quad |\bar{z} - \bar{\bar{z}}| < t - s,$$

из предыдущего равенства найдем:

$$v_1 - u_1 < K \int\limits_{x_0}^{x} [(v-u) + (t-s)]\, d\alpha + K \int\limits_{x_0}^{x} (v-u)\, d\alpha <$$

$$< 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v-u) + (t-s)]\, d\alpha \quad \text{при} \quad x_0 < x \leqslant x_1.$$

Совершенно так же получим:

$$t_1 - s_1 < 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v-u) + (t-s)]\, d\alpha.$$

Теперь легко видеть, что будут иметь место аналогичные неравенства и для следующих разностей:

$$v_2 - u_2 < 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v_1 - u_1) + (t_1 - s_1)]\, d\alpha,$$

$$t_2 - s_2 < 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v_1 - u_1) + (t_1 - s_1)]\, d\alpha,$$

. . . .

. . . .

$$v_n - u_n < 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v_{n-1} - u_{n-1}) + (t_{n-1} - s_{n-1})]\, d\alpha,$$

$$t_n - s_n < 2K \int\limits_{x_0}^{x} [(v_{n-1} - u_{n-1}) + (t_{n-1} - s_{n-1})]\, d\alpha,$$

. . . .

Если через η_0 обозначить $\max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} [v(x) - u(x) + t(x) - s(x)]$, то из написанных выше неравенств получим следующие оценки для рассматриваемых разностей:

$$v_1 - u_1 < 2K\eta_0(x - x_0), \quad t_1 - s_1 < 2K\eta_0(x - x_0),$$
$$v_2 - u_2 < 2K \cdot 4K\eta_0 \frac{(x - x_0)^2}{2!} = \frac{1}{2}\eta_0 (4K)^2 \frac{(x - x_0)^2}{2!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$v_n - u_n < \frac{1}{2}\eta_0 (4K)^n \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$
$$t_n - s_n < \frac{1}{2}\eta_0 (4K)^n \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Полученные оценки и доказывают, что на рассматриваемом сегменте $[x_0, x_1]$ имеют место необходимые нам равенства:

$$\lim_{n \to \infty} (v_n - u_n) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} (t_n - s_n) = 0.$$

Поступило
8. VI. 1951

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чаплыгин С. А., Собр. соч., т. 1, М., ОГИЗ, 1948 г.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 485—524

П. С. НОВИКОВ

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ СОПРЯЖЕННОСТИ В ТЕОРИИ ГРУПП

В работе строится группа с конечным числом образующих и заданная конечным числом определяющих соотношений, для которой не существует алгоритма для решения проблемы сопряженности слов этой группы.

Введение

Целью настоящей работы является доказательство неразрешимости проблемы сопряженности для групп с конечным числом образующих, заданных конечным числом определяющих соотношений. Проблема заключается в следующем: найти алгоритм, позволяющий узнавать для каждых двух элементов группы, заданных в виде произведения образующих, сопряжены они или нет.

В работе (1) мною была построена группа с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, для которой проблема тождества неразрешима*. Для этой группы тривиальным образом является неразрешимой и проблема сопряженности.

В настоящей работе дается непосредственное доказательство неразрешимости проблемы сопряженности, которое значительно проще, чем в работе (1). Кроме того, у построенной здесь группы с неразрешимой проблемой сопряженности число образующих и число определяющих соотношений во много раз меньше, чем у группы, для которой в работе (1) была доказана неразрешимость проблемы тождества. Это обстоятельство имеет значение для тех геометрических приложений, которые можно извлечь из полученных результатов. В работе (2) определены некоторые системы преобразования слов, которые получили название *систем продукций*. Эти системы определяются следующим образом. Рассматривается определенная совокупность букв (или других символов), которая называется *алфавитом* системы, и произвольная конечная совокупность пар слов (A_i, B_i), $i = 1, \ldots, \lambda$, составленных из этих букв. Можно предполагать, что букв, не входящих в слова A_i и B_i, в алфавите нет.

Преобразования слов в системе продукций осуществляются по схемам:

$$A_iX \to XB_i, \quad XB_i \to A_iX,$$

где X — любое слово из букв алфавита.

* Полное доказательство см. в «Трудах Математического института им. Стеклова» т. 44.

Преобразования по этим схемам называются *продукциями*. Системы продукций такого типа мы будем называть *двусторонними*, в отличие от односторонних продукций, где преобразования производятся по схемам $A_iX \to XB_i$. Нам будут нужны двусторонние схемы. Если слово X может быть переработано в слово Y преобразованиями по указанным схемам, то мы будем говорить, что они *равны в данной системе продукций*.

Если условиться, что слово равно самому себе в системе продукций, то введенное равенство симметрично, рефлексивно и транзитивно. Мы будем изображать это равенство обычным знаком $=$, указывая только, что оно имеет место в той или иной системе продукций. Легко видеть, что система продукций вполне определяется заданием пар (A_i, B_i). Пост показал [см. ([2]), ([3])], что существует система продукций, для которой нет алгоритма, позволяющего узнавать для любых двух слов, равны они в этой системе продукций или нет. Такая система продукций строится конкретным образом. А. А. Марков ([4]) построил двустороннюю систему продукций с неразрешимой проблемой тождества.

Доказательство неразрешимости проблемы сопряженности опирается на этот результат. Именно, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Какова бы ни была система продукций $\mathfrak{P}$, существует группа $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений такая, что каждому слову $X \in \mathfrak{P}$ можно поставить в соответствие слово $\Phi(X) \in \mathfrak{A}$, причем соответствие Φ обладает следующими свойствами:*

1. *Существует алгоритм, позволяющий по слову X построить слово $\Phi(X)$.*

2. *Если слова X и Y равны (не равны) в системе продукций $\mathfrak{P}$, то слова $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ соответственно сопряжены (не сопряжены) в группе $\mathfrak{A}$.*

При этом группа $\mathfrak{A}$ может быть эффективно построена по системе продукций $\mathfrak{P}$.

Эта теорема решает поставленный вопрос, так как для группы $\mathfrak{A}$, соответствующей системе продукций с неразрешимой проблемой равенства слов, будет неразрешима проблема сопряженности.

Введем некоторые понятия, термины и символы, которые будут употребляться в дальнейшем.

Как известно, совокупность образующих элементов группы можно разбить на две равные по числу элементов части так, что для каждого элемента одной части существует обратный ему элемент другой части.

В дальнейшем мы будем рассматривать группы только с конечным числом образующих. Элементы одной из этих двух частей будем обозначать малыми латинскими буквами

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ p,\ x,$$

а обратные им элементы, составляющие вторую часть, будем обозначать теми же буквами с показателем -1:

$$a^{-1},\ b^{-1},\ c^{-1},\ \ldots,\ p^{-1},\ \ldots,\ x^{-1}.$$

Символы a^{-1}, $b^{-1}, \ldots$ будем называть тоже буквами.

Назовем *алфавитом* любую совокупность букв вида:

$$a_1, \ldots, a_m, \qquad a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}.$$

Часть алфавита $a_1, \ldots, a_m$ назовем *положительным* алфавитом, а часть $a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}$ — *отрицательным*. Произвольную букву алфавита мы будем обозначать в виде x^σ или x^δ, где σ и δ обозначают $+1$ или -1. При этом мы условимся, что x^{+1} есть x. Таким образом система букв, посредством которых мы обозначаем образующие группы, представляет собой алфавит. Совокупность букв вида x^σ, где $\sigma = +1$, образует положительный алфавит группы, а совокупность букв того же вида, где $\sigma = -1$, образует отрицательный алфавит группы.

Рассмотрим произвольный элемент какой-либо группы X, представленный в виде произведения образующих. Его изображение представляет собой слово, составленное из букв определенного алфавита. Каждое такое слово имеет вид

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}.$$

Будем обозначать через X^{-1} слово

$$x_n^{-\sigma_n} x_{n-1}^{-\sigma_{n-1}} \ldots x_1^{-\sigma_1}.$$

Мы введем также пустое слово, которое будем обозначать символом 1.

Каждое непустое слово является конечной последовательностью букв. Каждая буква, входящая в слово как член последовательности, имеет определенный номер по счету от начала слова. Так, например, в слове $abac^{-1}d^{-1}$ первой буквой является a, второй — b, третьей — опять a и т. д.

Буквы, входящие в слово, помимо того, что они являются элементами алфавита, могут быть рассмотрены как члены этой последовательности. Мы будем называть буквы *одноименными*, если они представляют собой один и тот же элемент алфавита (иначе говоря, одноименные буквы одинаковы по написанию).

Назовем слова *тождественными*, если они имеют одинаковое число букв и буквы обоих слов одного и того же номера одноименны. Тождественность слов X и Y мы будем обозначать символом: $X \equiv Y$. Назовем буквы, заключенные в тождественных словах, тождественными в этих словах, если они имеют один и тот же номер.

Из этих определений следует, что каждое слово тождественно самому себе, а буквы, заключенные в слове, тождественны только самим себе. Одноименные буквы слова с различными номерами не являются тождественными.

Как мы указывали, всякое слово есть последовательность букв. Назовем подпоследовательность этой последовательности *подсловом*. Тождественность подслов и тождественность букв в тождественных подсловах определяются аналогично предыдущему: каждое слово может быть перенумеровано слева направо; назовем подслова в разных словах или в одном слове тождественными, если их члены с одинаковыми номерами (приписанные им как членам подпоследовательности) одноименны.

Назовем буквы, заключенные в тождественных подсловах, тождественными в этих подсловах, если они имеют в них одинаковые номера. Подслово

слова X, состоящее из всех букв, заключенных между двумя буквами слова X (включая и сами эти буквы), назовем *отрезком* слова X.

Групповую операцию над элементами группы мы будем называть, как обычно, *умножением*, перемножаемые элементы — *множителями*, а результат — *произведением*. Если элементы группы представлены в форме слов X и Y, то произведение этих элементов представляется в виде соединения слов X и Y в слово XY. В этом слове множители X и Y являются одновременно и отрезками.

Слова X и Y, представляющие равные элементы некоторой группы, будем называть *равными в этой группе*, и это равенство будем изображать в виде $X = Y$.

В дальнейшем всюду при употреблении знака равенства будет указываться группа, в которой имеет место равенство.

Рассмотрим группу с конечным числом образующих, т. е. с конечным алфавитом, заданную определяющими соотношениями

$$A_i = B_i$$

в конечном или бесконечном числе. Как известно, вывод равенства слов в группе может осуществляться в виде переработки слов, состоящей в ряде последовательных преобразований одного слова в другое. Каждое из этих преобразований является переходом от слова вида XA_iY к слову XB_iY и обратно, где X и Y — любые слова группы. Эти основные преобразования мы будем называть *элементарными* и представлять их в виде схем:

$$XA_iY \to XB_iY,$$
$$XB_iY \to XA_iY.$$

Будем называть приведенные схемы *схемами определяющих соотношений*.

Легко видеть, что задание схем определяющих соотношений делает излишним задание самих определяющих соотношений. Ради удобства мы будем в дальнейшем определять группы заданием определяющих соотношений, за исключением тех из них, которые тривиальны и имеют вид

$$a^{-1}a = 1 \text{ и } aa^{-1} = 1.$$

При этом, конечно, сохраняются схемы преобразований этих соотношений. К элементарным преобразованиям группы мы присоединим еще тавтологические, представляющие замену слова тождественным. Схемы этих преобразований имеют вид:

$$X \to X.$$

Полный список схем элементарных преобразований группы, заданной определяющими соотношениями $A_i = B_i$, имеет вид:

$$\left.\begin{array}{ccc} XA_iY \to XB_iY, & Xa^{-1}aY \to XY, & Xaa^{-1}Y \to XY, \\ XB_iY \to XA_iY, & XY \to Xa^{-1}aY, & XY \to Xaa^{-1}Y, \\ & X \to X, & \end{array}\right\} \quad (1)$$

где a — любая буква положительного алфавита.

Назовем преобразования вида

$$XY \to Xa^{-1}aY$$

правосторонними вставками, преобразования вида

$$XY \to Xaa^{-1}Y$$

— *левосторонними вставками*. Обратные им преобразования назовем соответственно *правосторонними сокращениями* и *левосторонними сокращениями*.

Каждое элементарное преобразование имеет вид:

$$XRY \to XSY.$$

Будем говорить, что буква слова XRY, входящая в отрезок R слова XRY, *подвергается преобразованию* $XRY \to XSY$ или *затрагивается* этим преобразованием, а буква, входящая в отрезки X или Y слова XRY, не подвергается данному преобразованию или не затрагивается им.

Будем говорить, что отрезок слова XRY, содержащий какую-либо букву отрезка R, подвергается этому преобразованию или затрагивается им, а отрезок слова XRY, не содержащий никакой буквы отрезка R, не подвергается данному преобразованию или не затрагивается им.

Рассмотрим отрезок слова XRY, содержащий отрезок R. Для того чтобы представить такой отрезок, выразим слово XRY в виде $X'uRvY'$, а рассматриваемый отрезок — в виде uRv. Будем говорить, что в преобразовании $XRY \to XSY$ отрезок uRv переходит в отрезок uSv и что преобразование $XRY \to XSY$ происходит только в отрезке uRv. Мы будем иногда, для краткости (если это не сможет вызвать недоразумения), преобразование $XRY \to XSY$ писать в виде $uRv \to uSv$.

Если слова P и Q равны в некоторой группе, заданной определяющими соотношениями или, что то же, схемами преобразований указанного типа, то это значит, что P переводится в Q последовательностью элементарных преобразований вида

$$X_1R_1Y_1 \to X_1S_1Y_1,\ X_2R_2Y_2 \to X_2S_2Y_2, \ldots, X_mR_mY_m \to X_mS_mY_m,$$

где

$$P \equiv X_1R_1Y_1, \quad X_1S_1Y_1 \equiv X_2R_2Y_2, \ldots, X_{m-1}S_{m-1}Y_{m-1} \equiv X_mR_mY_m,$$
$$X_mS_mY_m \equiv Q.$$

Эту последовательность преобразований мы будем записывать короче в виде цепочки

$$P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_m,$$

где

$$P_j \equiv X_jR_jY_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

и условимся, что переход $P_j \to P_{j+1}$ есть кратко записанное преобразование

$$X_jR_jY_j \to X_jS_jY_j.$$

Иными словами, мы будем всегда считать, что при записи элементарного перехода $P_j \to P_{j+1}$ задается и схема этого перехода.

Как известно, элементы групп X и Y называются *сопряженными*, если существует некоторый элемент C такой, что

$$Y = C^{-1}XC.$$

Если группа задана образующими и определяющими соотношениями, то переход от слова X к сопряженному слову Y может быть осуществлен преобразованиями по определенным схемам. В числе этих схем содержатся все схемы элементарных преобразований группы (1), но к ним добавляются еще схемы преобразований, являющиеся *круговыми перестановками*. Полный список схем преобразований для перевода слова в слово, ему

сопряженное для группы $\mathfrak{A}$ с определяющими соотношениями $A_i = B_i$, таков:

$$\left.\begin{array}{c} XA_iY \to XB_iY, \quad XY \to Xa^{-1}aY, \quad XY \to Xaa^{-1}Y, \\ XB_iY \to XA_iY, \quad Xa^{-1}aY \to XY, \quad Xaa^{-1}Y \to XY, \\ X \to X, \quad a^{\sigma}X \to Xa^{\sigma}. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Здесь X и Y — любые слова группы и a — любая буква положительного алфавита группы. Систему отношений между словами, определенную преобразованиями по схемам (2), мы будем называть *системой сопряженностей*, соответствующей группе $\mathfrak{A}$. Преобразования по схемам (2) будем называть *элементарными преобразованиями данной системы сопряженностей*. Для системы сопряженности естественно не различать слова, получаемые друг из друга круговой перестановкой. Мы будем называть слова X и Y *тождественными в системе сопряженностей*, если они получаются одно из другого круговой перестановкой. Для обозначения тождественности в системе сопряженностей введем обозначение

$$X \approxeq Y,$$

а для сопряженности слов X и Y — обозначение

$$X \sim Y.$$

Слова, равные в свободной группе с некоторым алфавитом, равны в свободной группе с любым алфавитом, содержащим все буквы этих слов. Поэтому термин *равенство слов в свободной группе* можно употреблять безотносительно к определенной группе. Все элементарные преобразования системы сопряженностей имеют тот же вид, что и элементарные преобразования группы

$$XRY \to XSY.$$

Все схемы (2), за исключением последней, принадлежат группе и имеют вид

$$XRY \to XSY.$$

Последняя схема имеет вид

$$a^{\sigma}X \to Xa^{\sigma}.$$

Рассмотрим произвольную последовательность преобразований по этим схемам, переводящую Q_0 в Q_m. Как и для группы, мы будем записывать эту последовательность в виде

$$Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_m,$$

считая, что при записи перехода $Q_j \to Q_{j+1}$ имеется в виду точное указание той схемы (2), по которой он осуществляется.

Мы, однако, можем условиться не различать в последовательности преобразований слова, получающиеся друг из друга круговыми перестановками. Тогда мы не будем различать и преобразования вида

$$AXRY \to AXSY$$

и

$$XRYA \to XSYA.$$

Назовем преобразования

$$AXRY \to AXSY \text{ и } XRYA \to XSYA$$

тождественными в системе сопряженностей. В таком случае мы можем исключить из последовательности элементарных преобразований системы сопряженностей преобразования по схеме $aX \to Xa$, но зато считать, что любое преобразование вида

$$XRY \to XSY$$

заменимо любым преобразованием, тождественным данному в системе сопряженностей.

Такое рассмотрение слов и преобразований соответствует тому, что мы преобразуемые слова записываем на круге и уславливаемся преобразуемые отрезки прочитывать в определенном направлении, например по часовой стрелке. В тексте мы не будем записывать слова на круге, но будем пользоваться этим представлением для различных пояснений.

Будем называть элементарные преобразования, в которых мы не различаем тождественных в системе сопряженностей преобразований, *преобразованиями на круге.* Как и выше, термин «*сопряженность в свободной группе*» мы будем употреблять безотносительно к определенной группе.

Назовем слово *несократимым*, если в нем нет рядом стоящих взаимно обратных букв a и a^{-1}. Это значит, что к этому слову нельзя применять преобразования сокращения.

Назовем слово *сильно несократимым*, если оно само и любое слово, полученное из него круговой перестановкой, несократимо.

§ 1. Проекции и тождество букв по индивидуальности

Рассмотрим произвольную группу $\mathfrak{A}$ с определенным алфавитом A. Пусть P есть алфавит, составляющий часть алфавита A, а X — произвольное слово, состоящее из букв алфавита A. Назовем *проекцией слова X на алфавит P* слово, полученное из X вычеркиванием всех букв, кроме букв алфавита P. Обозначим проекцию слова X на алфавит P через $(X)_P$.

Пусть $X = Y$ — формально написанное равенство слов X и Y, составленных из букв алфавита A. Назовем равенство $(X)_P = (Y)_P$ *проекцией равенства $X = Y$ на алфавит P.*

Каждая схема элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$$XRY \to XSY,$$

где X и Y—произвольные слова из букв алфавита A. Назовем преобразование

$$(X)_P(R)_P(Y)_P \to (X)_P(S)_P(Y)_P$$

проекцией преобразования $XRY \to XSY$ на алфавит P. Слова $(X)_P$ и $(Y)_P$ являются любыми словами из букв алфавита P. В преобразованиях системы сопряженностей имеется еще преобразование вида $a^\sigma X \to Xa^\sigma$. Тогда $(a^\sigma X)_P \to (Xa^\sigma)_P$ представляет собой либо тавтологическое преобразование, либо опять преобразование вида $a^\sigma(X)_P \to (X)_P a^\sigma$; назовем преобразование $(a^\sigma X)_P \to (Xa^\sigma)_P$ проекцией преобразования $a^\sigma X \to Xa^\sigma$ на алфавит P.

Пусть определяющими соотношениями группы $\mathfrak{A}$ являются равенства

$$A_i = B_i.$$

Группу с алфавитом P и определяющими соотношениями

$$(A_i)_P = (B_i)_P$$

назовем *проекцией группы* $\mathfrak{A}$ *на алфавит* P и обозначим через $(\mathfrak{A})_P$.

Пусть $Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_m$ — последовательность элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$ или системы сопряженностей этой группы. Тогда каждый переход $Q_j \to Q_{j+1}$ есть преобразование вида $X_jR_jY_j \to X_jS_jY_j$ или $a^\sigma X_j \to X_j a^\sigma$. Рассмотрим систему преобразований

$$(Q_0)_P \to (Q_1)_P \to \cdots \to (Q_m)_P,$$

где переход $(Q_j)_P \to (Q_{j+1})_P$ есть преобразование по схеме, являющейся проекцией преобразования $Q_j \to Q_{j+1}$. Последовательность преобразований

$$(Q_0)_P \to \cdots \to (Q_m)_P$$

назовем *проекцией последовательности* $Q_0 \to \cdots \to Q_m$ *на алфавит* P. Ясно, что проекция элементарного преобразования группы $\mathfrak{A}$ (или системы сопряженностей группы $\mathfrak{A}$) есть элементарное преобразование проекции этой группы (или соответствующей системы сопряженностей) на алфавит P. Поэтому, если $X = Y$ в группе $\mathfrak{A}$ (или ее системе сопряженностей), то $(X)_P = (Y)_P$ в группе $(\mathfrak{A})_P$ (или ее системе сопряженностей).

Легко видеть, что если $X \approx Y$, то $(X)_P \approx (Y)_P$. Поэтому, если в последовательности преобразований системы сопряженностей исключены преобразования по схеме $a^\sigma X \to X a^\sigma$ путем отождествления слов, отличающихся круговой перестановкой, то в проекции этой последовательности также исключаются преобразования по схеме $a^\sigma X \to X a^\sigma$.

Тождество букв по индивидуальности. Рассмотрим произвольную группу $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих, заданную определяющими соотношениями. Пусть A — алфавит группы $\mathfrak{A}$, а P — некоторая часть этого алфавита. Рассмотрим произвольную последовательность элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$:

$$X_0 \to \cdots \to X_m. \tag{1}$$

Определим особого рода тождество между буквами алфавита, входящими в разные слова последовательности (1). Каждое преобразование $X_j \to X_{j+1}$ имеет вид:

$$X_j' R X_j'' \to X_j' S X_j''.$$

Будем говорить, что буквы алфавита P, тождественные в тождественных отрезках X_j' (соответственно в отрезках X_j''), заключенных в словах $X_j'RX_j''$ и $X_j'SX_j''$, *тождественны по индивидуальности* или *имеют одну и ту же индивидуальность*. Кроме того, если $(R)_P \equiv (S)_P$, то слова $(X_j)_P$ и $(X_{j+1})_P$ тождественны. В этом случае мы будем называть тождественными по индивидуальности буквы алфавита P, тождественные в тождественных подсловах слов X_j и X_{j+1}, состоящих из всех букв алфавита P, заключенных в этих словах.

Распространим определение тождества по индивидуальности по закону ранзитивности, и будем считать буквы алфавита P слов последователь-

ности (1) различными по индивидуальности, если их тождество невыводимо из данного определения.

Ясно, что буквы алфавита P, тождественные по индивидуальности, одноименны. Кроме того, если буква p_1 предшествует букве p_2 в слове X_j, то буква p'_1 слова X_r, тождественная по индивидуальности букве p_1 слова X_j, предшествует букве p'_2 в слове X_r, тождественной по индивидуальности букве p_2 слова X_j.

Если буква p слова X_j не входит в преобразуемый отрезок в переходе $X_j \to X_{j+1}$ или проекции преобразуемых отрезков на алфавит P тождественны, то в слове X_{j+1} имеется буква с той же индивидуальностью. Обратно, если эта буква входит в преобразуемый отрезок и проекции преобразуемых отрезков на алфавит P не тождественны, то, согласно сделанному определению, в слове X_{j+1} буквы с той же индивидуальностью нет. Таким образом, если говорить о букве, не различая букв алфавита P одной и той же идивидуальности, то можно сказать так: каждая буква P либо имеется в первом слове последовательности (1), либо вводится каким-либо элементарным преобразованием и затем имеется во всех последующих словах до того момента, пока она не войдет в преобразуемый отрезок R, который заменяется отрезком S, причем проекции отрезков R и S на алфавит P не тождественны; после этого она исчезает. Если же она не войдет в такой преобразуемый отрезок, то войдет во все слова от момента возникновения до конца последовательности. Если группа $(\mathfrak{A})_P$ является свободной группой, то можно сказать, что каждая буква алфавита P вводится вставкой и исчезает сокращаясь.

Введем аналогичным образом определения тождественных по индивидуальности букв для последовательности элементарных преобразований системы сопряженностей. Пусть

$$Y_0 \to \cdots \to Y_m \qquad (2)$$

— произвольная последовательность элементарных преобразований системы сопряженностей группы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим преобразование $Y_j \to Y_{j+1}$. Если это преобразование является элементарным преобразованием группы $\mathfrak{A}$, то мы определим тождественность по индивидуальности букв алфавита P в словах Y_j и Y_{j+1} так же, как и выше. Если преобразование $Y_j \to Y_{j+1}$ есть круговая перестановка, то

$$Y_j = yY'_j, \quad Y_{j+1} = Y'_j y.$$

Тогда мы назовем тождественными по индивидуальности тождественные буквы в отрезках Y'_j. Кроме того, если буква y принадлежит алфавиту P, то эту букву, являющуюся последней в слове $Y'_j y$, будем считать тождественной по индивидуальности с первой буквой слова yY'_j.

Перейдем от последовательности (2) к последовательности

$$Y_0 \to Y'_1 \to \cdots \to Y_m, \qquad (3)$$

которая получается из последовательности (2) удалением преобразований по схеме $a^\sigma X \to Xa^\sigma$, в силу того, что мы не различаем слов, образованных друг из друга круговой перестановкой букв. Тогда переход от Y'_j к Y'_{j+1} можно представить в виде одного преобразования по схеме $XRY \to XSY$

и нескольких круговых перестановок. При каждом таком представлении определяются тождественные по индивидуальности буквы алфавита P в словах Y'_j и Y'_{j+1}. Так как переход $Y'_j \to Y'_{j+1}$, вообще говоря, не однозначно представляется посредством указанных преобразований, то может возникнуть неоднозначность в определении тождества букв в словах Y'_j и Y'_{j+1}. Это обстоятельство для нас, однако, не будет иметь никакого значения и мы будем из этих разных способов отождествления выбирать какой-нибудь один по произволу. После этого отождествление букв в последовательности (3), как выше, распространяется по закону транзитивности.

§ 2. Проходные буквы

Рассмотрим группу $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих, заданную не которыми определяющими соотношениями (число которых может быть и бесконечно). Будем называть подмножество образующих

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \quad p_1^{-1}, \ldots, p_k^{-1}$$

системой проходных букв, если:

1) определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}$ не содержат отрицательных степеней букв p и

2) каждое определяющее соотношение, содержащее буквы p, имеет вид:

$$E_i p_j F_i = H_i p_j G_i, \tag{I}$$

где слова E, F, H и G букв p^σ не содержат. Запишем остальные соотношения группы $\mathfrak{A}$ в виде

$$A_i = B_i. \tag{II}$$

Согласно условию, слова A_i и B_i букв p^σ не содержат. Присоединим к равенствам (I) равенства, полученные из них возведением обеих частей в степень -1. Эти новые равенства будут иметь вид:

$$F_j^{-1} p_j^{-1} E_i^{-1} = G_i^{-1} p_j^{-1} H_i^{-1}. \tag{I$'$}$$

Ясно, что равенства (I′) вытекают из (I). Если рассматривать систему равенств (I), (I′) и (II) как определяющие соотношения, то они определяют ту же группу $\mathfrak{A}$, но представляют собой зависимую систему. Несмотря на это, мы в дальнейшем будем пользоваться именно этой последней системой определяющих соотношений (I), (I′) и (II) и называть ее *расширенной системой* определяющих соотношений. Элементарные преобразования по схемам равенств (I), (I′) и (II) будем называть *элементарными преобразованиями расширенной системы.*

Обозначим алфавит проходных букв буквой P. Легко видеть, что группа $(\mathfrak{A})_P$, являющаяся проекцией группы $\mathfrak{A}$ на алфавит P, является свободной группой. Отсюда вытекает следствие, которым мы в дальнейшем будем часто пользоваться. Мы сформулируем это следствие в виде леммы.

ЛЕММА 1. *Если слова X и Y равны в группе $\mathfrak{A}$, то их проекции на P равны в свободной группе.*

Преобразуем каждое определяющее соотношение (I) к виду

$$H_i^{-1}E_ip_j = p_jG_jF_i^{-1}. \tag{1}$$

Легко видеть, что эти равенства следуют из равенства (I) и, обратно; из равенств (I), кроме того, следуют равенства:

$$E_i^{-1}H_ip_j = p_jF_iG_i^{-1}. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) можно объединить в одно:

$$u^{(s)}p_j = p_jw^{(s)}. \tag{3}$$

Очевидно, что для каждого слова $u^{(s)}$ найдется слово $u^{(s')}$, так что

$$u^{(s)} \equiv (u^{(s')})^{-1}.$$

То же можно сказать и о словах $w^{(s)}$. Составим всевозможные произведения вида

$$u^{(s_1)}u^{(s_2)} \dots u^{(s_k)}$$

и произведения вида

$$w^{(s_1)}w^{(s_2)} \dots w^{(s_k)}.$$

Приведем первое множество слов со вторым во взаимно однозначное соответствие:

$$u^{(s_1)}u^{(s_2)} \dots u^{(s_k)} \text{———} w^{(s_1)}w^{(s_2)} \dots w^{(s_k)}.$$

Это соответствие мы назовем соответствием L_p. В дальнейшем слова вида $u^{(s_1)} \dots u^{(s_k)}$ мы будем обозначать через u с различными нижними индексами, а слова $w^{(s_1)} \dots w^{(s_k)}$ — через w с теми или другими индексами.

Из соотношений (3) вытекают равенства:

$$up = pw$$

для каждых u и w, отвечающих друг другу в соответствии L_p. Последние равенства можно привести к виду

$$u = pwp^{-1}.$$

Легко видеть, что множество слов u, так же как и множество слов w, образует подгруппу в группе $\mathfrak{A}$. Из последних соотношений видно, что соответствие L_p есть изоморфизм этих подгрупп. Напомним, что слова u и w не содержат проходных букв p.

Рассмотрим группу, алфавит которой получается из алфавита группы $\mathfrak{A}$ удалением всех проходных букв p_j^{σ}, а образующие соотношения представляют собой равенства (II):

$$A_i = B_i$$

(слова A_i и B_i, по условию, не содержат проходных букв).

Назовем эту группу *основанием группы* $\mathfrak{A}$ *по системе проходных букв* P и обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}^{(p)}$ или просто $\overline{\mathfrak{A}}$, если при этом не возникает смешения символов. Множество слов u и множество слов w образуют две подгруппы и в группе $\overline{\mathfrak{A}}$, но соответствие L_p, вообще говоря, уже не будет изоморфизмом в группе $\overline{\mathfrak{A}}$.

Если для каждой проходной буквы p_j L_{p_j} есть изоморфизм в группе $\overline{\mathfrak{A}}$, то систему проходных букв p мы будем называть *правильной*. Будем

всегда обозначать слово w^{-1} через v с теми же индексами (если они есть у слова w).

Если

$$w \equiv w^{(s_1)} \dots w^{(s_k)},$$

то

$$w^{-1} \equiv v \equiv v^{(s_k)} \dots v^{(s_1)}.$$

Если u и v^{-1} соответствуют друг другу в L_p, то u и v представляются в виде:

$$u \equiv u^{(s_1)} \dots u^{(s_k)}, \quad v \equiv v^{(s_k)} \dots v^{(s_1)}.$$

Для того чтобы доказать, что соответствие L_p есть изоморфизм, достаточно показать, что слова u и v, где u и v^{-1} соответствуют друг другу в L_p, одновременно равны или не равны 1 в группе $\overline{\mathfrak{A}}$.

Заметим для дальнейшего, что соответствие L_p легко образовать непосредственно из равенств (I). Если все эти равенства для проходной буквы p имеют вид

$$E_i p F_i = H_i p G_i, \quad i = 1, 2, \dots, \mu,$$

то соответствие L_p может быть записано в виде:

$$u \equiv (H_{i_1}^{-1} E_{i_1})^{\sigma_1} (H_{i_1}^{-1} E_{i_2})^{\sigma_2} \dots (H_{i_k}^{-1} E_{i_k})^{\sigma_k} \text{———}$$
$$\text{———} w \equiv (G_{i_1} F_{i_1}^{-1})^{\sigma_1} (G_{i_2} F_{i_2}^{-1})^{\sigma_2} \dots (G_{i_k} F_{i_k}^{-1})^{\sigma_k},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ равны ± 1.

Из равенств (3) вытекают равенства:

$$p_j = u^{(s)} p_j v^{(s)} \tag{4}$$

и, обратно, из равенств (4) вытекают равенства (3). Присоединим к равенствам (4) равенства

$$p_j^{-1} = v^{(s')} p_j^{-1} u^{(s')}. \tag{5}$$

Последние равенства вытекают из равенств (4). В самом деле, для каждого равенства вида (5) существует равенство вида (4), где

$$u^{(s')} \equiv (u^{(s)})^{-1} \text{ и } v^{(s')} \equiv (v^{(s)})^{-1}.$$

В таком случае, если мы заменим определяющие соотношения (1) группы $\mathfrak{A}$ равенствами (4) и (5), то определенная ими группа есть та же группа $\mathfrak{A}$.

Заметим, что в любой последовательности элементарных преобразований расширенной системы можно заменить преобразования равенств по схемам (I) и (I') преобразованиями по схемам равенств (4) и (5) и обратно, так что полученная система преобразований имеет ту же проекцию на алфавит P, что и исходная.

В самом деле, пусть в некоторой последовательности преобразований имеется переход по схеме некоторого из равенств

$$XEpFY \to XHpGY.$$

Мы можем заменить его следующими переходами:

$$XEpFY \to XE(E^{-1}HpGF^{-1})FY \to \dots \to XHpGY.$$

Первый из этих переходов есть применение схемы равенства

$$p = E^{-1}HpGF^{-1},$$

где $\bar{E}^{-1}H$ есть слово типа $u^{(i)}$, а GF^{-1} — соответствующее слово типа $v^{(i)}$. Последующие переходы являются сокращениями букв, не входящих в алфавит P. Легко видеть, что проекция всех слов на P во всех этих переходах одна и та же. Так же можно рассуждать и для любых других схем типа (I) и (I'). Легко доказывается и обратное утверждение.

Запишем определяющие соотношения (4) и (5) под одним номером (I''):

$$p_j = u^{(s)} p_j v^{(s)}, \qquad p_j^{-1} = v^{(s)} p_j^{-1} u^{(s)}. \tag{I''}$$

Если u и v^{-1} отвечают друг другу в L_{p_j}, то из (I'') вытекают равенства

$$p_j = u p_j v, \quad p_j^{-1} = v p_j^{-1} u.$$

В самом деле,

$$u \equiv u^{(s_1)} \dots u^{(s_k)}; \quad v \equiv v^{(s_k)} \dots v^{(s_1)};$$

применяя k раз схему первой серии из равенств (I''), получим:

$$p_j = u^{(s_1)} \dots u^{(s_k)} p_j v^{(s_k)} \dots v^{(s_1)},$$

а применяя k раз схему второй серии равенств (I''), получим:

$$p_j^{-1} = v^{(s_k)} v^{(s_{k-1})} \dots v^{(s_1)} p_j^{-1} u^{(s_1)} \dots u^{(s_k)}.$$

Заметим, что при преобразованиях по схемам равенств (I'') достаточно ограничиться только переходами

$$X p_j Y \to X u^{(s)} p_j v^{(s)} Y$$

и

$$X p_j^{-1} Y \to X v^{(s)} p_j^{-1} u^{(s)} Y,$$

так как обратные переходы легко исключатся. В самом деле, преобразования

$$X u^{(s)} p_j v^{(s)} Y \to X p_j Y$$

можно заменить преобразованиями

$$X u^{(s)} p_j v^{(s)} Y \to X u^{(s)} (u^{(s)})^{-1} p_j (v^{(s)})^{-1} v^{(s)} Y \to \dots \to X p_j Y,$$

где сначала совершается преобразование по схеме равенств

$$p_j = (u^{(s)})^{-1} p_j (v^{(s)})^{-1},$$

а затем сокращения.

Аналогичным образом исключается преобразование

$$X v^{(s)} p_j^{-1} u^{(s)} Y \to X p_j^{-1} Y.$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти исключаемые преобразования никогда не производятся.

Рассмотрим произвольную элементарную последовательность преобразований группы $\mathfrak{A}$ с определяющими соотношениями в форме (I) и (II):

$$X_0 \to X_1 \to \dots \to X_m.$$

Пусть Y_j есть проекция слова X_j на алфавит P.

Как указано во введении, мы можем ввести тождество по индивидуальности для букв алфавита P, заключенных в словах последователь-

ности (6). Проекция группы $\mathfrak{A}$ на алфавит P есть свободная группа, так как определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}$ проектируются в тавтологические. Тогда, как мы знаем, буква p^σ определенной индивидуальности в последовательности (1) может появиться только путем вставки и исчезнуть только путем сокращения.

Докажем в связи с понятием индивидуальности буквы p^σ следующую лемму.

ЛЕММА 2. *Пусть*

$$X_0p^\sigma Y_0 \to X_1p^\sigma Y_1 \to \cdots \to X_mp^\sigma Y_m \tag{6}$$

— последовательность элементарных преобразований расширенной системы группы $\mathfrak{A}$, все слова которой содержат проходную букву p^σ одной и той же индивидуальности (эта буква представлена в (6) явным образом). Тогда слово $X_0p^\sigma Y_0$ можно перевести в $X_mp^\sigma Y_m$ последовательностью преобразований вида

$$X_0pY_0 \to X_0upvY_0 \to \cdots \to X_mpY_m,$$

когда $\sigma = +1$, и вида

$$X_0p^{-1}Y_0 \to X_0vp^{-1}uY_0 \to \cdots \to X_mp^{-1}Y_m,$$

когда $\sigma = -1$, обладающей следующими свойствами:

1. *u и v^{-1} — слова, находящиеся в соответствии L_p.*

2. *Проекция полученной последовательности преобразований на алфавит P совпадает с точностью до тавтологических повторений с проекцией на этот алфавит последовательности* (6).

Как указано, последовательность (6) можно привести к такой последовательности преобразований, в которой все преобразования по схемам равенств (I) и (I′) заменяются преобразованиями по схемам равенств (I″) и которая имеет ту же проекцию на P, что и последовательность (6). Такую последовательность можно записать в виде

$$X_{01}p^\sigma X_{02} \to \cdots \to X_{j1}p^\sigma X_{j2} \to \cdots \to X_{m1}p^\sigma X_{m2}, \tag{7}$$

где выделенная явно буква p^σ является по индивидуальности той же буквой, которая нами отмечена в последовательности (6).

Мы рассмотрим детально только тот случай, когда $\sigma = +1$. Тогда последовательность (7) будет иметь вид:

$$X_{01}pX_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2}.$$

Пусть $X_{h_1} \to X_{h_1+1}$ — первое из преобразований в последовательности (7), которые производятся над рассматриваемой буквой p. Тогда это есть преобразование по схеме некоторого равенства

$$p = u_{r_1}pv_{r_1},$$

причем

$$X_{h_1} \equiv X_{h_11}pX_{h_12} \text{ и } X_{h_1+1} \equiv X_{h_11}u_{r_1}pv_{r_1}X_{h_12}.$$

Переставим порядок преобразований в (7), выполнив сначала данное преобразование; мы получим последовательность

$$X_{01}u_{r_1}pv_{r_1}X_{02} \to \cdots \to X_{h_11}u_{r_1}pv_{r_1}X_{12} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2}. \tag{7$_1$}$$

Преобразования в последовательности (7) до h_1-го номера не затрагивают рассматриваемой буквы p и производятся над отрезками X_{j1} или X_{j2}. В последовательности (7_1) мы имеем в точности такие же преобразования над теми же отрезками X_{j1} или X_{j2}. Начиная же с h_1-го номера, последовательности (7) и (7_1) совпадают. Легко видеть, что проекция последовательности (7_1) на P совпадает с проекцией на P последовательности (7). Рассмотрим первое преобразование последовательности (7_1), затрагивающее букву p. Пусть это преобразование в (7) и в (7_1) есть $X_{h_2} \to X_{h_2+1}$. Оно имеет вид

$$X_{h_21}pX_{h_22} \to X_{h_21}u_{r_2}pv_{r_2}X_{h_22}.$$

Повторяя те же рассуждения над (7_1), что и над (7), мы опять выполним над p это преобразование и получим последовательность:

$$X_{01}u_{r_1}u_{r_2}pv_{r_2}v_{r_1}X_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2}. \qquad (7_2)$$

Продолжая эту перестановку преобразований далее, мы получим последовательности (7_3), ..., (7_q) до последнего преобразования над буквой p. В результате получим последовательность:

$$X_{01}u_{r_1}\ldots u_{r_q}pv_{r_q}\ldots v_{r_1}X_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2}, \qquad (7_q)$$

которая, очевидно, удовлетворяет требованиям леммы.

Легко видеть, что слова $u_{r_1}\ldots u_{r_q}$ и $(v_{r_q}\ldots v_{r_1})^{-1}$ отвечают друг другу в соответствии L_p. Итак, последовательность (7), переводящую $X_{01}pX_{02}$ в $X_{m1}pX_{m2}$, можно заменить последовательностью (7_q):

$$X_{01}upvX_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2},$$

не содержащей преобразований над данной буквой p, так что ее проекция на алфавит P совпадает с проекцией последовательности (7) и u отвечает v^{-1} в соответствии L_p.

Аналогичным образом можно показать, что в случае, когда $\sigma = -1$ и последовательность (6) имеет вид:

$$X_{01}p^{-1}X_{02} \to \cdots \to X_{m1}p^{-1}X_{m2},$$

ее можно заменить последовательностью:

$$X_{01}vp^{-1}uX_{02} \to \cdots \to X_{m1}p^{-1}X_{m2},$$

где u отвечает v^{-1} в L_p, удовлетворяющей всем требованиям леммы.

Полученные последовательности преобразований

$$X_{01}upvX_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2},$$
$$X_{01}vp^{-1}uX_{02} \to \cdots \to X_{m1}p^{-1}X_{m2}$$

будем называть *каноническими, связанными с буквой* p (соответственно p^{-1}).

Пусть $X_0 \to \cdots \to X_m$ — некоторая последовательность элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$. Назовем вставку $p^{-1}p$ (или pp^{-1}) проходной буквы p в этой последовательности *правильной*, если обе вставленные буквы p^{-1} и p не подвергаются в дальнейшем сокращениям и сохраняются в слове X_m. В противном случае вставку будем называть *неправильной*.

ЛЕММА 2′. *Пусть в последовательности преобразований системы сопряженностей, порожденной группой* $\mathfrak{A}$,

$$X_0 \to \cdots \to X_m, \tag{6′}$$

все слова содержат некоторую букву p^σ *одной и той же индивидуальности. Тогда можно изменить порядок преобразований* (6′) *следующим образом: сначала выполнить над указанной буквой* p^σ, *заключенной в* X_0, *все преобразования по схемам равенств* (1″), *которые осуществляются в последовательности* (6′), *а затем полученное слово* X_0' *перевести последовательностью элементарных преобразований системы сопряженностей в* X_m:

$$X_0' \to X_1' \to \cdots \to X_m.$$

Проекция этой последовательности на алфавит P *совпадает с проекцией последовательности* (6′) *на* P *и в последовательности* $X_0' \to \cdots \to X_m$ *над рассматриваемой буквой* p^σ *никаких преобразований не производится.*

Доказательство этой леммы вполне аналогично предыдущему, и мы его приводить не будем. Отметим только, что последовательность преобразований $X_0' \to \cdots \to X_m$ — такая же, как и соответствующая последовательность в лемме 2. Если последовательность (6′) представить в виде

$$X_{01}p^\sigma X_{02} \to \cdots \to X_{m1}p^\sigma X_{m2},$$

то последовательность $X_0' \to \cdots \to X_m$ будет иметь вид:

$$X_{01}upvX_{02} \to \cdots \to X_{m1}pX_{m2},$$

если $\sigma = +1$, и

$$X_{01}vp^{-1}uX_{02} \to \cdots \to X_{m1}p^{-1}X_{m2},$$

если $\sigma = -1$, где u отвечает v^{-1} в соответствии L_p.

Эту последовательность мы будем также называть канонической и связанной с данной буквой p^σ.

ЛЕММА 3. *Если слова* X *и* Y *равны в группе* $\mathfrak{A}$ *с правильной системой проходных букв* p, *то* X *можно перевести в* Y *последовательностью элементарных преобразований расширенной системы, не содержащей неправильных вставок проходных букв* p.

Так как $X = Y$, то X можно перевести в Y некоторой последовательностью преобразований

$$X \equiv X_0 \to \cdots \to X_m \equiv Y. \tag{8}$$

Покажем, что X_0 можно перевести в X_m последовательностью преобразований, не содержащей неправильных вставок.

Рассмотрим последнюю неправильную вставку в последовательности (8). Допустим, что эта неправильная вставка является преобразованием $X_j \to X_{j+1}$.

Мы предположим, что эта вставка *правосторонняя*. Случай левосторонней вставки аналогичен. Тогда

$$X_j = X_{j1}X_{j2},$$

а

$$X_{j+1} = X_{j1}p^{-1}pX_{j2}.$$

Так как рассматриваемая вставка — неправильная, то хотя бы одна из вставленных букв p или p^{-1} должна впоследствии сократиться. Возможны два случая:

1) вставленные буквы p и p^{-1} сокращаются взаимно;

2) какая-либо из этих вставленных букв сократится с буквой посторонней индивидуальности.

Рассмотрим первый случай. Возьмем часть последовательности (8) до взаимного сокращения вставленных букв, исключая само это сокращение:

$$X_{j1}p^{-1}pX_{j2}\to\cdots\to X_{j+s_01}p^{-1}pX_{j+s_02}. \tag{9}$$

Во всех членах этой последовательности содержатся вставленные буквы p и p^{-1}. Мы можем, на основании леммы 2, образовать каноническую последовательность преобразований, связанную с буквой p^{-1}:

$$X_{j1}v_1p^{-1}u_1pX_{j2}\to\cdots\to X_{j+s_01}p^{-1}pX_{j+s_02},$$

а затем перейти к канонической последовательности преобразований, связанной с буквой p:

$$X_{j1}v_1p^{-1}u_1u_2pv_2X_{j2}\to\cdots\to X_{j+s_01}p^{-1}pX_{j+s_02}. \tag{10}$$

В последовательности (10) нет преобразований над буквами p и p^{-1}. Так как проекция на алфавит P последовательности (10) та же, что и последовательности (9), то представленные здесь явно буквы p и p^{-1} имеют соответственно ту же индивидуальность. Кроме того, из тождества проекций на P последовательностей (9) и (10) вытекает, что в последовательности (10) также нет неправильных вставок, как и в последовательности (9).

Из последовательности (10) можно извлечь следующие переходы:

$$\left.\begin{array}{l} X_{j1}v_1\to X_{j+s_01},\\ v_2X_{j2}\to X_{j+s_02},\\ u_1u_2\to 1. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Во всех этих переходах отсутствуют неправильные вставки. В силу этого, в переходе $u_1u_2\to 1$ вообще не может быть никаких вставок проходных букв p^σ, так как буквы, вставленные правильной вставкой, удерживаются и в конечном результате, который в данном случае является пустым словом. Слово u_1u_2 не содержит букв p^σ, поэтому никакие элементарные преобразования перехода $u_1u_2\to 1$ не могут быть связаны с проходными буквами и принадлежат группе $\overline{\mathfrak{A}}$. Это значит, что $u_1u_2=1$ в $\overline{\mathfrak{A}}$. Так как соответствие L_p есть изоморфизм в $\overline{\mathfrak{A}}$, то слово $v_1^{-1}v_2^{-1}$, соответствующее в L_p слову u_1u_2, также равно 1 в $\overline{\mathfrak{A}}$. Тогда и слово v_1v_2 равно 1 в $\overline{\mathfrak{A}}$. Из сказанного следует, что существует последовательность элементарных преобразований группы $\overline{\mathfrak{A}}$:

$$1\to\cdots\to v_1v_2.$$

Укажем последовательность преобразований, не содержащую неправильных вставок и переводящую $X_{j1}X_{j2}$ в $X_{j+s_01}X_{j+s_02}$:

$$X_{j1}X_{j2}\to\cdots\to X_{j1}v_1v_2X_{j2}\to\cdots\to X_{j+s_01}X_{j+s_02}. \tag{12}$$

В последовательности (12) нет неправильных вставок проходных букв p^σ. В самом деле, переход

$$X_{j1}X_{j2} \to X_{j1}v_1v_2X_{j2}$$

осуществляется элементарными преобразованиями группы $\overline{\mathfrak{A}}$. Переход

$$X_{j1}v_1v_2X_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_01}X_{j+s_02}$$

состоит из первого и второго переходов (11), которые не содержат неправильных вставок. После этого мы можем исключить последнюю неправильную вставку в последовательности (8). Образуем последовательность преобразований:

$$X_0 \to \cdots \to X_{j1}X_{j2} \to \cdots \to X_{j1}v_1v_2X_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_01}X_{j+s_02} \to \cdots \to X_m. \quad (13)$$

Часть этой последовательности преобразований,

$$X_0 \to \cdots \to X_{j1}X_{j2},$$

является частью последовательности (8) до последней неправильной вставки. Переход

$$X_{j1}X_{j2} \to \cdots \to X_{j1}v_1v_2X_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_01}X_{j+s_02}$$

есть последовательность (12), которая не содержит неправильных вставок проходных букв p^σ. Часть последовательности (13),

$$X_{j+s_01}X_{j+s_02} \to \cdots \to X_m,$$

совпадает с частью последовательности (8) и не содержит неправильных вставок, так как эти преобразования осуществляются после последней неправильной вставки. Итак, полученная последовательность (13) содержит меньше неправильных вставок проходных букв p^σ, чем последовательность (8).

Перейдем к рассмотрению второго случая, когда одна из букв p или p^{-1} последней неправильной вставки сокращается с буквой посторонней индивидуальности. Возьмем ту из этих букв, которая сокращается раньше. Допустим, что эта буква есть p (противоположный случай аналогичен). Буква p^{-1}, с которой должна сократиться вставленная буква p, должна содержаться в слове X_{j+1}. В самом деле, если бы она была введена позднейшей вставкой, то не могла бы сократиться, так как такая вставка должна быть правильной, Эта буква p^{-1} должна содержаться в слове X_{j2}, так как если бы она содержалась в X_{j1}, то буква p^{-1} из последней неправильной вставки была бы заключена между взаимно сокращающимися буквами p^{-1} и p, из которых последняя принадлежит последней неправильной вставке, и расположение этих трех букв в слове X_{j+1} имело бы вид:

$$\cdots p^{-1} \cdots p^{-1}p,$$

где первая и последняя буквы взаимно сокращаются. Но в таком случае средняя буква p^{-1} должна сократиться раньше, чем крайние, и эта буква p^{-1}, принадлежащая последней неправильной вставке, сократилась бы, вопреки предположению, раньше буквы p из той же

вставки. Из сказанного следует, что

$$X_{j2} = X'_{j2} p^{-1} X''_{j2},$$

и часть последовательности (8) от последней неправильной вставки до рассматриваемого сокращения букв p и p^{-1} имеет вид:

$$X_{j1} p^{-1} p X''_{j2} p^{-1} X''_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_0 1} p p^{-1} X''_{j+s_0 2}. \qquad (14)$$

Представленные здесь явным образом вторая и третья буквы p и p^{-1} присутствуют во всех словах последовательности (14).

Образуем каноническую последовательность преобразований, связанную с данной буквой p, а затем образуем из нее каноническую последовательность преобразований, связанную с буквой p^{-1}. Мы получим последовательность преобразований:

$$X_{j1} p^{-1} u_1 p v_1 X'_{j2} v_2 p^{-1} u_2 X''_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_0 1} p p^{-1} X''_{j+s_0 2}, \qquad (15)$$

не содержащую никаких преобразований с взаимно сокращающимися буквами p и p^{-1}. Тогда мы имеем переходы:

$$\left.\begin{aligned} X_{j1} p^{-1} u_1 &\to X_{j+s_0 1}, \\ v_1 X'_{j2} v_2 &\to 1, \\ u_2 X''_{j2} &\to X''_{j+s_0 2}, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

которые не содержат неправильных вставок проходных букв. В таком случае, как легко видеть, можно осуществить переход

$$X'_{j2} \to v_1^{-1} v_2^{-1} \qquad (17)$$

без вставок проходных букв. Заметив это, переведем слово

$$X_{j1} X'_{j2} p^{-1} X''_{j2}$$

в слово

$$X_{j+s_0 1} X''_{j+s_0 2}$$

элементарными преобразованиями без неправильных вставок:

$$X_{j1} X'_{j2} p^{-1} X''_{j2} \to \cdots \to X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} p^{-1} X''_{j2} \to \cdots$$
$$\cdots \to X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2 X''_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_0 1} X''_{j+s_0 2}. \qquad (18)$$

В переходе

$$X_{j1} X'_{j2} p^{-1} X''_{j2} \to X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} p^{-1} X''_{j2}$$

отрезок X'_{j2} преобразуется посредством перехода (17); в переходе

$$X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} p^{-1} X''_{j2} \to X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2 X''_{j2}$$

буква p^{-1} преобразуется в слово $v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2$. Так как v_1^{-1} отвечает u_1, а v_2^{-1} — u_2 в соответствии L_p, то этот переход осуществляется элементарными преобразованиями по схемам равенств (I$''$).

Переход

$$X_{j1} v_1^{-1} v_2^{-1} v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2 X''_{j2} \to X_{j1} p^{-1} u_1 u_2 X''_{j2}$$

является сокращением слова $v_1^{-1} v_2^{-1} v_2 v_1$. Последний переход

$$X_{j1} p^{-1} u_1 u_2 X''_{j2} \to X_{j+s_0}$$

осуществляется посредством первого и третьего из переходов (16). Все эти переходы не содержат неправильных вставок. Последовательность (18) также не содержит неправильных вставок. Переведем X_0 в X_m последовательностью элементарных преобразований, в которой число неправильных вставок на одну меньше, чем в последовательности (8). Последовательность (8) можно выписать в следующем виде:

$$X_0 \to \cdots X_{j1}X'_{j2}p^{-1}X''_{j2} \to X_{j1}p^{-1}pX'_{j2}p^{-1}X''_{j2} \to \cdots$$
$$\cdots \to X_{j+s_01}pp^{-1}X''_{j+s_02} \to \cdots \to X_m .$$

Последовательность, в которой исключена одна неправильная вставка, имеет вид:

$$X_0 \to \cdots \to X_{j1}X'_{j2}p^{-1}X''_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_01}X''_{j+s_02} \to \cdots \to X_m. \qquad (19)$$

В этой последовательности переход

$$X_0 \to X_{j1}X'_{j2}p^{-1}X''_{j2}$$

совпадает с частью последовательности (8). Части последовательности (19)

$$X_{j1}X'_{j2}p^{-1}X''_{j2} \to \cdots \to X_{j+s_01}X''_{j+s_02}$$

и

$$X_{j+s_01}X''_{j+s_02} \to \cdots \to X_m$$

не содержат неправильных вставок, так как первая есть последовательность (18), а вторая состоит из преобразований (8), следующих за последней неправильной вставкой. В результате в последовательности (19) неправильных вставок на одну меньше, чем в последовательности (8).

Итак, для любой последовательности элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$, переводящей слово X в слово Y, можно найти другую, также переводящую слово X в Y, но содержащую меньшее количество неправильных вставок. Отсюда следует, что существует последовательность элементарных преобразований, переводящая X в Y, не содержащая неправильных вставок. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если $X = Y$ в группе $\mathfrak{A}$ с правильной системой проходных букв p и проекция Y на P несократима, то X можно перевести в Y последовательностью элементарных преобразований без вставок проходных букв.*

На основании леммы 3, X можно перевести в Y последовательностью элементарных преобразований, не содержащей неправильных вставок. Но правильных вставок в этой последовательности также не может быть, иначе буквы p и p^{-1} последней вставки вошли бы в Y и проекция Y на P была бы сократимой.

Следствие 2. *Если $X = Y$ в $\mathfrak{A}$ и слова X и Y не содержат проходных букв p, то $X = Y$ в $\overline{\mathfrak{A}}$.*

На основании леммы 3, X можно перевести в Y без вставок проходных букв p^σ. Но тогда в словах этой последовательности не может содержаться проходных букв p^σ, и преобразования этой последовательно-

сти могут осуществиться только по схемам равенств (II), которые не затрагивают букв p. Эти преобразования принадлежат группе $\bar{\mathfrak{A}}$ и, следовательно, $X = Y$ в $\bar{\mathfrak{A}}$.

В частности, если Y пусто и, следовательно, $X = 1$ в $\mathfrak{A}$, то из сказанного следует, что $X = 1$ и в $\bar{\mathfrak{A}}$.

ЛЕММА 4. *Пусть слова X и Y сопряжены в группе $\mathfrak{A}$, алфавит которой содержит правильную систему P проходных букв p_j. Если проекция Y на алфавит P либо несократима и не пуста, либо $Y = 1$ в $\mathfrak{A}$, то X можно перевести в Y последовательностью элементарных преобразований системы сопряженностей, порожденной группой $\mathfrak{A}$, не содержащей неправильных вставок проходных букв p_j.* (Определение правильных и неправильных вставок остается тем же, что и для преобразований группы.)

В вопросах о сопряженности слов мы будем, как указано во введении, не различать слова, полученные одно из другого круговой перестановкой букв, называть их тождественными в данной системе сопряженностей и тождество это обозначать значком $\approx$.

Если $X \sim Y$ в $\mathfrak{A}$, то X можно перевести в Y последовательностью преобразований системы сопряженностей на круге. Выпишем эту последовательность:

$$X \approx X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_m \approx Y \tag{20}$$

и рассмотрим последнюю неправильную вставку $X_j \to X_{j+1}$, которую будем предполагать правосторонней. Тогда

$$X_{j+1} \approx p^{-1} p X_j.$$

По крайней мере одна из вставленных букв p^{-1} и p должна сократиться в дальнейших преобразованиях. Возможны два случая:

1°. Вставленные буквы p^{-1} и p сокращаются взаимно.

2°. По крайней мере одна из вставленных букв сокращается с буквой, по индивидуальности отличной от вставленных.

Рассмотрим случай 1°. Выделим часть последовательности (20), начиная от последней неправильной вставки и кончая сокращением этих вставленных букв p^{-1} и p. Получим последовательность

$$X_{j+1} \approx p^{-1} p X_j \to \cdots \to p^{-1} p X_{j+s_0}. \tag{21}$$

(Ввиду неразличимости слов, разнящихся только круговой перестановкой букв, вставленные буквы p^{-1} и p можно всегда писать в начале слова.)

Как и выше, образуем из данной последовательности преобразований каноническую последовательность, связанную с буквой p^{-1}, а из нее — каноническую последовательность, связанную с буквой p. Мы получим последовательность

$$v_1 p^{-1} u_1 u_2 p v_2 X_j \to \cdots \to p^{-1} p X_{j+s_0}, \tag{22}$$

в которой не производится преобразований над данными буквами p^{-1} и p. В таком случае имеются две возможности:

1) u_1u_2 преобразовывается к 1, а $v_2X_jv_1$ — к X_{j+s_0}. Тогда последовательность (22) принимает вид:

$$p^{-1}u_1u_2pv_2X_jv_1 \to \cdots \to p^{-1}pX_{j+s_0}. \qquad (23)$$

2) $v_2X_jv_1$ преобразовывается к 1, а u_1u_2 — к u'. Тогда последовательность (22) может быть записана в форме:

$$p^{-1}u_1u_2pv_2X_jv_1 \to \cdots \to p^{-1}u'p \approxeq pp^{-1}u'. \qquad (24)$$

В случае 1) имеют место переходы:

$$u_1u_2 \to 1,$$
$$v_2X_jv_1 \to X_{j+s_0},$$

которые не содержат неправильных вставок проходных букв. Легко видеть, что эти переходы осуществляются уже в группе $\mathfrak{A}$. Это следует из того, что преобразования некоторого слова в системе сопряженностей группы, которые не затрагивают какой-то определенной буквы этого слова, осуществляются в группе. Так как, по предположению, рассматриваемая система проходных букв — правильная, то соответствие L_p есть изоморфизм. Кроме того, $u_1u_2 = 1$ в группе $\mathfrak{A}$. В таком случае и $v_1 v_2 = 1$ в группе $\overline{\mathfrak{A}}$. Заметив это, преобразуем слово X_j в X_{j+s_0}, не употребляя неправильных вставок:

$$X_j \to \cdots \to X_jv_1v_2 \approxeq v_2X_jv_1 \to \cdots \to X_{j+s_0}.$$

Переход $X_j \to X_jv_1v_2$ состоит в получении слова v_1v_2 из пустого слова при помощи элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}$. Это возможно, так как $v_1v_2 = 1$ в $\overline{\mathfrak{A}}$. В этом переходе вообще не будет вставок проходных букв p_j. Следующий переход $v_2X_jv_1 \to X_{j+s_0}$, как мы уже знаем, не содержит неправильных вставок проходных букв. Составим последовательность, переводящую X в Y с меньшим числом неправильных вставок, чем в последовательности (20):

$$X_0 \to \cdots \to X_j \to \cdots \to X_jv_1v_2 \approxeq v_2X_jv_1 \to \cdots \to X_{j+s_0} \to \cdots \to X_m.$$

Как и выше, легко убедиться, что число неправильных вставок здесь на одну меньше, чем в (20).

В случае 2) имеют место переходы

$$u_1u_2 \to u',$$
$$v_2X_jv_1 \to 1,$$

которые не содержат неправильных вставок проходных букв. В таком случае $v_2X_jv_1 = 1$ в группе $\mathfrak{A}$, а это значит, что проекция этого слова на алфавит проходных букв P равна 1 в свободной группе. Следовательно, равная ей в свободной группе проекция слова X_0 равна 1 в свободной группе. На основании условий леммы, мы должны предположить, что $X_0 = 1$, следовательно, и $X_j = 1$ в группе $\mathfrak{A}$. Тогда $v_1v_2 = 1$ в группе $\mathfrak{A}$ и, значит, в группе $\mathfrak{A}$. В силу того что L_p есть изоморфизм, слово u_1u_2 также равно 1 в группе $\overline{\mathfrak{A}}$. Следовательно, и слово u' равно

1 в группе $\mathfrak{A}$. Но тогда, в силу леммы 3, X_j можно перевести в u' без вставок букв p (u', очевидно, не содержит букв p), и, в силу (24), имеем:

$$u' \approxeq X_{j+s_0}.$$

Таким образом, слово X_0 переводится в слово X_m последовательностью преобразований

$$X_0 \to \cdots \to X_j \to \cdots \to u' \approxeq X_{j+s_0} \to \cdots \to X_m.$$

Легко видеть, что в этой последовательности число неправильных вставок на единицу меньше, чем в последовательности (20).

Перейдем к рассмотрению случая 2°, когда хотя бы одна из вставленных букв p^{-1} и p сократится с буквой посторонней индивидуальности. Допустим, что раньше сокращается буква p (противоположный случай аналогичен). Тогда буква p^{-1}, с которой сокращается данная буква p, должна присутствовать в слове X_j, иначе она была бы введена правильной вставкой и не могла бы сокращаться. Получаем:

$$X_j \approxeq X'_j p^{-1} X''_j,$$

и последовательность (20) принимает вид:

$$X_0 \to \cdots \to X_j \approxeq X'_j p^{-1} X''_j \to p^{-1} p X'_j p^{-1} X''_j \to \cdots \to X_m.$$

Выделим часть этой последовательности, начиная от рассматриваемой вставки до сокращения буквы p из этой вставки. Эта часть может быть представлена в одном из следующих видов, в зависимости от характера сокращения букв p и p^{-1}:

1) $p^{-1} p X'_j p^{-1} X''_j \to \cdots \to p p^{-1} X''_{j+s_0}$,

2) $p^{-1} p X'_j p^{-1} X''_j \to \cdots \approxeq p^{-1} X''_j p^{-1} p X'_j \to \cdots \to p^{-1} p X'_{j+s_0}$.

В случае 1) исчезает отрезок, заключенный между буквой p из последней неправильной вставки и p^{-1}, следующей после X'_j. В случае 2) исчезает отрезок, заключенный между буквой p^{-1} из X_j и буквой p из последней неправильной вставки. Легко видеть, что второй случай невозможен. В самом деле, в этом случае буква p^{-1} из последней неправильной вставки должна была бы сократиться раньше буквы p из той же вставки, что противоречит предположению. Рассмотрим первый случай.

Образуем каноническую последовательность преобразований, связанную с сокращающимися буквами p и p^{-1}:

$$p^{-1} u_1 p v_1 X'_j v_2 p^{-1} u_2 X''_j \approxeq$$
$$\approxeq p v_1 X'_j v_2 p^{-1} u_2 X''_j p^{-1} u_1 \to \cdots \to p p^{-1} X''_{j+s_0}.$$

Из этой последовательности извлекаются следующие переходы:

$$v_1 X_j' v_2 \to 1,$$
$$u_1 X_j'' p^{-1} u_1 \to X_{j+s_0}'',$$

в которых нет неправильных вставок.

Из первого перехода можно получить переход:

$$X_j' \to v_1^{-1} v_2^{-1},$$

осуществляемый без неправильных вставок. Присоединим к нему переход

$$p^{-1} \to v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2,$$

осуществляемый только по схемам равенств (I$''$).

Пользуясь этими переходами, переведем слово X_j в X_{j-s_0} последовательностью преобразований, не содержащей неправильных вставок:

$$X_j \approx X_j' p^{-1} X_j'' \to \dots \to v_1^{-1} v_2^{-1} p^{-1} X_j'' \to \dots \to$$
$$\to v_1^{-1} v_2^{-1} v_2 v_1 p^{-1} u_1 u_2 X_j'' \to \dots \to$$
$$\to p^{-1} u_1 u_2 X_j'' \approx u_2 X_j'' p^{-1} u_1 \to \dots \to X_{j+s_0}''. \tag{25}$$

Далее, заменим в последовательности (20) переход $X_j \to X_{j+s_0}$ последовательностью (25). Этим мы исключим последнюю неправильную вставку $p^{-1}p$.

В результате во всех случаях из любой последовательности преобразований системы сопряженностей, удовлетворяющей условиям леммы, мы исключим одну неправильную вставку. Это значит, что существует последовательность преобразований, переводящая X в Y без неправильных вставок.

Из леммы 4 вытекают следствия, аналогичные следствиям из леммы 3. Из них мы отметим только одно.

Следствие. *Если в условиях леммы 4 $X \sim Y$ и проекция Y на P не пуста и несократима, то X можно перевести в Y последовательностью элементарных преобразований без вставок проходных букв.*

§ 3. Группы $\mathfrak{A}_{qr}$ и $\mathfrak{A}_{lqr}$

Рассмотрим некоторые группы специального типа.

Группы $\mathfrak{A}_{qr}$. Положительный алфавит этих групп состоит из букв трех видов:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \quad q_1, q_2, \dots, q_m, \quad r, r_2, \dots, r_s.$$

Буквы первого вида назовем *основными*, остальные — *квадратично проходными*. Группы $\mathfrak{A}_{qr}$ задаются следующими определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} &q_i a_j = a_j q_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n. \\ &r_l^2 a_j = a_j r_l, \quad l = 1, 2, \dots, s. \end{aligned} \tag{1}$$

В предыдущем параграфе мы ввели понятие соответствия L_p, связанного с каждой проходной буквой p некоторой системы P.

Для того чтобы получить это соответствие, следует привести определяющие соотношения, содержащие проходную букву p, к виду

$$u^{(i)}p = pw^{(i)}.$$

Соответствие L_p устанавливается между словами u и w, причем слова u являются всевозможными произведениями слов $u^{(i)}$, а слова w — слов $w^{(i)}$. Легко видеть, что основные буквы группы $\mathfrak{A}_{qr}$ образуют систему проходных букв, и для буквы a_j равенства (I′) имеют вид:

$$q_i^{-1}a_j = a_j q_j^{-2},$$

$$r_l^{-2}a_j = a_j r_l^{-1}.$$

Словами $u^{(i)}$ в этом случае являются элементы q_i, q_i^{-1} и r_l^2, r_l^{-2}, а соответствующими словами $w^{(i)}$ — элементы q_i^2, q_i^{-2}, r_l и r_l^{-1}.

Обозначим всевозможные произведения букв q_i^σ (соответственно r_l^σ) через Q (соответственно R), а произведения слов $q_i^{2\sigma}$ (соответственно $r_l^{2\sigma}$) — через $Q^{(2)}$ (соответственно $R^{(2)}$). Выражениям Q, R, $Q^{(2)}$, $R^{(2)}$ мы будем в случае надобности приписывать нижние индексы.

ЛЕММА 1. *Совокупность основных букв группы $\mathfrak{A}_{qr}$ является правильной системой проходных букв.*

Покажем, что каждое соответствие L_{a_j} есть изоморфизм в группе $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$. Группа $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$ в данном случае является свободной группой, так как определяющих соотношений, не содержащих букв a_j, нет. Допустим, что некоторая левая часть u изоморфизма L_{a_j} равна 1 в группе $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$. Покажем, что соответствующее данному u слово w также равно 1 в $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$. Так как $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$ — свободная группа, то равное в ней 1 слово u должно полностью сокращаться. Каждое слово u имеет вид:

$$Q_1 R_1^{(2)} Q_2 R_2^{(2)} \ldots .$$

Если оно сокращается до 1, то во всяком случае найдутся два взаимно сокращающихся множителя q^σ, $q^{-\sigma}$ или r^σ и $r^{-\sigma}$. В первом случае эти взаимно сокращающиеся множители содержатся в некотором множителе Q_i; пусть после сокращения этот множитель примет вид Q_i', а слово u — вид u'.

В таком случае в слове w в множителе $Q_i^{(2)}$ взаимно сократятся два множителя $q^{2\sigma}$ и $q^{-2\sigma}$, соответствующие элементам q^σ и $q^{-\sigma}$. Пусть после сокращения $q^{2\sigma}$ и $q^{-2\sigma}$ множитель $Q_i^{(2)}$ примет вид $Q_i'^{(2)}$, а слово w — вид w'. Нетрудно видеть, что слова u' и w' являются соответствующими в L_{a_j}.

Если в u сокращаются элементы r^σ и $r^{-\sigma}$, то они должны находиться в некотором множителе $R_i^{(2)}$. Тогда в этом множителе нацело сокращаются квадраты $r^{2\sigma}$ и $r^{-2\sigma}$, заключенные в $R_i^{(2)}$. Отсюда следует, что в слове w в множителе R_i взаимно сокращаются элементы r^σ и $r^{-\sigma}$, отвечающие квадратам $r^{2\sigma}$ и $r^{-2\sigma}$. После этих сокращений слова u и w перейдут в слова, попрежнему находящиеся в соответствии L_{a_j}. Отсюда следует, что если u польностью сокращается, то и w полностью сокращается. Подобным же образом можно показать, что если w нацело сокращается, то и u нацело сокращается. Итак, L_{a_j} есть изоморфизм в свободной группе, и система проходных букв a_j — правильная.

Следствие. *Если слова X и Y не содержат основных букв и равны в группе $\mathfrak{A}_{qr}$, то они равны в свободной группе.*

На основании следствия 2 леммы 3 § 2, слова X и Y должны равняться в группе $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$, которая является свободной.

Определение. Мы будем говорить, что буквы определенного вида *исчезают* в слове X группы $\mathfrak{A}$, если существует слово A, не содержащее букв данного вида и равное X в группе $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 2. *Если все буквы некоторого вида, принадлежащие слову AXB, заключены в отрезке X и если эти буквы исчезают в слове AXB группы $\mathfrak{A}$, то они исчезают и в слове X той же группы.*

Эта лемма тривиальна, так как из равенств $AXB = C$ следует в любой группе равенство $X = A^{-1}CB^{-1}$, и если C, A и B не содержат букв данного вида, то и в слове X они исчезают.

ЛЕММА 3. 1. *Если проекция слова $qa^{-1}X$ группы $\mathfrak{A}_{qr}$, где a — некоторая основная буква, а q — одна из букв q_i, на алфавит основных букв несократима, то в этом слове буквы q^σ и r^σ не исчезают.*

2. *Если проекция слова $Xa^{-1}r$ группы $\mathfrak{A}_{qr}$, где r — одна из букв r_l, на алфавит основных букв несократима, то в этом слове буквы q^σ и r^σ не исчезают.*

Мы докажем только первую часть леммы, вторая доказывается аналогично.

Предположим, что в слове $qa^{-1}X$, удовлетворяющем условиям леммы, буквы q^σ и r^σ исчезают. Это значит, что существует несократимое слово C, не содержащее этих букв и равное слову $qa^{-1}X$ в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Тогда слово $qa^{-1}X$ можно перевести в слово C последовательностью элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}_{qr}$.

Представим эту последовательность в виде:

$$qa^{-1}X \to \cdots \to C. \tag{2}$$

Так как основные буквы образуют правильную систему проходных букв, то, на основании следствия 1 из леммы 3 § 2, мы можем предполагать, что последовательность (2) вставок основных букв не содержит. А тогда мы можем перевести $qa^{-1}X$ в b канонической последовательностью преобразований, связанной с буквой a^{-1}, представленной здесь явным образом:

$$qva^{-1}uX \to \cdots \to C. \tag{3}$$

Как было указано в предыдущем параграфе, проекции на основной алфавит последовательностей (2) и (3) совпадают. Поэтому последовательность (3) также не содержит вставок основных букв. Так как проекция на основной алфавит первого слова этой последовательности есть несократимое слово, то не будет и сокращений основных букв. В таком случае первая буква проекции на основной алфавит слова $qva^{-1}uX$, т. е. буква a^{-1} не исчезнет в этих преобразованиях и сохранится и в слове C, в котором она будет первой буквой. Кроме того, по свойству канонической последовательности преобразований, в последовательности (3) над буквой a^{-1} никаких преобразований не производится. В таком случае qv преобразуется к пустому слову в преобразованиях (3), значит, $qv = 1$ в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Так как qv не

содержит основных букв, то на основании следствия из леммы 1 настоящего параграфа, $qv = 1$ в свободной группе.

Покажем, что это заключение приводит к противоречию. Слово v имеет, как мы знаем, вид:

$$v \equiv Q_1^{(2)} R_2 \ldots Q_k^{(2)} R_k.$$

Если $qv = 1$ в свободной группе, то проекция этого слова на алфавит букв q также равна 1 в свободной группе. Эта проекция будет иметь вид:

$$q Q_1^{(2)} Q_2^{(2)} \ldots Q_k^{(2)}.$$

Но тогда она не может равняться 1 в свободной группе, так как содержит нечетное количество букв. Мы пришли к противоречию, и первая часть леммы доказана.

ЛЕММА 4. *Если в слове X исчезают все буквы q^σ и r^σ, то в слове X', полученном из X вычеркиванием всех букв r^σ, исчезают все буквы q^σ, а в слове X'', полученном из X вычеркиванием всех букв r^σ, исчезают все буквы q^σ.*

Докажем только первое утверждение. Если в слове X исчезают все буквы q^σ, то оно может быть переведено последовательностью элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}_{qr}$ в слово Y, не содержащее букв q^σ. Рассмотрим эту последовательность преобразований:

$$X \to X_1 \to \cdots \to Y.$$

Взяв проекцию этой последовательности на алфавит, состоящий из основных букв и букв r^σ, получим последовательность преобразований

$$X' \to X_1' \to \ldots \to Y.$$

Преобразования $X_i' \to X_{i+1}'$ принадлежат группе, являющейся проекцией группы $\mathfrak{A}_{qr}$ на алфавит, состоящий из букв a_j^σ и r_l^σ, т. е. группы с определяющими соотношениями

$$r_l^2 a_j = a_j r_l.$$

(Другие определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}_{qr}$ проектируются в тавтологические.) Но определяющие соотношения группы — проекции — составляют часть определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}_{qr}$, поэтому слова X' и Y, равные в этой проекции, равны и в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Отсюда следует, что в слове X' буквы r^σ исчезают в группе $\mathfrak{A}_{qr}$.

Так же доказывается второе утверждение леммы.

Группа $\mathfrak{A}_{lqr}$. Перейдем к рассмотрению групп, которые мы будем называть группами $\mathfrak{A}_{lqr}$. Алфавит каждой группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ содержит, как часть, алфавит некоторой группы $\mathfrak{A}_{qr}$. Кроме того, в алфавите группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ имеются еще буквы $l_1, l_2, \ldots, l_t$. Таким образом, полный положительный алфавит группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ состоит из букв:

$$a_1, \ldots, a_n, \quad q_1, \ldots, q_m, \quad r_1, \ldots, r_s, \quad l_1, \ldots, l_t.$$

Буквы a_i попрежнему будем называть *основными*. Определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ состоят из определяющих соотношений соответствую-

щей группы $\mathfrak{A}_{qr}$ и равенств, выражающих, что буквы l_i коммутируют с основными буквами.

Таким образом, полная система определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ может быть записана в виде:

$$\left.\begin{aligned} q_i a_j &= a_j q_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n), \\ r_t^2 a_j &= a_j r_t \quad (t = 1, 2, \ldots, s), \\ l_u a_j &= a_j l_u \quad (u = 1, 2, \ldots, t). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Буквы l_u образуют систему проходных букв в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$. Соответствие L_{l_u} в данном случае имеет вид

$$u \equiv A \text{——} w \equiv A,$$

где A — произвольное слово, состоящее из основных букв. Иначе говоря, в соответствии L_{l_u} каждое слово, состоящее из основных букв, отвечает само себе. Такое соответствие является, очевидно, изоморфизмом в любой группе, поэтому *система проходных букв l_u является правильной системой проходных букв.*

ЛЕММА 5. *Пусть*

$$Xl^\sigma Y l^{-\sigma} Z \to \cdots \to R \tag{5}$$

— последовательность элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ в расширенной системе по отношению к проходным буквам l_u. Пусть при этом слово Y не содержит букв l. Если в этих преобразованиях нет вставок букв l_u, а буквы l^σ и $l^{-\sigma}$, представленные явно в слове $Xl^\sigma Y l^{-\sigma} Z$, сокращаются друг с другом, то в слове Y буквы q^σ и r^σ исчезают в группе $\mathfrak{A}_{qr}$.

Рассмотрим последовательность преобразований (5) до момента сокращения букв l^σ и $l^{-\sigma}$:

$$Xl^\sigma Y l^{-\sigma} Z \to \cdots \to X' l^\sigma l^{-\sigma} Z' \to X'Z'. \tag{6}$$

Заменим эту последовательность канонической системой преобразований, связанной с буквой l^σ, а затем полученную последовательность преобразований — канонической последовательностью, связанной с буквой $l^{-\sigma}$.

В результате получится последовательность

$$XAl^\sigma A^{-1} Y B^{-1} l^{-\sigma} BZ \to \cdots \to X'Z', \tag{7}$$

где A и B — слова из букв основного алфавита. В этой последовательности преобразований слово $A^{-1}YB^{-1}$ переводится в пустое слово. Отсюда следует, что $A^{-1}YB^{-1} = 1$ в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$. Но так как это слово не содержит букв l^σ, то, на основании следствия 2 § 1, слово $A^{-1}YB^{-1}$ равно 1 и в группе $\overline{\mathfrak{A}}_{qr}$, являющейся основанием группы $\mathfrak{A}_{lqr}$ по системе проходных букв l_u^σ. Группа $\overline{\mathfrak{A}}_{lqr}$ есть группа $\mathfrak{A}_{qr}$, следовательно, $A^{-1}YB^{-1} = 1$ в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Тогда $Y = AB$ в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Так как слово AB не содержит букв q^σ и r^σ, то лемма доказана.

§ 4. Группы $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$

Рассмотрим группы некоторого типа, которые мы будем называть *группами* $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$.

Положительный алфавит такой группы содержит две буквы p_1 и p_2, которые мы будем называть *опорными*. Остальные буквы положительного

алфавита разделяются на два класса S и S^+ с одинаковым числом элементов. Эти два класса приведены во взаимно однозначное соответствие, которое мы запишем в виде:

$$x \text{———} x^+,$$

где x — произвольный элемент класса S, а x^+ — соответствующий элемент класса S^+. Операция, обозначенная символом $+$, определена над элементами класса S. Распространим ее на слова, образованные из букв классов S^+ и S и букв, обратных этим буквам, положив

$$(x^{-1})^+ \equiv (x^+)^{-1},$$
$$((x^\sigma)^+)^+ \equiv x^\sigma,$$

где x — любая из букв класса S.

Если $X = x_1 x_2 \ldots x_k$, где x_i — буквы из S или S^+, или им обратные, то

$$X^+ \equiv x_k^+ x_{k-1}^+ \ldots x_1^+.$$

Легко видеть, что определенная таким образом операция обладает следующими свойствами:

1. $(X^+)^+ \equiv X$.
2. $(X^{-1})^+ \equiv (X^+)^{-1}$,

где X — любое слово, составленное из букв классов S и S^+ и им обратных. Мы будем называть слова X и X^+, а также равенства $X = Y$ и $X^+ = Y^+$, *взаимно симметричными*.

Определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ характеризуются следующими условиями:

1) Буквы p_1 и p_2 образуют систему проходных букв, причем определяющие соотношения, содержащие букву p_1, имеют вид:

$$F_i^+ p_1 F_i = G_i^+ p_1 G_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{1}$$

Определяющие соотношения, содержащие букву p_2, имеют вид:

$$E_i p_2 E_i^+ = H_i p_2 H_i^+, \quad i = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{2}$$

причем E_i, F_i, H_i, G_i состоят из букв вида x^σ, где x принадлежит к классу S.

Определяющие соотношения, не содержащие букв p_1 и p_2, разбиваются на два класса Γ и Γ^+ и имеют вид:

$$\begin{aligned} \Gamma&: \quad A_j = B_j, \\ \Gamma^+&: \quad A_j^+ = B_j^+, \end{aligned} \qquad (j = 1, 2, \ldots \gamma), \tag{3}$$

так что каждому из определяющих соотношений Γ соответствует одно симметричное ему определяющее соотношение Γ^+, и обратно. Слова A_j и B_j состоят из букв вида x^σ, где x принадлежит классу S.

Для определения группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ достаточно задать класс букв S, определяющие соотношения типа Γ и определяющие соотношения (1) и (2). Из опреляющих соотношений непосредственно видно, что *опорные буквы* p_1 *и* p_2, p_1^{-1} *и* p_2^{-1} *образуют систему проходных букв*. Основание группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ по этой системе, т. е. группа $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$, имеет алфавит, положительная часть которого

состоит из соединения классов S и S^+, а определяющими соотношениями группы $\overline{\mathfrak{A}}_{p_1p_2}$ являются равенства (3). Группа $\overline{\mathfrak{A}}_{p_1p_2}$, как легко видеть, представляет собой свободное произведение двух групп. Положительная часть алфавита первой из них — $\mathfrak{A}_\Gamma$ — совпадает с S, а определяющими соотношениями являются равенства Γ.

Положительная часть алфавита второй группы $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$ представляет собой S^+, а ее определяющие соотношения суть равенства Γ^+.

Итак, $\overline{\mathfrak{A}}_{p_1p_2}$ есть $\mathfrak{A}_\Gamma \otimes \mathfrak{A}_{\Gamma^+}$. Если $XMY \to XNY$ есть элементарное преобразование в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$ (соответственно $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$), то преобразование

$$(XMY)^+ \to (XNY)^+$$

есть элементарное преобразование в группе $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$ (соответственно $\mathfrak{A}_\Gamma$).

Назовем эти элементарные преобразования групп $\mathfrak{A}_\Gamma$ и $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$ *взаимно симметричными*. Если $X_0 \to \ldots \to X_k$ есть последовательность элементарных преобразований группы $\mathfrak{A}_\Gamma$ ($\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$), то последовательность $X_0^+ \to \ldots \to X_k^+$ есть последовательность элементарных преобразований в $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$ (соответственно в $\mathfrak{A}_\Gamma$). В таком случае, из равенства слов $X = Y$ в $\mathfrak{A}_\Gamma$ следует равенство слов $X^+ = Y^+$ в $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$.

Из свойств свободного произведения вытекает следующее замечание, которым мы в дальнейшем будем пользоваться.

Если слова X и Y, состоящие из букв алфавита группы $\mathfrak{A}_\Gamma$ (соответственно $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$), равны в группе $\mathfrak{A}_\Gamma \otimes \mathfrak{A}_{\Gamma^+}$, то они равны в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$ (соответственно $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$).

ЛЕММА. *Буквы p_1^σ и p_2^σ образуют правильную систему проходных букв.*

Для доказательства этой леммы надо установить, что соответствия L_{p_1} и L_{p_2} — изоморфизмы в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$. Мы докажем это утверждение для соответствия L_{p_1}. (Доказательство для соответствия L_{p_2} аналогично.)

Как указано в § 1, соответствие L_{p_1} мы можем получить непосредственно из равенств (1); оно имеет вид:

$$u' \equiv ((G_{i_1}^+)^{-1} F_{i_1}^+)^{\sigma_1} ((G_{i_2}^+)^{-1} F_{i_2}^+)^{\sigma_2} \ldots ((G_{i_k}^+)^{-1} F_{i_k}^+)^{\sigma_k} \text{———}$$
$$\text{———} w' \equiv (G_{i_1} (F_{i_1})^{-1})^{\sigma_1} (G_{i_2} (F_{i_2})^{-1})^{\sigma_2} \ldots (G_{i_k} (F_{i_k})^{-1})^{\sigma_k}$$

(штрихи над буквами u и w означают здесь принадлежность к соответствию L_{p_1}. В соответствии L_{p_2} мы будем отмечать u и w двумя штрихами). Отсюда следует, что

$$w'^{-1} \equiv (G_{i_k} F_{i_k}^{-1})^{-\sigma_k} \ldots (G_{i_2} F_{i_2}^{-1})^{-\sigma_2} (G_{i_1} F_{i_1}^{-1})^{-\sigma_1}.$$

Из свойств операции $+$ следует, что

$$(w'^{-1})^+ \equiv ((F_{i_1}^+)^{-1} G_{i_1}^+)^{-\sigma_1} ((F_{i_2}^+)^{-1} G_{i_2}^+)^{-\sigma_2} \ldots ((F_{i_k}^+)^{-1} G_{i_k}^+)^{-\sigma_k} \equiv$$
$$\equiv ((G_{i_1}^+)^{-1} F_{i_1}^+)^{\sigma_1} ((G_{i_2}^+)^{-1} F_{i_2}^+)^{\sigma_2} \ldots ((G_{i_k}^+)^{-1} F_{i_k}^+)^{\sigma_k} \equiv u'.$$

В итоге мы получаем тождество:

$$u' \equiv ((w')^{-1})^+. \tag{4}$$

Допустим, что $u' = 1$ в группе $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$, т. е. в группе $\mathfrak{A}_\Gamma \otimes \mathfrak{A}_{\Gamma^+}$. Так как слово u состоит из букв алфавита группы $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$, то, согласно сделанному замечанию, $u' = 1$ в группе $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$. Но слово w'^{-1} симметрично слову u', поэтому оно равно 1 в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$ и, следовательно, w'^{-1} также равно 1 в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$ и, значит, в группе $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$. Обратно, если $w' = 1$ в $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$, то w'^{-1} также равно 1 в $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$. Но оно состоит из букв алфавита группы $\mathfrak{A}_\Gamma$, следовательно, равно 1 и в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$. Тогда симметричное ему слово, т. е. слово u', равно 1 и в $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$ и, следовательно, в группе $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$. Этим доказано, что соответствие L_{p_1} есть изоморфизм в группе $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$.

Для соответствия L_{p_2} мы будем иметь тождество, аналогичное тождеству (4). Оно имеет вид

$$u'' = (w''^{-1})^+,$$

только здесь слово u'' состоит из букв алфавита $\mathfrak{A}_\Gamma$, а слово w'' — из букв алфавита $\mathfrak{A}_{\Gamma^+}$. Мы представим это тождество в виде:

$$w'' \equiv (u''^{-1})^+. \tag{5}$$

Из этого тождества можно заключить, аналогично тому, как это сделано выше, что соответствие L_{p_2} есть изоморфизм в группе $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$.

§ 5. Группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ специального типа

В этом параграфе мы рассмотрим некоторый частный вид группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ и в дальнейшем нам будут нужны только группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ этого вида. Поэтому мы сохраним за ними прежнее обозначение.

Для определения группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ специального типа мы зададим произвольную совокупность букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Эта совокупность не является алфавитом какой-либо группы, в ней нет обратных элементов, и в дальнейшем она войдет как часть в положительный алфавит определяемой группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$. Рассмотрим произвольную совокупность пар слов

$$(A_i, B_i), \quad i = 1, \ldots, \lambda,$$

состоящих из букв a_j, причем каждая буква a_j входит хотя бы в одну из этих пар.

Для того чтобы определить алфавит группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, достаточно, как мы знаем, описать класс букв S. Этот класс в данном случае состоит из четырех видов букв:

$$a_1, \ldots, a_n, \quad q_1, \ldots, q_\lambda, \quad r_1, \ldots, r_\lambda, \quad l_1, \ldots, l_\lambda.$$

Буквы a_j^σ мы будем называть *основными*.

Число букв q_i равно числу пар (A_i, B_i), так же как и число букв r_i и l_i.

Определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, содержащие букву p_1, имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} A_i^+ \, p_1 A_i = q_i^+ \, l_i^+ \, p_1 l_i q_i, \\ r_i^+ \, p_1 r_i = p_1. \end{gathered} \tag{1}$$

Определяющие соотношения, содержащие букву p_2, имеют вид:

$$B_i p_2 B_i^+ = r_i l_i p_2 l_i^+ r_i^+,$$
$$q_i p_2 q_i^+ = p_2. \qquad (2)$$

Определяющие соотношения типа Г имеют вид:

$$q_i a_j = a_j q_i^2, \quad r_i^2 a_j = a_j r_i, \quad l_i a_j = a_j l_i. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, \lambda, \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что группа $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ вполне определяется системой пар $(A_i B_i)$.

Тождества (4) § 4 имеют вид:

$$u' \equiv (w'^{-1})^+,$$

где u' и w' — правые и левые части соответствия L_{p_1}.

Слово w'^{-1} мы, как всегда, обозначим через v'. В этом обозначении тождество (4) примет вид:

$$u' \equiv v'^+. \qquad (3)$$

Соответствие же L_{p_1} может быть записано в виде

$$v'^+ —— v'^{-1}.$$

Выпишем слово v' явным образом:

$$v' \equiv R_1 (l_{i_1} q_{i_1} A_{i_1}^{-1})^{\sigma_1} R_2 (l_{i_2} q_{i_2} A_{i_2}^{-1})^{\sigma_2} \ldots R_k (l_{i_k} q_{i_k} A_{i_k})^{\sigma_k} R_{k+1}. \qquad (4)$$

Здесь слова R_j представляют собой произвольные произведения букв r_i^σ, они могут быть, в частности, и пустыми. Необходимо условиться, что в произведении (4) множителей

$$(l_{i_h} q_{i_h} A_{i_h}^{-1})^{\sigma_h}$$

может и не быть, тогда оно сводится к слову R_1.

Перейдем к рассмотрению соответствия L_{p_2}. Для этого соответствия имеет место тождество (5) § 3:

$$w'' \equiv (u''^{-1})^+,$$

которое можно привести к виду:

$$v'' \equiv u''^+. \qquad (5)$$

Тогда соответствие L_{p_2} представится в форме

$$u'' — (u''^{-1})^+.$$

Легко видеть, что слово u'' имеет вид:

$$u'' \equiv Q_{s+1} (l_{j_s}^{-1} r_{j_s}^{-1} B_{j_s})^{\sigma_s} \ldots Q_2 (l_{j_1}^{-1} r_{j_1}^{-1} B_{j_1}^{-1})^{\delta_1} Q_1, \qquad (6)$$

где Q_j — произведение множителей q_i^σ.

Множители

$$(l_{i_h} q_{i_h} A_{i_h}^{-1})^{\sigma_h}$$

в (4) и множители

$$(l_{j_h}^{-1} r_{j_h}^{-1} B_{j_h})^{\delta_h}$$

в (6) будем называть *главными*. Для слова u'' в (6) главных множителей также может не быть.

Условимся слова v' обозначать через v, слова u' — через v^+, слова u'' — через u и слова v'' — через u^+. При этом, очевидно, смешения в обозначениях не возникает.

Рассмотрим систему продукций, заданную парами (A_i, B_i), $i = 1, \ldots, \lambda$. Обозначим эту систему через $\mathfrak{K}$. Группу $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ и систему продукций $\mathfrak{K}$, построенные по одной и той же системе пар (A_i, B_i), назовем *соответствующими друг другу*.

Между группой $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ и соответствующей ей системой продукций $\mathfrak{K}$ существует связь, которая выражается, в частности, следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. *Если $vXu = Y$ в группе $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, где слово v^{-1} есть некоторая правая часть изоморфизма L_{p_1}, слово u — левая часть изоморфизма L_{p_2}, а слова X и Y состоят из букв основного положительного алфавита, то $X = Y$ в соответствующей системе продукций.*

Так как слова vXu и Y не содержат опорных букв p_1^σ и p_2^σ, то они принадлежат группе $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$. Система букв p^σ и p_2^σ образует правильную систему проходных букв, поэтому (следствие 2 из леммы 3 § 2) слова vXu и Y равны и в группе $\bar{\mathfrak{A}}_{p_1 p_2}$, т. е. в группе $\mathfrak{A}_\Gamma \otimes \mathfrak{A}_{\Gamma^+}$. Рассматриваемые слова состоят из букв алфавита группы $\mathfrak{A}_\Gamma$, следовательно, они равны и в группе $\mathfrak{A}_\Gamma$. Для доказательства теоремы введем некоторый индекс слова vXu, равный числу главных множителей, заключенных в словах v и u. Если этот индекс обозначить через ρ, то $\rho = k + s$, где k — число главных множителей слова v, а s — слова u. Доказательство теоремы мы проведем индукцией по индексу ρ. Если $\rho = 0$, то

$$vXu = R_1 X Q_1.$$

Если слова $R_1 X Q_1$ и Y равны в группе $\mathfrak{A}_\Gamma \equiv \mathfrak{A}_{lqr}$, то их проекции на основной алфавит равны в свободной группе. Так как R_1 и Q_1 основных букв не содержат, то проекция слова $R_1 X Q_1$ на основной алфавит есть слово X. Проекция слова Y есть Y. Значит, $X = Y$ в свободной группе. Слова X и Y состоят только из букв *положительного* алфавита, поэтому $X \equiv Y$. Отсюда следует, что $X = Y$ и в $\mathfrak{K}$. Итак, для $\rho = 0$ теорема доказана.

Предположим, что она верна для всех слов с индексом ρ, меньшим числа h. Покажем, что тогда она имеет место и для слов с индексом, равным h.

Группа $\mathfrak{A}_\Gamma$ есть группа $\mathfrak{A}_{lqr}$. Как мы отмечали, совокупность букв l_j^σ является правильной системой проходных букв. Проекция слова Y на алфавит букв l_j пуста. Поэтому, на основании следствия 1 из леммы 3 § 2, можно перевести слово vXu в слово Y последовательностью преобразований расширенной системы без вставок проходных букв l_j. Рассмотрим такую последовательность:

$$vXu \to \ldots \to Y. \tag{7}$$

Запишем слово vXu, представив слова v и u в явном виде. Это можно сделать на основании тождеств (4) и (6). Слово vXu примет вид:

$$R_1 (l_{i_1} q_{i_1} A_{i_1}^{-1})^{\sigma_1} \ldots R_k (l_{i_k} q_{i_k} A_{i_k}^{-1})^{\sigma_k} R_{k+1} X Q_{s+1} (l_{j_s}^{-1} r_{j_s}^{-1} B_{j_s})^{\delta_s} \ldots$$
$$\ldots Q_2 (l_{j_1}^{-1} r_{j_1}^{-1} B_{j_1})^{\delta_1} Q_1. \qquad (8)$$

Итак, слово (8) последовательностью преобразований (7) переводится в слово Y. В этой последовательности преобразований вставок букв l_j нет. Все буквы l_j должны исчезнуть в этих преобразованиях. Но исчезнуть они могут только путем взаимных сокращений. Предположим, что какие-нибудь из этих букв, заключенных в множителе v, взаимно сократились. Тогда в слове v нашлись бы две взаимно сокращающиеся буквы $l_{i_\nu}^{\sigma_\nu}$ и $l_{i_\nu}^{-\sigma_\nu}$, между которыми других таких букв нет. Рассмотрим такие взаимно сокращающиеся соседние буквы l^σ и $l^{-\sigma}$. Они должны принадлежать главным множителям слова v, причем между этими главными множителями других главных множителей нет. Индексы i_ν у букв l^σ и $l^{-\sigma}$ этих главных множителей должны быть одинаковыми, поэтому мы их будем в последующих рассуждениях опускать. Очевидно, что расположение этих множителей в слове vXu имеет вид:

$$M (lqA^{-1})^\sigma R (lqA^{-1})^{-\sigma} NXu,$$

где R есть произведение букв r_i^σ, а

$$M (lqA^{-1})^\sigma R (lqA^{-1})^{-\sigma} N \equiv v.$$

Возможны два случая: $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$. Рассмотрим их.

Первый случай. Если $\sigma = +1$, то слово vXu можно записать в виде

$$MlqA^{-1}RAq^{-1}l^{-1}NXu.$$

Буквы l и l^{-1} взаимно сокращаются в последовательности преобразований, не содержащей вставок букв l_j. Между этими буквами других букв l_j^σ нет. На основании леммы 5 § 3, мы можем заключить, что в слове $qA^{-1}RAq^{-1}$ буквы q^σ и r^σ исчезают в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Вычеркнем в этом слове буквы q и q^{-1}; на основани леммы 4 § 3, в оставшемся слове исчезают буквы r^σ в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. На основании леммы 2 § 3, буквы r^σ исчезают и в слове R в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Но это слово не содержит других букв и его проекция на основной алфавит пуста.

На основании следствия из леммы 1 § 3, $R = 1$ в свободной группе. В таком случае множители lqA^{-1}, R и $Aq^{-1}l^{-1}$ слова v полностью сокращаются. Если мы произведем это сокращение, то получим слово $MNXu$, равное vXu в свободной группе. Произведение MN есть также правая часть соответствия L_{p_1}, но с меньшим числом главных множителей, чем слово v. Следовательно, слово $MNXu$ само есть слово типа vXu, но его индекс ρ меньше h. Так как $MNXu = Y$ в $\mathfrak{A}_{lqr}$, то, по предположению индукции, $X = Y$ в $\mathfrak{K}$.

Итак, для этого случая теорема доказана.

Второй случай. Пусть $\sigma = -1$; тогда слово vXu можно записать следующим образом:

$$MAq^{-1}l^{-1}RlqANXu,$$

где

$$MAq^{-1}l^{-1}RlqAN \equiv v.$$

Рассуждая, как выше, мы придем к выводу, что в слове R, заключенном между взаимно сокращающимися буквами l и l^{-1}, должны исчезать буквы r^{σ} в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Но так как это слово содержит только буквы r^{σ}, то оно должно равняться 1 в группе $\mathfrak{A}_{qr}$ и, следовательно, в свободной группе. Но тогда все слово $Aq^{-1}l^{-1}RlqA^{-1}$ равно 1 в свободной группе. Следовательно, мы можем опять понизить индекс ρ слова vXu, перейдя к равному слову $MNXu$. Как и в предыдущем случае, по предположению индукции, $X = Y$ в $\mathfrak{K}$.

Аналогичным образом можно показать, что если буквы l^{σ}, заключенные в отрезке u слова vXu, взаимно сокращаются в преобразованиях (7), то $X = Y$ в $\mathfrak{K}$. Остается рассмотреть случай, когда не происходит сокращений букв l^{σ} ни внутри v, ни внутри u. Тогда последняя из букв l^{σ}, заключенная в отрезке v, должна сократиться с первой из букв l^{σ}, заключенных в отрезке u слова vXu. Действительно, если бы последняя из букв l^{σ} слова v сократилась не с первой буквой $l^{-\sigma}$ слова u, то какие-то из букв l^{σ}, заключенные между взаимно сокращающимися, должны были бы сократиться между собой. Но эти буквы уже входили бы в слово u, чего, по предположению, не может быть.

Итак, буква $l_{i_k}^{\sigma_k}$ должна сократиться с буквой $l_{j_s}^{-\delta_s}$ в преобразованиях (7). В таком случае $i_k = j_s$, и слова v и u могут быть представлены в следующем виде:

$$v \equiv v_1 (lqA^{-1})^{\sigma_k} R_{k+1},$$

$$u \equiv Q_{s+1} (l^{-1}r^{-1}B)^{\delta_s} u_1.$$

Здесь индексы i_k и j_s опущены, а слово v_1^{-1} является правой частью соответствия L_{p_1} (соответственно u_1 — левой частью соответствия L_{p_2}).

Возможны два случая: $\sigma_k = +1$ и $\sigma_k = -1$.

Рассмотрим первый случай. Здесь δ_s также равно 1, иначе буквы l^{σ_k} и $l^{-\delta_s}$ не могли бы сократиться между собой. Отрезок слова vXu, заключенный между рассматриваемыми сокращающимися буквами l и l^{-1}, представляет собой слово

$$qA^{-1}R_{k+1}XQ_{s+1}. \tag{9}$$

В силу леммы 5 § 3, в этом слове буквы q^{σ} и r^{σ} исчезают в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. На основании леммы 4 § 3, в слове, полученном из слова (9) вычеркиванием букв q^{σ}, должны исчезать буквы r^{σ}. Это значит, что в слове $A^{-1}R_{k+1}X$ должны исчезать буквы r^{σ}. Но тогда, в силу леммы 2 § 3, в слове R_{k+1} эти буквы также исчезают. Мы уже видели, что в таком случае слово R_{k+1} равно 1 в свободной группе. Таким образом, слово (9) равно слову

$$qA^{-1}XQ_{s+1} \tag{10}$$

в свободной группе. В этом слове буквы q^σ исчезают в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Проекция слова (10) на основной алфавит есть слово

$$A^{-1}X,$$

причем слова A и X состоят из букв основного положительного алфавита.

Покажем, что в слове $A^{-1}X$ все буквы, входящие в A^{-1}, сокращаются с буквами слова X. Если бы это было не так, то после всех сокращений слово $A^{-1}X$ приняло бы вид $a^{-1}T$, где a^{-1} — первая из оставшихся букв слова A^{-1}, а T — остальная часть слова. Слово $qa^{-1}TQ_{s+1}$ равно слову (9) в свободной группе. Следовательно, в нем также должны исчезать буквы q^σ и r^σ. Но проекция слова $qa^{-1}TQ_{s+1}$ на основной алфавит несократима. К этому слову применим лемму 3 § 3, в силу которой в нем не могут исчезать буквы q^σ и r^σ.

Мы пришли к противоречию и можем заключить, что буквы, входящие в слово A^{-1}, полностью сокращаются в слове $A^{-1}X$. Это значит, что

$$X \equiv AX_0.$$

Таким образом, слово (9) равно в свободной группе слову

$$qX_0Q_{s+1}.$$

В последнем слове буквы q^σ и r^σ также исчезают, поэтому оно равно в группе $\mathfrak{A}_{qr}$ слову, состоящему только из основных букв. На основании леммы 1 § 2, это последнее слово равно в свободной группе проекции слова qX_0Q_{s+1} на основной алфавит. Итак,

$$qX_0Q_{s+1} = X_0$$

в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Отсюда следует, что слово $lqX_0Q_{s+1}l^{-1}$ равно X_0 в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$, так как буква l коммутирует с буквами слова X_0. Таким образом,

$$vXu = v_1X_0r^{-1}Bu_1$$

в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$. Из определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}_{qr}$, содержащих букву r и имеющих вид

$$r^2a_j = a_jr,$$

следуют равенства:

$$a_jr^{-1} = r^{-2}a_j.$$

Так как X_0 состоит только из основных букв положительного алфавита, то из последних равенств вытекает, что

$$X_0r^{-1} = r^{-\alpha}X_0$$

(где α — некоторое целое число) в группе $\mathfrak{A}_{qr}$. Следовательно, слово

$$v_1X_0r^{-1}Bu_1$$

равно слову

$$v_1r^{-\alpha}X_0Bu_1$$

в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$ и слову

$$vXu = v_1r^{-\alpha}X_0Bu_1$$

в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$.

Число главных множителей слова $v_1 r^{-\alpha}$ меньше числа главных множителей слова v; точно так же число главных множителей слова u_1 на 1 меньше числа главных множителей слова u.

Итак, в случае, когда $\sigma_k = 1$, слово vXu равно в группе $\mathfrak{A}_{lqr}$ слову $v_1 r^{-\alpha}(X_0 B) u_1$, т. е. слову того же типа vXu, но с индексом ρ, меньшим h. А в таком случае, по предположению индукции, $X_0 B = Y$ в $\mathfrak{K}$. Так как $X \equiv AX_0$, то, по определению преобразований в системе продукций $\mathfrak{K}$, $X = X_0 B$ в $\mathfrak{K}$. Итак, $X = Y$ в $\mathfrak{K}$, и для случая $\sigma_k = +1$ теорема доказана.

Рассуждения для случая $\sigma_k = -1$ аналогичны проведенным.

§ 6. Основные теоремы

ТЕОРЕМА 1. *Для каждой системы продукций $\mathfrak{K}$ существует группа $\mathfrak{A}$ с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений такая, что каждому слову X системы продукции можно поставить в соответствие слово $\Phi(X)$ группы $\mathfrak{A}$, и это соответствие обладает следующими свойствами:*

1. *Существует алгоритм, позволяющий по слову X найти слово $\Phi(X)$.*
2. *Если $X = Y$ в $\mathfrak{K}$, то $\Phi(X)$ сопряжено $\Phi(Y)$ в группе $\mathfrak{A}$, и обратно.*

Рассмотрим произвольную систему продукций $\mathfrak{K}$. Она определяется некоторой совокупностью пар слов:

$$(A_i,\ B_i).$$

Эта же совокупность пар слов однозначно определяет группу $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ специального типа, рассмотренную в предыдущих параграфах. Покажем, что эта группа удовлетворяет требованиям теоремы. Для этого установим соответствие $\Phi(X)$ следующим образом:

$$\Phi(X) \equiv p_1 X p_2 X^+ \tag{1}$$

(алфавит системы продукций $\mathfrak{K}$ является в то же время основным положительным алфавитом группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$. Поэтому слово X одновременно является элементом и системы продукций $\mathfrak{K}$ и группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$). Соответствие Φ, очевидно, удовлетворяет первому требованию теоремы. Для того чтобы доказать, что оно удовлетворяет и второму требованию, покажем, что если $X = Y$ в $\mathfrak{K}$, то $\Phi(X) \sim \Phi(Y)$ в $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, и обратно, если $\Phi(X) \sim \Phi(Y)$ в $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, то $X = Y$ в $\mathfrak{K}$.

Начнем с доказательства второго утверждения. Допустим, что для некоторой пары слов X и Y имеет место:

$$\Phi(X) \sim \Phi(Y).$$

Это значит, что

$$p_1 X p_2 X^+ \sim p_1 Y p_2 Y^+.$$

Если эти два слова сопряжены в группе $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$, то первое можно перевести во второе последовательностью элементарных преобразований системы сопряженностей группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$:

$$p_1 X p_2 X^+ \to \ldots \to p_1 Y p_2 Y^+. \tag{2}$$

Проекция слова $p_1 Y p_2 Y^+$ на алфавит проходных букв есть слово $p_1 p_2$. Это слово не пусто и несократимо; система проходных букв p_1^σ и p_2^σ — правильная. На основании следствия из леммы 4 § 2, можно предполагать, что

в последовательности (2) нет вставок букв p_1 и p_2. В таком случае две буквы p_1 и p_2, имеющиеся в слове $p_1Xp_2X^+$, сохранятся во всех словах последовательности (2), других же букв p_1^σ и p_2^σ в этих словах нет.

Буквы p_1 и p_2, заключенные в словах последовательности (2), сохраняют в продолжение всех этих преобразований свои индивидуальности. На основании леммы 2′ § 2, мы можем заменить последовательность (2) канонической последовательностью, связанной с буквами p_1 и p_2. Мы получим последовательность

$$p_1Xp_2X^+ \to \ldots \to v^+p_1vXup_2u^+X^+ \to \ldots \to p_1Y_1p_2Y_2$$

(здесь мы пользуемся обозначениями, введенными в § 5: $v' \equiv v$, $u'' \equiv u$, $u' \equiv v^+$, $v'' \equiv u^+$). Напомним, что в преобразованиях системы сопряженностей мы условились не различать слова, отличающиеся только круговой перестановкой букв. Совпадение же слов с точностью до такой перестановки мы обозначаем знаком $\approx$.

В последовательности

$$v^+p_1vXup_2u^+X^+ \approx p_1vXup_2u^+X^+v^+ \to \ldots \to p_1Yp_2Y^+ \tag{3}$$

никаких преобразований с буквами p_1 и p_2 не происходит. Поэтому в последовательности (3) слово vXu перейдет в Y. Легко видеть, что преобразования, переводящие vXu в Y, принадлежат уже группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$, и мы имеем равенство $vXu = Y$ в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$. Но тогда, на основании теоремы § 5, $X = Y$ в системе продукций $\mathfrak{R}$.

Допустим обратное, а именно, что слова X и Y равны в системе продукций $\mathfrak{R}$. Покажем, что слова $\Phi(X)$ и $\Phi(Y)$ сопряжены в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$. Для этого достаточно ограничиться случаем, когда слово Y получается из слова X одним элементарным переходом системы продукций. Тогда наше утверждение будет следовать из транзитивности отношения сопряженности. Итак, пусть X преобразуется в Y элементарным переходом системы продукций $\mathfrak{R}$. Тогда в соответствии со схемами переходов системы $\mathfrak{R}$ возможны два случая:

$$X \equiv AZ, \quad Y \equiv ZB$$

и

$$X \equiv ZB, \quad Y \equiv AZ,$$

где пара (A, B) принадлежит к числу пар (A_i, B_i), определяющих систему продукций $\mathfrak{R}$.

Мы ограничимся рассмотрением первого случая. Нам надо доказать, что слова

$$p_1AZp_2Z^+A^+ \text{ и } p_1ZBp_2B^+Z^+$$

сопряжены в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$.

Напомним одно замечание, которое было сделано в § 2: если p — проходная буква некоторой группы, а слова u и v^{-1} соответствуют друг другу в L_p, то в этой группе имеет место равенство

$$p = upv.$$

Соответствие L_{p_1} в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$ в принятых нами обозначениях имеет вид:

$$v^+ \text{———} v^{-1}.$$

Отсюда следует, что, какова бы ни была правая часть v^{-1} соответствия L_{p_1}, равенство

$$p_1 = v^+p_1v$$

справедливо в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$. Таким же образом можно заключить, что, какова бы ни была левая часть u соответствия L_{p_2}, в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$ имеет место равенство

$$p_2 = up_2u^+.$$

Возьмем некоторые определенные слова v и u. Пусть ν есть число букв в слове Z. Положим

$$v \equiv r^{2^\nu}lqA^{-1} \quad \text{и} \quad u \equiv q^{-2^\nu}l^{-1}r^{-1}B.$$

Из представлений (4) и (6) § 5 легко убедиться, что написанные здесь слова действительно представляют собой: первое — правую часть L_{p_1}, а второе — левую часть L_{p_2} (напомним, что у входящих сюда букв опущен индекс i).

На основании сказанного, мы будем иметь следующие равенства в группе:

$$p_1 = (A^+)^{-1}q^+l^+r^{+2^\nu}p_1r^{2^\nu}lqA^{-1},$$

$$p_2 = q^{-2^\nu}l^{-1}r^{-1}Bp_2B^+r^{+^{-1}}l^{+^{-1}}q^{+^{-2^\nu}}. \qquad (4)$$

Заменив в слове $p_1AZp_2Z^+A^+$ буквы p_1 и p_2 равными выражениями, получим слово

$$(A^+)^{-1}q^+l^+r^{+2^\nu}p_1r^{2^\nu}lqA^{-1}AZq^{-2^\nu}l^{-1}r^{-1}Bp_2B^+r^{+^{-1}}l^{+^{-1}}q^{+^{-2^\nu}}Z^+A^+,$$

равное слову $p_1AZp_2Z^+A^+$ в группе $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$.

Произведем в полученном слове круговую перестановку букв и получим сопряженное ему слово:

$$p_1r^{2^\nu}lqA^{-1}AZq^{-2^\nu}l^{-1}r^{-1}Bp_2B^+r^{+^{-1}}l^{+^{-1}}q^{+^{-2^\nu}}Z^+A^+A^{+^{-1}}q^+l^+r^{+2^\nu}.$$

Произведя сокращения в этом слове, найдем:

$$p_1r^{2^\nu}lqZq^{-2^\nu}l^{-1}r^{-1}Bp_2B^+r^{+^{-1}}l^{+^{-1}}q^{+^{-2^\nu}}Z^+q^+l^+r^{+2^\nu}.$$

Из определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}_{p_1p_2}$, имеющих вид $qa_j = a_jq^2$, где a_j — любая буква положительного основного алфавита, вытекает, что

$$qZ = Zq^{2^\nu}.$$

Отсюда, по симметрии, имеем:

$$Z^+q^+ = q^{+2^\nu}Z^+.$$

Применяя эти равенства и производя затем сокращения, получим:

$$p_1r^{2^\nu}lZl^{-1}r^{-1}Bp_2B^+r^{+^{-1}}l^{+^{-1}}Z^+l^+r^{+2^\nu}.$$

Буквы l^σ коммутируют с буквами слова Z, а буквы $l^{+\sigma}$ — с буквами слова Z^+.

Посредством этих коммутаций и последующих сокращений придем к слову:

$$p_1 r^{2^\nu} Z r^{-1} B p_2 B^+ r^{+^{-1}} Z^+ r^{+^{2^\nu}}.$$

Из определяющих соотношений группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ вида

$$r^2 a_j = a_j r,$$

$$a_j^+ r^{+2} = r^+ a_j^+$$

следуют равенства:

$$r^{2^\nu} Z = Zr \quad \text{и} \quad Z^+ r^{+^{2^\nu}} = r^+ Z^+.$$

После применения этих равенств и сокращений получим слово:

$$p_1 Z B p_2 B^+ Z^+.$$

Таким образом, мы преобразовали в системе сопряженностей группы $\mathfrak{A}_{p_1 p_2}$ слово

$$p_1 A Z p_2 Z^+ A^+$$

в слово

$$p_1 Z B p_2 B^+ Z^+,$$

что и требовалось. Этим теорема окончательно доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Существует группа с конечным числом образующих, заданная конечным числом определяющих соотношений, для которой проблема сопряженности неразрешима.*

Как известно, на основании результатов Поста ([3]) и Маркова ([4]), существует система продукций, для которой нет алгоритма, позволяющего установить равенство и неравенство слов в этой системе.

На основании теоремы 1 § 6, для этой системы продукций существует группа, для которой не может существовать алгоритма для решения проблемы сопряженности.

Полученный результат имеет следующие геометрические приложения. Вопрос о гомотопии путей на полиэдре равносилен вопросу о сопряженности элементов фундаментальной группы этого полиэдра.

С другой стороны, каждая группа с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений является фундаментальной группой некоторого двумерного полиэдра. Из полученного результата вытекает, что можно построить двумерный полиэдр, для которого проблема гомотопии путей неразрешима.

Поступило
24.IV.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества, Доклады Ак. наук СССР, т. 85, № 4 (1952), 713—714.

[2] Post E. L., Formal reductions of the general combinatorial decision problem, Amer. J. Math,, 65 (1943), 197—215.

[3] Post E. L., A variant of a recursively unsolvable problem, Bull. Amer. Math. Soc., 52, № 4 (1946), 264—268.

[4] Марков А. А., Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. II, Доклады Ак. наук СССР, т. 58, № 3 (1947), 353—356.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
18 (1954), 525—578

И. Р. ШАФАРЕВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ С ЗАДАННОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППОЙ ГАЛУА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается, что над любым полем алгебраических чисел существует бесконечное число расширений с наперед заданной разрешимой группой Галуа.

Введение

В настоящей работе излагается метод построения расширений заданного поля алгебраических чисел, имеющих наперед заданную разрешимую группу Галуа. В частности, дается доказательство существования таких расширений.

Основным аппаратом, которым мы пользуемся, являются введенные в работе ([6]) инварианты полей, группа Галуа которых имеет порядок l^α, и развитая в той же работе теория композиции гомоморфизмов групп порядка l^α и функций гомоморфизмов. Эти соображения, относящиеся к полям с группой Галуа порядка l^α, оказываются применимыми здесь, так как задача построения полей с заданной разрешимой группой Галуа тесно связана с некоторыми вопросами теории полей с группой Галуа порядка l^α. Эта связь дается теоретико-групповой теоремой, доказанной независимо Д. К. Фаддеевым [см. ([4]) и ([5])] и Гашютцем (Gaschütz) ([1]). Если высказать теорему Д. К. Фаддева-Гашютца как теорему не об абстрактных группах, а о группах Галуа, то она получит следующую формулировку [см. Kochendörffer ([2])]. Пусть задана группа $\mathfrak{G}$ с абелевым нормальным делителем A порядка l^α и $\Omega \subset L \subset k \subset K \subset K^*$ есть последовательность полей со следующими свойствами: k/Ω нормально и имеет группу Галуа $G \cong \mathfrak{G}/A$, L принадлежит в k к силовской l-подгруппе H группы G, K/L нормально и группа Галуа его изоморфна силовской подгруппе $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$, причем поля, сопряженные с K/Ω, независимы над k и их композит есть K^*. Тогда у поля K^*/k имеется подполе с группой Галуа, изоморфной $\mathfrak{G}$. В силу этой теоремы, при построенном поле k/Ω с группой Галуа G, построение поля с группой Галуа $\mathfrak{G}$ над Ω сводится к построению содержащего k поля K/L с заданной группой Галуа $\mathfrak{H}$ порядка l^α, но такого, что поля, сопряженные к K/Ω, независимы над k. При этом для построения поля с заданной разрешимой группой Галуа этот прием надо применять несколько раз и добиться того, чтобы на каждом шаге конструкция указанного поля с группой Галуа порядка l^α

действительно была выполнима. Эта задача и решается в настоящей статье.

Мы предполагаем все рассматриваемые поля k/Ω шольцевыми относительно некоторого модуля M (определение см. в § 1). Это гарантирует нам то, что в поле k/L (L принадлежит к силовской l-подгруппе группы Галуа k/Ω) любая система множителей, состоящая из корней степени l из единицы, распадается, а поэтому поле K с указанными выше свойствами можно построить, проводя убывающий центральный ряд в группе $\mathfrak{H}$ через нормальный делитель A.

Основная трудность заключается в том, что теперь нам необходимо, чтобы и вновь построенное поле K^* было шольцевым. Вводятся некоторые инварианты поля k/Ω, обращение которых в 1 является необходимым и достаточным условием того, что поле K^* может быть построено шольцевым. Наконец, того, чтобы инварианты поля k/Ω обратились в 1, можно добиться следующим образом. За G берется некоторая «приведенная свободная» группа, причем каждая разрешимая группа является факторгруппой некоторой «приведенной свободной». Вместо того, чтобы строить поле k с группой G, мы строим поле $\widetilde{k}$ с группой $\widetilde{G}$, которая является «приведенной свободной» того же типа, что и G, но с гораздо бо̀льшим числом образующих. Путем применения развитой в работе ([6]) теории композиции гомоморфизмов удается показать, что в $\widetilde{k}$ содержится подполе k с группой Галуа G и всеми инвариантами, равными 1.

Предполагается, что читателю известны работы ([6]), ([7]) и ([8]). Краткое изложение полученных здесь результатов было опубликовано раньше [см. ([9])]. Сравнительно с изложенным в ([9]) в настоящей работе удалось добиться некоторых упрощений. Наиболее существенное из них заключается в следующем. Как известно [см. Оre ([3])], в любой разрешимой группе имеется полудополненный нильпотентный нормальный делитель. Ввиду этого, любая разрешимая группа является факторгруппой некоторого полупрямого произведения групп порядков l^{α}. Проведение набросанного выше построения для таких групп заметно проще, чем для любых разрешимых. Мысль о том, что результат Оре, о котором сейчас было сказано, может быть применен к построению полей с разрешимой группой Галуа, была сообщена мне Д. К. Фаддевым, с любезного разрешения которого я ею здесь воспользовался.

В этой работе не раз встречаются ссылки на результаты Д. К. Фаддеева. Однако я обязан ему гораздо больше, чем могут отразить ссылки на его работы. За многократные обсуждения и советы, поданные мне Дмитрием Константиновичем, я рад высказать ему здесь глубокую благодарность.

§ 1. Инварианты относительно-абелевых полей

1. Формулировка задачи. Мы дадим сейчас определение одного класса полей, который интересен тем, что для него задача погружения имеет положительное решение в ряде наиболее важных случаев.

Пусть Ω есть поле алгебраических чисел, k/Ω — нормальное расширение и M — натуральное число, делящееся на все простые делители сте-

пени k/Ω. Расширение k/Ω будет называться шольцевым относительно M, если выполнены следующие условия:

1° Все простые дивизоры k, критические в k/Ω, имеют относительный порядок 1 над Ω.

2° Для любого простого критического дивизора $\mathfrak{P}$ поля k/Ω

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \equiv 1\,(M),$$

где $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$ означает абсолютную норму $\mathfrak{P}$.

3° Все простые делители M в Ω полностью распадаются в k.

4° Все вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры Ω распадаются в k только на вещественные.

Если λ есть простой делитель M, то максимальную степень λ, делящую M, мы будем обозначать в дальнейшем через M_λ.

Если $l \mid M$, $k \ni \zeta$, где ζ есть корень степени l из 1, и $(k:\Omega)$ и M являются степенями l, то понятие шольцевости совпадает с тем, которое введено для полей степени l^α в работе ([6]).

Если дано число M и его простой делитель l, то нормальное расширение k/Ω, содержащее корень ζ степени l из 1, будет называться шольцевым относительно M и l, если $k/\Omega(\zeta)$ шольцево относительно M и для любого не делящего l простого делителя $\mathfrak{p}$ дискриминанта поля k/Ω

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) \equiv 1\,(l). \tag{1}$$

Очевидно, что если $\Omega \ni \zeta$, то понятия шольцевости относительно M и шольцевости относительно M и l совпадают. В общем случае эти понятия связываются следующими двумя утверждениями.

ЛЕММА 1. *Если k/Ω — шольцево относительно M и $l \mid M$, то $k(\zeta)/\Omega$ — шольцево относительно M и l.*

Проверим сначала все требования шольцевости относительно M для поля $k(\zeta)/\Omega(\zeta)$.

1) Пусть $\overline{\mathfrak{P}}$ — критический простой дивизор $k(\zeta)/\Omega(\zeta)$, $\mathfrak{P}$ — его делитель в k, $\overline{\mathfrak{p}}$ — в $\Omega(\zeta)$, а $\mathfrak{p}$ — в Ω. Очевидно, что $\mathfrak{P}$ или критический в k/Ω или делитель l, так как $k(\zeta) = k \cdot \Omega(\zeta)$. Второй случай встретиться не может. В самом деле, если $\overline{\mathfrak{P}} \mid l$, то $\mathfrak{p}$ полностью распадается в k и получающаяся $\mathfrak{p}$-адическим замыканием алгебра $k_\mathfrak{p}$ является прямой суммой полей $\Omega_\mathfrak{p}$. Алгебра $\Omega(\zeta)_\mathfrak{p}$ есть прямая сумма полей $\Omega(\zeta)_{\overline{\mathfrak{p}}}$, а поэтому алгебра $k(\zeta)_\mathfrak{p} = k_\mathfrak{p}\,\Omega(\zeta)_\mathfrak{p}$ является также прямой суммой полей $\Omega(\zeta)_{\overline{\mathfrak{p}}}$. Из этого следует, что порядок и показатель ветвления для $\overline{\mathfrak{P}}$ в $k(\zeta)/\Omega$ — те же, что для $\overline{\mathfrak{p}}$ в $\Omega(\zeta)$. Из мультипликативности этих чисел при последовательных расширениях и из того, что они равны 1 в k/Ω следует, что они равны 1 и в $k(\zeta)/\Omega(\zeta)$. Таким образом, $(\overline{\mathfrak{P}}, l) = 1$, а простые делители l в $\Omega(\zeta)$ полностью распадаются в $k(\zeta)$.

Мы видим, что $\mathfrak{P}$ — критический в k/Ω. Так как он имеет там порядок 1, то любое число из k сравнимо с числом из Ω mod $\mathfrak{P}$. Из этого следует, что любое число из $k(\zeta)$ сравнимо с числом из $\Omega(\zeta)$ mod $\overline{\mathfrak{P}}$, а это и значит, что порядок $\overline{\mathfrak{P}}$ равен 1.

2) Из предыдущего рассуждения следует, что если $\overline{\mathfrak{P}}$ — критический

в $k(\zeta)/\Omega(\zeta)$, то его кратное $\mathfrak{P}$ — критическое в k/Ω. Так как

$$\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{P}}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^f, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \equiv 1\,(M),$$

то

$$\mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{P}}) \equiv 1\,(M).$$

3) Для простых делителей l свойство 3° уже доказано. Если $\lambda \mid M$, $\lambda \neq l$, то для простых делителей λ доказательство дословно повторяет доказательство свойства 3°.

Наконец, свойство 4° для $k(\zeta)/\Omega(\zeta)$ тривиально, так как при $l=2$ $\zeta \in \Omega$, а при $l>2$ $\Omega(\zeta)$ чисто мнимо.

Для проверки сравнения (1) заметим, что простые делители дискриминанта $k(\zeta)/\Omega$, взаимно простые с l, являются, как нами доказано, простыми делителями дискриминанта k/Ω, для них же сравнение (1) следует из условий 1° и 2° в определении шольцева поля, так как $l \mid M$.

Обращение леммы 1, вообще говоря, неверно, однако имеет место следующее, несколько более слабое утверждение.

ЛЕММА 2. *Если k/Ω — шольцево относительно M, k' — нормальное расширение k и $(k':k)$ является степенью l, где l — простой делитель M, то из шольцевости $k'(\zeta)/\Omega$ относительно M и l следует шольцевость k'/Ω относительно M.*

Проверим для k'/Ω все требования шольцевости относительно M.

1) Обозначим $k'(\zeta)$ через $\overline{k'}$, $k(\zeta)$ — через $\overline{k}$, $\Omega(\zeta)$ — через $\overline{\Omega}$. Пусть $\overline{\mathfrak{P}}'$ — простой дивизор $\overline{k'}$. Обозначим делящиеся на него простые дивизоры в k' через $\mathfrak{P}'$, в $\overline{k}$ — через $\overline{\mathfrak{P}}$, в k — через $\mathfrak{P}$, в $\overline{\Omega}$ — через $\overline{\mathfrak{p}}$, в Ω — через $\mathfrak{p}$. Поле классов вычетов дивизора $\mathfrak{p}$ в Ω будем обозначать через $\Omega[\mathfrak{p}]$.

Пусть $\mathfrak{P}'$ — критический дивизор k'/Ω. Ввиду условия (1),

$$\overline{k}[\overline{\mathfrak{P}}] = k[\mathfrak{P}].$$

С другой стороны,

$$\overline{k}'[\overline{\mathfrak{P}}'] = \overline{k}[\overline{\mathfrak{P}}]\,k'[\mathfrak{P}'] = k'[\mathfrak{P}'],$$

так как

$$\overline{k}[\overline{\mathfrak{P}}] = k[\mathfrak{P}] \subset k'[\mathfrak{P}'].$$

По условию,

$$\overline{k}'[\mathfrak{P}'] = \overline{k}[\overline{\mathfrak{P}}].$$

Отсюда следует, что

$$k'[\mathfrak{P}'] = k[\mathfrak{P}].$$

Так как, по условию,

$$k[\mathfrak{P}] = \Omega[\mathfrak{p}],$$

то

$$k'[\mathfrak{P}'] = \Omega[\mathfrak{p}],$$

что и означает, что $\mathfrak{P}'$ имеет в k'/Ω порядок 1.

2) Как мы доказали,

$$\bar{k}'[\bar{\mathfrak{P}}'] = k'[\mathfrak{P}'] = k[\mathfrak{P}].$$

Из этого следует, что

$$\mathfrak{N}(\bar{\mathfrak{P}}') = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}').$$

Таким образом,

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{P}') = \mathfrak{N}(\bar{\mathfrak{P}}') \equiv 1\,(M).$$

3) Пусть теперь $\bar{\mathfrak{R}}'$ — делитель M в $\bar{k}'$. По условию, мы имеем:

$$k_{\mathfrak{R}} = \Omega_{\mathfrak{r}}, \quad \bar{k}'_{\bar{\mathfrak{R}}'} = \bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}}.$$

Из соотношений

$$\bar{k}'_{\bar{\mathfrak{R}}'} = \bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}} k'_{\mathfrak{R}'} = \bar{\Omega}_{\bar{\mathfrak{r}}} k'_{\mathfrak{R}'}, \quad \bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}} = \bar{\Omega}_{\bar{\mathfrak{r}}} k_{\mathfrak{R}} = \bar{\Omega}_{\bar{\mathfrak{r}}}$$

мы выводим:

$$\bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}} = \bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}} k'_{\mathfrak{R}'}. \tag{2}$$

Так как по условию $(k':k)$, а следовательно, и $(k'_{\mathfrak{R}'}:k_{\mathfrak{R}})$ есть степень l, а $(\bar{k}:k)$, а значит и $(\bar{k}_{\bar{\mathfrak{R}}}:k_{\mathfrak{R}})$ делит $l-1$ и поэтому взаимно просто с l, то мы можем заключить из (2), что $k'_{\mathfrak{R}'} = k_{\mathfrak{R}} = \Omega_{\mathfrak{r}}$, что и означает, что простые делители M полностью распадаются в k'/Ω.

Наконец, условие 4° очевидно, так как при $l=2$ $\zeta \in \Omega$, а при $l>2$ k'/k имеет нечетную степень, а поэтому чисто вещественно.

Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению цепочки полей, которая соответствует, согласно теории Галуа, цепочке групп, исследуемой в теореме Фаддеева-Гашютца.

Расстотрим пять полей алгебраических чисел

$$\Omega \subset L \subset k \subset K \subset K^*, \tag{3}$$

обладающих следующими свойствами: k/Ω есть нормальное расширение с группой Галуа G, L принадлежит силовской l-подгруппе H, K/L нормально и является простым центральным расширением k/L, K/Ω не нормально и поля, сопряженные с K относительно Ω, независимы над k; их композит есть K^*.

В этом и следующем параграфах будет разобрана следующая задача: найти условия, которым должно удовлетворять шольцево относительно M и l поле k/Ω для того, чтобы существовало поле K, группа Галуа которого является заданным простым центральным расширением группы Галуа k/L и такое, чтобы поле K^*/Ω было шольцевым относительно M и l. Ответ будет дан в терминах некоторых инвариантов поля k/Ω, к определению которых мы сейчас и переходим. В дальнейшем мы будем все время считать поле k/Ω шольцевым относительно M и l. Будем, таким образом, предполагать, что k содержит корень ζ степени l из 1 и положим

$$\zeta^{\sigma}=\zeta^{g(\sigma)}, \quad \sigma \in G.$$

Очевидно, что

$$g(\sigma\tau) \equiv g(\sigma)\, g(\tau) \quad (l). \tag{4}$$

2. Инварианты $[\chi, X]$. Возьмем произвольный характер χ порядка l группы H и такое соответствующее ему число α_χ из L, что

$$\sqrt[l]{\alpha_\chi} \in k, \quad \sqrt[l]{\alpha_\chi}^{h} = \chi(h) \sqrt[l]{\alpha_\chi}, \quad h \in H.$$

Рассмотрим разложение α_χ на простые множители в k. Во-первых, мы имеем:

$$(\alpha_\chi) = \mathfrak{a}_\chi \mathfrak{b}^l,$$

где $\mathfrak{a}_\chi$ и $\mathfrak{b}$ — дивизоры из L, причем $\mathfrak{a}_\chi$ состоит только из критических простых дивизоров k/L. Так как α_χ определяется характером χ однозначно с точностью до l-равенства, то $\mathfrak{a}_\chi$ зависит только от χ, а не от выбора соответствующего ему α_χ.

Если $\mathfrak{p}$ есть простой делитель $\mathfrak{a}_\chi$ в L, то, ввиду условия 1° в определении шольцева поля,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{\Sigma h},$$

где $\mathfrak{P}$ — простой дивизор из k, а сумма в показателе распространена на все $h \in H$. Если $\sigma \in G$ и $\tau \in G$, то, как легко видеть,

$$\mathfrak{P}^{\sigma \Sigma h} = \mathfrak{P}^{\tau \Sigma h}$$

тогда и только тогда, когда классы по двойному модулю $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}} \sigma H$ и $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}} \tau H$ совпадают. Здесь $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$ означает группу разложения $\mathfrak{P}$.

Таким образом, разложение α_χ на простые множители в k имеет вид:

$$(\alpha_\chi) = \mathfrak{b}^l \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\Sigma \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S}) \sigma \Sigma h}$$

Здесь $\mathfrak{P}$ пробегает все не сопряженные между собой критические дивизоры k/L, $\mathfrak{S}$ — классы смежности G по двойному модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}, H)$ и σ — произвольный представитель $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим класс X l-инвариантных чисел поля k/L. Пусть $\mathfrak{D}(X)$ — дивизор, соответствующий классу X [определение его см. в ([6]), стр. 266], и μ — произвольный представитель X. Предположим, что для любого критического дивизора $\mathfrak{P}$

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma \overset{\bullet}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})\tau}, \mathfrak{P}) \approx 1. \tag{5}$$

Здесь $\overset{\bullet}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})$ означает функцию на классах смежности по двойному модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}})$, определенную соотношением

$$\overset{\bullet}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T}) \equiv \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T}^{-1})\, g(\tau) \ (l),$$

а τ, как и раньше, — произвольный представитель $\mathfrak{T}$.

Заметим, что функция $g(\tau)$ удовлетворяет условиям:

$$g(z\tau) = g(\tau z) = g(\tau h) = g(h\tau) = g(\tau), \quad h \in H, \quad z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}, \tag{6}$$

так что $\varphi^*(\mathfrak{T})$ действительно является функцией на классах смежности по модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}})$.

Для доказательства условий (6) нам достаточно показать, что

$$g(h) \equiv 1 \ (l), \quad h \in H, \tag{7}$$

$$g(z) \equiv 1 \ (l), \quad z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}. \tag{8}$$

Так как порядок H есть степень l, то (7) следует из (4) и из того, что

$$g(h)^{l-1} \equiv 1 \ (l).$$

Очевидно, что автоморфизмы $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$ индуцируют в поле $\Omega(\zeta)/\Omega$ автоморфизмы группы разложения простого дивизора этого поля, делящегося на $\mathfrak{P}$. Ввиду условия (1) и предположенной шольцевости относительно M и l поля k/Ω, дивизор $\mathfrak{p}$ из Ω полностью распадается в $\Omega(\zeta)$, так что группа разложения его простого делителя в этом поле равна 1. Отсюда следует, что $\zeta^z = \zeta$ при $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$, т. е. условие (8).

Для того чтобы условие (5) имело определенный смысл, нам надо показать, что выполнение его не зависит от выбора представителей τ в классах $\mathfrak{T}$ по модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}})$.

Очевидно, что

$$\mathfrak{D}(X)^{\tau} = \mathfrak{D}(X)^{h\tau}$$

при $h \in H$, так как $\mathfrak{D}(X)$ — дивизор, инвариантный относительно h. Обозначим через $[\mathfrak{D}(X)]_{\mathfrak{P}}$ ту степень $\mathfrak{P}$, которая входит в $\mathfrak{D}(X)$. Из очевидных равенств

$$\begin{gathered}[\mathfrak{D}(X)^{\tau z}]_{\mathfrak{P}} = ([\mathfrak{D}(X)^{\tau}]_{\mathfrak{P}})^z = [\mathfrak{D}(X)^{\tau}]_{\mathfrak{P}}^z, \\ \mathfrak{P}^z = \mathfrak{P}, \quad z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}},\end{gathered} \tag{9}$$

мы получаем:

$$[\mathfrak{D}(X)^{\tau z}]_{\mathfrak{P}} = [\mathfrak{D}(X)^{\tau}]_{\mathfrak{P}},$$

что и доказывает наше утверждение.

Если условие (5) выполнено, то мы определяем символ $[\chi, X]$, полагая

$$[\chi, X] = \prod_{\mathfrak{P}} \left(\frac{\mu^{\Sigma \varphi^*_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})^{\tau}}}{\mathfrak{P}}\right)_k \left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)_L^{-1}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{P}$ пробегает все не сопряженные между собой критические простые дивизоры k/Ω, а $\mathfrak{m}$ есть дивизор из разложения

$$\mu = \mathfrak{C}^l \mathfrak{D}(X)\, \mathfrak{m} \tag{11}$$

[см. ([6]), стр. 266]. Если условие (5) не выполнено, то символ $[\chi, X]$ не определен.

Перейдем к доказательству того, что символ $[\chi, X]$ не зависит от выбора:

a) представителей τ в классах $\mathfrak{T}$,

b) дивизора $\mathfrak{P}$ среди совокупности сопряженных друг с другом дивизоров и

c) μ в классе X.

Для доказательства утверждения а) покажем сначала, что если $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$, то для любого A, для которого

$$(A^{1-z}, \mathfrak{P}) \approx 1,$$

имеем:

$$\left(\frac{A^{1-z}}{\mathfrak{P}}\right) = 1, \quad z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}. \tag{12}$$

Очевидно, что класс вычетов $A^{1-z} \bmod \mathfrak{P}$ имеет в мультипликативной группе классов вычетов mod $\mathfrak{P}$ порядок, делящий порядок $e_{\mathfrak{P}}$ группы разложения $\mathfrak{P}$. Так как порядок группы классов вычетов есть $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) - 1$, то условие (12) следует из соотношения

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \equiv 1 \ \ (le_{\mathfrak{P}}). \tag{13}$$

Действительно, из (13) ввиду сказанного выше следует, что индекс подгруппы, порожденной классом $A^{1-z} \bmod \mathfrak{P}$ в группе классов вычетов, делится на l, а значит, этот класс является l-й степенью некоторого другого класса, что эквивалентно (12).

Для доказательства (13) воспользуемся произволом в выборе числа M, относительно которого мы предполагали поле k/Ω шольцевым. Мы потребуем, чтобы любой простой делитель l степени $(k:\Omega)$ входил в M в степени, по крайней мере на единицу большей, чем та, в которой он входит в показатель (общий наибольший делитель порядков элементов) группы G. При этом условии соотношение (13) будет, очевидно, выполняться, так как, с одной стороны, ввиду того что $(\mathfrak{P}, l) = 1$,

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) \equiv 1 \ (e_{\mathfrak{P}}),$$

а с другой — $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) - 1$ делится на l в степени, по крайней мере на единицу большей, чем $e_{\mathfrak{P}}$, что следует из введенного нами условия и того, что $e_{\mathfrak{P}}$ является порядком циклической (ввиду шольцевости k) группы $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$.

Теперь утверждение а) доказывается совсем просто. Нам надо доказать, что выражение (10) не изменится, если какое-нибудь τ заменить другим представителем $h\tau z$, $h \in H$, $z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}$, того же класса смежности по двойному модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}})$. Но инвариантность относительно умножения на h следует из l-инвариантности μ в k/L, а относительно z — из (12).

Переходим к доказательству утверждения $\mathfrak{b}$). Пусть $\mathfrak{P}^{\theta}$ — дивизор, сопряженный с $\mathfrak{P}$. Тогда

$$\mathfrak{P}^{\sigma} = \mathfrak{P}^{\theta\theta^{-1}\sigma} \text{ и } (\alpha_{\chi}) = \mathfrak{b}^{l} \prod \mathfrak{P}^{\theta\Sigma\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})^{\theta^{-1}\Sigma h}}$$

При этом когда σ пробегает полную систему представителей классов смежности по модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}, H)$, $\theta^{-1}\sigma$ пробегает также полную систему представителей классов смежности по модулю $(\theta^{-1}\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}\theta, H) = (\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}_{\theta}}, H)$, так как из

$$G = \sum \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}\sigma_i H$$

следует:

$$G = \sum \theta^{-1} \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}} \theta\theta^{-1}\sigma_i H.$$

Если $\mathfrak{S} = \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}\sigma H$, то $\theta^{-1}\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}\theta\theta^{-1}\sigma_i H$ мы будем обозначать через $\theta^{-1}\mathfrak{S}$. Таким образом,

$$(\alpha_{\chi}) = \mathfrak{b}^{l} \prod \mathfrak{P}^{\theta\Sigma\varphi_{\mathfrak{P}^{\theta},\chi}(\mathfrak{R})\rho\Sigma h},$$

где $\mathfrak{R}$ пробегает все классы по модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}^{\theta}}, H)$, ρ — представитель $\mathfrak{R}$ и

$$\varphi_{\mathfrak{P}^{\theta},\chi}(\mathfrak{R}) = \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\theta\mathfrak{R}).$$

Теперь очевидно, что

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P}^{\theta},\chi}(\mathfrak{U})^{\upsilon}}, \mathfrak{P}^{\theta}) = (\mathfrak{D}(X)^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{U}^{\theta^{-1}})^{\upsilon\theta^{-1}\theta}}, \mathfrak{P}^{\theta})^{g(\theta^{-1})},$$

где $\mathfrak{U}$ пробегает классы смежности по модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}^{\theta}})$, $\upsilon \in \mathfrak{U}$. Если положить

$$\mathfrak{U}\theta^{-1} = \mathfrak{T}, \quad \upsilon\theta^{-1} = \tau,$$

то $\mathfrak{T}$ будет пробегать классы по модулю $(H, \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}})$, и $\tau \in \mathfrak{T}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P}^{\theta},\chi}(\mathfrak{U})^{\upsilon}}, \mathfrak{P}^{\theta}) = (\mathfrak{D}(X)^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})^{\tau}}, \mathfrak{P})^{\theta g(\theta^{-1})}.$$

Таким образом, выполнение условия (5), при котором определен символ $[\chi, X]$, не зависит от выбора $\mathfrak{P}$ среди сопряженных дивизоров.

Аналогично преобразуется и самый символ:

$$\left(\frac{\mu^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P}^{\theta},\chi}(\mathfrak{U})^{\upsilon}}}{\mathfrak{P}^{\theta}}\right) = \left(\frac{\mu^{\Sigma\overset{*}{\varphi}_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})^{\tau\theta}}}{\mathfrak{P}^{\theta}}\right)^{g(\theta^{-1})} = \left(\frac{\mu^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})^{\tau}}}{\mathfrak{P}}\right),$$

что и доказывает его независимость от выбора $\mathfrak{P}$ среди сопряженных дивизоров.

Нам остается доказать утверждение c). Очевидно, что достаточно проверить инвариантность выражения для $[\chi, X]$ при умножении μ на l-ю степень и на число $m \in L$, взаимно простое с дискриминантом k/L. Первое очевидно; при втором $\mathfrak{D}(X)$ не меняется и поэтому инвариантность условия (5) очевидна. Рассмотрим самый символ $[\chi, X]$:

$$\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{(\mu m)^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\chi(\mathfrak{T})\tau}}{\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{\alpha_\chi}{mm}\right)^{-1}=$$

$$=\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\mu^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\chi(\mathfrak{T})\tau}}{\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{\alpha_\chi}{m}\right)^{-1}\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\chi(\mathfrak{T})\tau}}{\mathfrak{P}}\right)\left(\frac{\alpha_\chi}{m}\right)^{-1}.$$

Нам надо, таким образом, доказать, что

$$\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\chi(\mathfrak{T})\tau}}{\mathfrak{P}}\right)_k\left(\frac{\alpha_\chi}{m}\right)_L^{-1}=1. \tag{14}$$

Действительно,

$$\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\varphi(\mathfrak{T})\tau}}{\mathfrak{P}}\right)_k=\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m}{\mathfrak{P}^{\Sigma\varphi\overset{*}{\mathfrak{P}},\chi(\mathfrak{T})\tau^{-1}g(\tau^{-1})}}\right)_k=$$

$$=\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m}{\mathfrak{P}^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{S})\sigma}}\right)_k=\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m}{\mathfrak{P}^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\sigma\Sigma h}}\right)_L=\left(\frac{m}{\alpha_\chi}\right)_L. \tag{15}$$

Теперь (14) следует из (15) и из закона взаимности, так как α_χ l-гиперпримарно, ввиду условия 3° в определении шольцева поля.

Инварианты $[\chi, X]$ обладают свойствами:

$$[\chi_1\chi_2, X]=[\chi_1, X][\chi_2, X], \tag{16}$$

$$[\chi, X_1, X_2]=[\chi, X_1][\chi, X_2], \tag{17}$$

$$[\chi_1, X_1]=[\chi, X], \tag{18}$$

причем в (16) и (17) предполагается, что оба символа в правой части определены, и утверждается, что тогда определена и левая часть. В (18) предполагается, что $k\subset k_1$, причем степень (k_1, k) есть степень l. Характер χ и класс X рассматриваются в k, а χ_1 и X_1 — характер и класс, соответствующие им в k_1.

Заметим, что если k/Ω шольцево, то k/L тоже шольцево, причем если определен инвариант (χ, X) [см. ([6]), стр. 248], то определен и инвариант $[\chi, X]$, и они совпадают.

3. Инварианты $(X)_M$. Обозначим через L_M максимальное расширение L, имеющее абелеву группу показателя l и содержащееся в $L(\zeta_M)$, где ζ_M есть первообразный корень степени M из 1. Выберем в классе X такого представителя μ, чтобы в поле $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/\Omega$ все простые делители M в $\Omega(\zeta)$ полностью распадались. Для случая делителя M, являющегося в то же время делителем l, существование такого представителя доказано в работе ([6]), стр. 269. Если $\mathfrak{q}\mid M$, $(\mathfrak{q}, l)=1$, $\mathfrak{q}\in L$, то, ввиду шольцевости k/Ω относительно M, $\mathfrak{q}$ не разветвлено и имеет порядок 1 в k/Ω. Для того чтобы $\mathfrak{q}$ обладало этими же свойствами в $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/\Omega$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\left[\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right]=1. \tag{19}$$

Очевидно, что, найдя число m, удовлетворяющее условию

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{q}}\right)=\left[\frac{\mu}{\mathfrak{q}}\right]^{-1}, \tag{20}$$

мы добьемся выполнения условия (19) для μm. Очевидно также, что условия (20) для различных $\mathfrak{q} \mid M$, $(\mathfrak{q}, l)=1$, а также соответствующие условия для $\mathfrak{q} \mid l$ совместны.

Инвариант $(X)_M$ мы определим как класс $m\Lambda_M$ по подгруппе Λ_M, соответствующей полю L_M / L в смысле теории полей классов, к которому принадлежит дивизор $\mathfrak{m}$ из разложения (11) выбранного таким образом представителя μ класса X.

Покажем, что $(X)_M$ не зависит от выбора μ в X, если только этот выбор подчинен указанным выше условиям. Действительно, другой представитель должен иметь вид μm, где m l-гиперпримарно и

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{q}}\right)=1 \text{ для } \mathfrak{q} \mid M, \quad (\mathfrak{q}, l)=1.$$

Таким образом, m лежит в группе $S_{\mathfrak{F}}$, состоящей из l-х степеней лучевых классов по модулю $\mathfrak{F}$, являющемуся произведением модуля l-гиперпримарности и всех $\mathfrak{q}$, которые делят M, но не делят l. Поле, соответствующее $S_{\mathfrak{F}}$, является максимальным расширением поля L, имеющим абелеву группу показателя l и дискриминант, состоящий только из делителей M. Так как L_M также обладает всеми этими свойствами, за исключением максимальности, то оно содержится в этом поле и, следовательно, $\Lambda_M \supset S_{\mathfrak{F}}$, и из $m \in S_{\mathfrak{F}}$ следует, что $m \in \Lambda_M$.

Инвариант $(X)_M$ обладает свойствами

$$(X_1X_2)_M=(X_1)_M (X_2)_M,$$

$$(X_1)_M=(X)_M,$$

аналогичными (17) и (18).

Очевидно, что из $(X)_M=1$ следует $(X)_{M_1}=1$ при $M_1 \mid M$. Точно так же очевидно, что $(X)_M$ может принимать только конечное число значений — заведомо не больше, чем M.

4. Инварианты $[X]_\psi$. Эти инварианты определены только для таких классов X l-инвариантных чисел поля k / L, для которых все инварианты $[\chi, X]$, которые определены, равны 1, а также $(X)_M=1$.

В § 2 будет доказано, что в каждом таком классе можно выбрать такого представителя μ, что в поле K^*, получающемся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\mu^\sigma}$, все критические простые дивизоры k распадутся на дивизоры 1-го порядка. Это эквивалентно выполнению соотношений

$$\left(\frac{\mu^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(S)\sigma}}{\mathfrak{P}}\right)=1 \tag{21}$$

для всех критических простых дивизоров $\mathfrak{P}$ поля k/Ω и всех функций $f_{\mathfrak{P}}(S)$ на правых классах смежности G по H, для которых

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(S)\sigma}, \mathfrak{P}) \approx 1.$$

Пока теорема 1 из § 2 еще не доказана, мы будем считать, что инвариант $[X]_\psi$ определен для тех классов X, в которых существует представитель μ, удовлетворяющий условиям (21).

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что выбор представителя μ в X произведен именно таким образом.

Рассмотрим функцию $\psi(\mathfrak{S})$ на классах смежности $\mathfrak{S}$ группы G по двойному модулю (H, H) со значениями в поле классов вычетов mod l, обладающую следующими свойствами:

1°. $\psi(1) \equiv 0, \quad \psi^*(\mathfrak{S}) \equiv -\psi(\mathfrak{S})\ (l)$.

2°. $\mu^{\Sigma\psi(S)\sigma} \approx m_\psi \in L$ при $\mu \in X$.

Здесь S пробегает все правые классы смежности G по H, σ — любой представитель S, а $\psi(S)$ означает $\psi(\mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ — класс по двойному модулю (H, H), содержащий S.

3°. Если $m_\psi = \mathfrak{d}\mathfrak{m}_\psi$ есть разложение m_ψ на множитель $\mathfrak{d}$, состоящий только из простых делителей дискриминанта k/L, и $\mathfrak{m}_\psi$, взаимно простой с дискриминантом, то

$$\mathfrak{d} = (\alpha_\chi)\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(S)\sigma\Sigma h}, \quad \left(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma f^*_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T})\tau}, \mathfrak{P}\right) \approx 1, \tag{22}$$

где χ — один из характеров порядка l группы H.

Заметим, что путем умножения m_ψ на $\alpha_\chi^{-1} = \left(\sqrt[l]{\alpha_\chi}\right)^{-l}$ мы можем добиться того, чтобы α_χ в формуле (22) не участвовало. Тогда $\mathfrak{b}$ будет определено однозначно с точностью до такого множителя α_χ, что инвариант $[\chi, X]$ определен.

При $l = 2$ мы наложим еще одно дополнительное условие. Пусть $\mathfrak{S}$ — инволютивный класс по двойному модулю, т. е. класс, совпадающий со своим обратным: $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}$. Каждому такому классу мы поставим в соответствие дивизор $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}$ поля L по следующему правилу.

Пусть σ — представитель класса $\mathfrak{S}$, удовлетворяющий условию

$$\sigma^2 \in H. \tag{23}$$

Существование такого представителя следует из условия $\mathfrak{S}^{-1} = \mathfrak{S}$, как это доказано в приложении.

Обозначим через LL^σ композит полей L и L^σ, принадлежащий к подгруппе $H \cap H^\sigma$, а через Λ_σ — подполе, принадлежащее подгруппе $\{\sigma, H \cap H^\sigma\}$, порожденной σ и $H \cap H^\sigma$. Ввиду условия (22),

$$\{\sigma, H \cap H^\sigma\} = H \cap H^\sigma + \sigma H \cap H^\sigma$$

и, ввиду (23),

$$(LL^{\sigma} : \Lambda_{\sigma}) = 2.$$

Обозначив через $\mathfrak{D}_{\sigma}$ дифференту поля $LL^{\sigma} / \Lambda_{\sigma}$, мы положим

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}} = N_{LL^{\sigma}/L}(\mathfrak{D}_{\sigma}).$$

Условие, которое мы наложили на функцию ψ, записывается теперь в следующем виде:

4°. $\prod\limits_{\mathfrak{S}} \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}^{\psi(\mathfrak{S})} \approx (\alpha_{\chi})$ в L, $[\chi, X]$ определено,

где произведение распространено на все инволютивные классы $\mathfrak{S}$ по двойному модулю (H, H).

Очевидно, что все эти условия зависят только от функции ψ и класса X, а не от выбора μ в X. Если выполнены условия 1°, 2° и 3°, а при $l = 2$ и 4°, то мы определим символ $[X]_{\psi}$ следующим образом: выберем в X такого представителя μ, для которого

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{\sigma}) = 1 \text{ при } \sigma \notin H \tag{24}$$

и положим

$$[X]_{\psi} = \left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_{\psi}}\right], \tag{25}$$

где $\mathfrak{m}_{\psi} = \mathfrak{m}^{\Sigma\psi(S)\sigma}$, а $\mathfrak{m}$ — дивизор из разложения (11). Символ $\left[\frac{A}{\mathfrak{b}}\right]$ определен в работе ([6]), стр. 267.

Ввиду условия $\psi(1) \equiv 0 (l)$ и условия (24), правая часть (25) действительно определена.

Докажем теперь, что символ $[X]_{\psi}$ не зависит от выбора представителя μ в классе X. Напомним, что при этом речь идет о выборе представителя, удовлетворяющего сформулированным в начале этого пункта условиям.

Положим

$$\mu' = \mu m, \quad \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}(m), \quad m \in L,$$

причем m состоит из простых дивизоров L, имеющих в L / Ω порядок 1 и полностью распадающихся в k.

Дословным повторением рассуждений на стр. 400 работы ([8]) проверяется, что мы можем считать при этом выполненными следующие условия:

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^{\sigma}) = 1, \quad (m, m^{\sigma}) = 1, \quad (\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'^{\sigma}) = 1, \quad \sigma \notin H,$$

причем μ, m и μ' l-гиперпримарны.

Нам надо доказать, что

$$\left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_{\psi}}\right] = \left[\frac{\mu'}{\mathfrak{m}'_{\psi}}\right], \tag{26}$$

где

$$\mathfrak{m}'_{\psi} = \mathfrak{m}_{\psi} m^{\Sigma\psi(S)\sigma}.$$

Заметим, что $m^{\Sigma\psi(S)\sigma}$ есть число из L. Действительно, в приложении доказано, что если S пробегает все правые классы смежности по H

содержащиеся в одном двустороннем классе по (H, H), а σ есть любой представитель S, то $\alpha^{\Sigma\sigma} \in L$, если $\alpha \in L$. Из того, что ψ постоянно на классах по двойному модулю (F, H), следует, что $m^{\Sigma\psi(S)\sigma}$ есть произведение такого рода чисел и, следовательно, принадлежит L.

Переходя к доказательству (25), заметим, что

$$\left[\frac{\mu'}{\mathfrak{m}'_\psi}\right] = \left[\frac{\mu}{\mathfrak{m}_\psi}\right]\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right)\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right]\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right). \tag{27}$$

Равенство (26) будет доказано, если мы покажем, что произведение второго и третьего множителей, а также четвертый множитель в правой части (27) равны 1.

В самом деле,

$$\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right] = \left[\frac{\mu^{\Sigma\psi(S)\sigma^{-1}g(\sigma^{-1})}}{m}\right],$$

где σ^{-1} пробегает представителей левых классов смежности S^{-1} группы G по H. Так как из $S \in \mathfrak{S}$ следует, что $S^{-1} \in \mathfrak{S}^{-1}$, то, ввиду условий 1° и 2°, мы имеем:

$$\left[\frac{\mu^{\Sigma\psi(S)\sigma^{-1}g(\sigma^{-1})}}{m}\right] = \left[\frac{\mu^{\Sigma\psi^*(S)\sigma}}{m}\right] = \left(\frac{m_\psi}{m}\right)^{-1}, \tag{28}$$

т. е.

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right)\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right] = \left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right)\left(\frac{m_\psi}{m}\right)^{-1}. \tag{29}$$

Мы докажем, что

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right) = \left(\frac{m}{m_\psi}\right) \tag{30}$$

и тогда из (29), ввиду закона взаимности, будет следовать, что

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_\psi}\right)\left[\frac{\mu}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right] = 1.$$

Для доказательства (30) заметим, что

$$(m_\psi) = \mathfrak{d}\mathfrak{m}_\psi,$$

где $\mathfrak{d}$ удовлетворяет условию (22). Ввиду этого условия,

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{d}}\right)_L \prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{m}{\mathfrak{P}^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(S)\sigma}}\right)_k = \prod\left(\frac{m^{\Sigma f^*_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right)_k, \tag{30'}$$

где

$$\left(\mathfrak{D}^{\Sigma f^*_{\mathfrak{P}}(T)\tau}, \mathfrak{P}\right) \approx 1. \tag{31}$$

Так как μ уже удовлетворяет условию (21), то из (22) следует, что

$$\left(\frac{\mu^{\Sigma f^{*}_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right) = 1,$$

а так как это же должно иметь место для μm вместо μ, то

$$\left(\frac{m^{\Sigma f^{*}_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right) = 1.$$

Отсюда и из (30) следует, что

$$\left(\frac{m}{\mathfrak{m}_{\psi}}\right) = \left(\frac{m}{m_{\psi}}\right)\left(\frac{m}{\mathfrak{d}}\right)^{-1} = \left(\frac{m}{m_{\psi}}\right).$$

Доказательство того, что

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right) = 1, \tag{32}$$

различно при $l \neq 2$ и при $l = 2$.

При $l \neq 2$ мы имеем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right) = \left(\frac{m^{\Sigma\psi(S)\sigma^{-1}g(\sigma^{-1})}}{m}\right),$$

ввиду того что $\psi(S)$ постоянно на классах по двойному модулю (H, H) и на основании формулы (104) приложения. В силу условия 1°, имеем, как и при доказательстве (29):

$$\left(\frac{m^{\Sigma\psi(S)\sigma^{-1}g(\sigma^{-1})}}{m}\right) = \left(\frac{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}{m}\right)^{-1}.$$

Ввиду l-гиперпримарности m, отсюда следует:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right)^{2} = 1,$$

что эквивалентно (32) при $l \neq 2$.

При $l = 2$ рассмотрим сначала неинволютивный класс $\mathfrak{S}$. Тогда, ввиду условия 1° и на основании формулы (104) приложения,

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma+\psi(S^{-1})\sigma^{-1}}}\right) = \left(\frac{m}{m^{\Sigma\sigma}}\right)^{\psi(\mathfrak{S})}\left(\frac{m}{m^{\Sigma\sigma^{-1}}}\right)^{\psi(\mathfrak{S}^{-1})} = \left(\frac{m}{m^{\Sigma\sigma}}\right)^{\psi(\mathfrak{S})+\psi(\mathfrak{S}^{-1})} = 1,$$

где S пробегает все правые классы по H, содержащиеся в $\mathfrak{S}$.

Рассмотрим выражение

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right),$$

в котором сумма распространена только на отличные от 1 классы S, содержащиеся в инволютивных двусторонних классах $\mathfrak{S}$. Имеем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right)=\prod_{\mathfrak{S}}\left(\frac{m}{m^{\mathfrak{S}}}\right)^{\psi(\mathfrak{S})},$$

где произведение распространено на все инволютивные классы $\mathfrak{S}$, а σ пробегает представителей правых классов смежности по H, содержащихся в $\mathfrak{S}$.

В приложении доказано (формула (126)), что

$$\left(\frac{m}{m^{\mathfrak{S}}}\right)=\left(\frac{m}{\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}}\right),$$

поэтому мы имеем:

$$\left(\frac{m}{m^{\Sigma\psi(S)\sigma}}\right)=\left(\frac{m}{\prod\limits_{\mathfrak{S}}\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{\psi(\mathfrak{S})}}\right)=\left(\frac{m}{\alpha_\chi}\right)=1,$$

ввиду условия 4° и соотношения (21).

Тем самым независимость символа $[X]_\psi$ от выбора представителя μ в классе X доказана.

Для символа $[X]_\psi$ имеет место равенство

$$[X]_\psi=[X_1]_\psi,$$

аналогичное (18), но равенство, аналогичное (17), не имеет места.

§ 2. Условия погружаемости для шольцевых расширений

В этом параграфе мы изложим решение задачи, сформулированной в п. 1 предшествующего параграфа. Согласно этой формулировке, нам заданы в цепочке (3) поля Ω, L и k, а также группа Галуа K/L как простое центральное расширение группы Галуа H поля k/L. Ввиду шольцевости поля k/Ω, а значит, и k/L, этому расширению группы H соответствует класс l-инвариантных чисел поля k/L, который мы будем обозначать через X.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы поле k/L можно было погрузить в поле K, соответствующее классу X и такое, что K^*/Ω шольцево, необходимо и достаточно, чтобы инварианты $(X)_M$, $[\chi, X]$ и $[X]_\psi$ равнялись 1 для всех χ и X, для которых они определены.*

Доказательство. Необходимость равенства инвариантов единице проверяется непосредственно. Равенство единице инварианта $(X)_M$ следует из того, что в классе X существует такое число μ, что в $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)$ все простые делители M в $\Omega(\zeta)$ полностью распадаются, в то время как для любого простого делителя $\mathfrak{p}$ дивизора $\mathfrak{m}$ выполнено соотношение $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})\equiv 1\,(M)$. В формуле (10), определяющей $[\chi, X]$, для любого простого $\mathfrak{q}\,|\,\mathfrak{m}$, ввиду шольцевости K/L,

$$\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{q}}\right)=1,\text{ т. е. }\left(\frac{\alpha_\chi}{\mathfrak{m}}\right)=1.$$

С другой стороны, ввиду шольцевости K^*/L и ввиду (5),

$$\left(\frac{\mu^{\Sigma\varphi^*_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right)=1,$$

откуда следует, что $[\chi, X]=1$.

Из шольцевости K^*/L следует, что

$$\left[\frac{\mu^{\Sigma\sigma^{-1}}}{\mathfrak{p}}\right]=\left[\frac{\mu}{\mathfrak{p}^{\Sigma\sigma}}\right]=1, \quad \mathfrak{p}\mid\mathfrak{m},$$

если сумма распространена на представителей σ всех правых классов смежности G по H, содержащихся в одном, отличном от 1, классе по (H, H). Ввиду того что $\mathfrak{m}_\psi$ состоит из множителей $\mathfrak{p}^{\Sigma\sigma}$, $\mathfrak{p}\mid\mathfrak{m}$, отсюда следует, что $[X]_\psi=1$.

Перейдем теперь к доказательству достаточности. Для этого заметим, что из равенства единице инвариантов $(X)_{M_l}$ и $[\chi, X]$ следует равенство единице инвариантов (χ, X) работы (6) для поля k/L. Применяя теорему 1 работы (6), мы найдем, что в классе X можно выбрать такого представителя μ_0, что поле $k\left(\sqrt[l]{\mu_0}\right)/L$ будет шольцевым относительно M_l.

Покажем сначала, что в X можно выбрать такого представителя μ_1, что $k\left(\sqrt[l]{\mu_1}\right)/L$ будет попрежнему шольцевым, а в $k\left(\sqrt[l]{\mu_1}\right)/\Omega$ будет выполнено третье условие шольцевости. Для этого найдем такое число $m_0\in L$, чтобы оно состояло из простых дивизоров 1-го порядка, полностью распадающихся в k, было l-гиперпримарно, а при $l=2$ тотально положительно, и удовлетворяло условиям:

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q})\equiv 1 \ (M_l), \quad \mathfrak{q}\mid m_0,$$

и

$$\left(\frac{m_0}{\mathfrak{r}}\right)=\left[\frac{\mu_0}{\mathfrak{r}}\right]^{-1}, \quad \left(\frac{m_0}{\mathfrak{p}}\right)=1 \tag{33}$$

для всех простых делителей $\mathfrak{r}$ числа M/M_l в L и простых делителей дискриминанта $\mathfrak{p}$ поля k/L. Такой выбор возможен ввиду того, что $\mathfrak{r}$ взаимно просто с l и дискриминантом k/L. Очевидно, что при $\mu_1=\mu_0 m_0$ $k\left(\sqrt[l]{\mu_1}\right)/L$ будет попрежнему шольцевым относительно M_l, а все простые делители M/M_l^* в $\Omega(\zeta)$ будут полностью распадаться в $k\left(\sqrt[l]{\mu_1}\right)$, ввиду (33).

Теперь докажем, что в X существует такой представитель μ_2, что в поле $k\left(\sqrt[l]{\mu_2}\right)/\Omega$ выполнены второе и третье условия шольцевости относительно M и l, а $k\left(\sqrt[l]{\mu_2}\right)/L$ попрежнему шольцево. Для этого положим

$$\mu_1=\mathfrak{C}_1^l\,\mathfrak{D}(X)\,\mathfrak{m}_1$$

и обозначим через $\mathfrak{F}$ произведение модуля l-гиперпримарности в L, всех критических простых дивизоров k/L и M, а через $S_{\mathfrak{F}}$ — главное соединение по модулю $\mathfrak{F}$. Найдем в классе $\mathfrak{m}_1 S_{\mathfrak{F}}$ простой дивизор $\mathfrak{q}$ 1-го по-

рядка над Ω, полностью распадающийся в k и удовлетворяющий условию

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1\,(M). \tag{34}$$

Такой дивизор $\mathfrak{q}$ действительно существует. Чтобы показать это, обозначим произведение всех критических простых дивизоров k/L, модуля гиперпримарности и M_l через $\mathfrak{F}'$, так что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}' M / M_l.$$

Обозначим через Σ' поле классов к $S_{\mathfrak{F}'}$, а через Σ'' — к S_{M/M_l}. Очевидно, что

$$\Sigma = \Sigma' \Sigma''.$$

Нам надо найти простой дивизор $\mathfrak{q}$ 1-го порядка над Ω, который лежал бы в классах $\mathfrak{m}_1 S_{\mathfrak{F}'}$, $\mathfrak{m}_1 S_{M/M_l}$, полностью распадался в k и удовлетворял условию (34). Иначе говоря, он должен принадлежать к тому же автоморфизму, что и $\mathfrak{m}_1$ в полях Σ' и Σ'' и к единичному автоморфизму в полях k и $L(\zeta_M)$. Чтобы доказать существование такого простого дивизора, достаточно показать, что все указанные автоморфизмы могут быть продолжены до одного автоморфизма поля $\Sigma' \cdot \Sigma'' \cdot k \cdot L(\zeta_M)$.

То, что в поле $\Sigma' \cdot k \cdot L(\zeta_{M_l})$ существует автоморфизм, индуцирующий в Σ', k и $L(\zeta_{M_l})$ указанные автоморфизмы, следует из того, что $\mathfrak{m}_1$ состоит из простых дивизоров, полностью распадающихся в k, а инвариант $(X)_{M_l}$ равен 1. Доказательство проведено на стр. 273 работы ([6]).

Рассмотрим теперь поле $\Sigma'' L(\zeta_{M/M_l})$. Очевидно, что $\Sigma'' \cap L(\zeta_{M/M_l})$ есть поле L_{M/M_l}, участвующее в определении инварианта $(X)_{M/M_l}$. Так как $(X)_{M/M_l} = 1$, то $\mathfrak{m}_1$ принадлежит в L_{M/M_l} к единичному автоморфизму. Из этого следует существование нужного нам автоморфизма.

Представим $\Sigma'\Sigma'' k L(\zeta_M)$ как композит полей $\Sigma' \cdot k \cdot L(\zeta_{M_l})$ и $\Sigma'' \cdot L(\zeta_{M/M_l})$. Эти поля имеют взаимно простые дискриминанты и поэтому их пересечение, совпадающее с пересечением Σ' и Σ'', есть максимальное абелево неразветвленное расширение с показателем l — Σ_0/L. Построенные нами автоморфизмы индуцируют в Σ_0/L один и тот же автоморфизм — тот, к которому принадлежит $\mathfrak{m}_1$. Поэтому и во всем поле $\Sigma'\Sigma'' k L(\zeta_M)$ существует автоморфизм с нужными нам свойствами.

Если $\mathfrak{q}$ — простой дивизор 1-го порядка над Ω, принадлежащий к этому автоморфизму, то

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_1 (m_1) \mathfrak{c}^l.$$

Положив $\mu_2 = \mu_1 m_1$, мы получим, как легко видеть, число с нужными нам свойствами.

Наконец, докажем, что в X существует такой представитель μ_3, что в $k(\sqrt[l]{\mu_3})/\Omega$ выполняются первое, второе и третье условия шольцевости. Так как $k(\sqrt[l]{\mu_2})/L$ уже шольцево, то нам надо, не нарушая этого, а также второго и третьего условий шольцевости относительно M и l для $k(\sqrt[l]{\mu_2})/\Omega$, добиться того, чтобы критические простые дивизоры L, не яв-

ляющиеся критическими в $k\left(\sqrt[l]{\mu_2}\right)/L$, полностью там распадались. Для этого найдем l-гиперпримарное и тотально-положительное число m_2, состоящее из простых дивизоров 1-го порядка, полностью распадающихся в k, и удовлетворяющее условиям:

$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{p}}\right)=1 \quad \text{для } \mathfrak{p}, \text{ критических в } k/L;$$

$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{r}}\right)=1, \quad \mathfrak{r} \mid M/M_l;$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1 \ (M), \quad \mathfrak{q} \mid m_2;$$

$$\left(\frac{m_2}{\mathfrak{p}'}\right)=\left[\frac{\mu_2}{\mathfrak{p}'}\right]^{-1}; \ \mathfrak{p}' \text{ — критическое в } L, \text{ но не в } k/L.$$

Так как дивизоры $\mathfrak{p}'$ в последнем условии взаимно просты со всеми дивизорами $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ и M из предшествующих условий и с дискриминантом k/L, то все условия совместны. Очевидно, что $\mu_3=\mu_2 m_2$ обладает нужными нам свойствами.

Легко видеть, что четвертое условие шольцевости выполняется в $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/\Omega$, если оно выполняется в k/Ω и $k\left(\sqrt[l]{\mu}\right)/L$ (его нужно проверять только при $l=2$). Таким образом, положив $\mu'=\mu_3$, мы можем сказать, что поле $K=k\left(\sqrt[l]{\mu'}\right)/\Omega$ — шольцево относительно M и l. Посмотрим, какие из условий шольцевости выполнены тогда в K^*. Очевидно, что третье и четвертое условия выполнены, а второе также выполнено, если выполнено первое. Таким образом, нам надо, не нарушая второго, третьего и четвертого условий шольцевости $k\left(\sqrt[l]{\mu'}\right)/\Omega$, умножить μ' на такое число $m' \in L$, чтобы для $K=k\left(\sqrt[l]{\mu' m'}\right)$ в K^*/Ω выполнялось и первое условие шольцевости. При этом условие 1° мы разобьем теперь на два:

A. Требование, чтобы критические дивизоры k распадались в K^* на дивизоры 1-го порядка и

B. Требование, чтобы простые критические дивизоры K^*, взаимно простые с дискриминантом k/Ω, имели относительно Ω порядок 1.

Рассмотрим сначала требование A. Умножение μ' на число m' заведомо не нарушит второго, третьего и четвертого условий шольцевости $k\left(\sqrt[l]{\mu'}\right)/\Omega$ относительно M и l, если m' будет простым главным дивизором 1-го порядка в L/Ω, полностью распадающимся в k, тотально-положительным, гиперпримарным и удовлетворяющим условиям:

$$\left(\frac{m'}{\mathfrak{r}}\right)=1 \quad \mathfrak{r} \mid M/M_l,$$

$$\mathfrak{N}(m') \equiv 1 \ (M).$$

Все эти условия мы будем дальше называть условиями (*).

Пусть $\mathfrak{P}$ — критический простой дивизор k/Ω. Для того чтобы в K_k^*, получающемся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\mu^\sigma}$, простые делители $\mathfrak{P}$ имели

порядок 1, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f_{\mathfrak{P}}(T)$ на правых классах смежности T группы G по H, для которой

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(T)\tau}, \mathfrak{P}) \approx 1, \tag{35}$$

выполнялось равенство

$$\left(\frac{\mu^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right) = 1. \tag{36}$$

Положим

$$\xi_{f_{\mathfrak{P}}} = \left(\frac{\mu'^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right)$$

и покажем, что существует число m', удовлетворяющее условиям (*) и такое, что

$$\left(\frac{m'^{\Sigma f_{\mathfrak{P}}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right) = \xi_{f_{\mathfrak{P}}}^{-1} \tag{37}$$

для любого $\mathfrak{P}$ и любого $f_{\mathfrak{P}}$, удовлетворяющего (35). Очевидно, что тогда $\mu' m'$ будет удовлетворять требованию А.

Ввиду равенств

$$\left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{\sigma h}}\right) = \left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right), \quad \left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{z\sigma}}\right) = \left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right), \quad h \in H, \quad z \in \mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}},$$

мы можем обозначить $\left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)$ через $\zeta^{x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}}$, где $\mathfrak{S}$ — класс смежности по двойному модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}, H)$, содержащий σ. Кроме того, введем обозначение:

$$\xi_{f_{\mathfrak{P}}}^{-1} = \zeta^{b_{f_{\mathfrak{P}}}}.$$

Условие (37) переписывается тогда в виде

$$\sum_S f_{\mathfrak{P}}^{*}(S)\, x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \equiv b_{f_{\mathfrak{P}}}(l), \tag{38}$$

причем сумма в (38) распространена на все левые классы смежности S группы G по H, а $\mathfrak{S}$ есть класс смежности по модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}}, H)$, содержащий S.

Выясним, когда существует число m', удовлетворяющее условиям (*) и соотношениям:

$$\left(\frac{m'}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)_k = \left(\frac{m'}{N_{k/L}\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)_L = \zeta^{x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}} \tag{39}$$

при заданных $x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \pmod{l}$.

Для этого обозначим через $\mathfrak{F}$ произведение всех дивизоров L, критических в k/L или L/Ω, модуля гиперпримарности, M_l и вещественных бесконечно удаленных дивизоров, через $S_{\mathfrak{F}}$ — группу соединений классов дивизоров по модулю $\mathfrak{F}$, а через $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ — поле классов к $S_{\mathfrak{F}}$. Повторяя до-

словно рассуждения на стр. 404 работы ([8]), мы получим, что условия (*) и (39) эквивалентны требованию, чтобы дивизор (m_1) принадлежал к определенному автоморфизму в $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ и к единичным автоморфизмам в $L(\zeta_{M/M_l})$, k/L и полю классов Σ' к группе соединений по модулю, являющемуся произведением всех простых делителей M/M_l. Так как дискриминанты $\Sigma_{\mathfrak{F}}\cdot k$ и $\Sigma' L(\zeta_{M/M_l})$ взаимно просты, то совместность условий (*) и (39) эквивалентна утверждению, что в $\Sigma_{\mathfrak{F}} \cap k$ указанный выше автоморфизм поля $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ индуцирует единичный автоморфизм.

Повторяя опять соответствующие рассуждения на стр. 404 работы ([8]), мы видим, что $\Sigma_{\mathfrak{F}} \cap k$ получается присоединением к L всех $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$ и что автоморфизм поля $\Sigma_{\mathfrak{F}}$, о котором идет речь, сводится в $L\left(\sqrt[l]{\alpha_\chi}\right)$ к умножению $\sqrt[l]{\alpha_\chi}$ на

$$\zeta^{\sum_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})},$$

если

$$(\alpha_\chi)=\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\sum \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(S)\,\sigma\,\Sigma h}$$

есть разложение α_χ на простые множители в k.

Таким образом, совместность условий (*) и (39) эквивалентна совместности системы, состоящей из уравнения (38) и

$$\sum_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\equiv 0\,(l). \tag{40}$$

Мы выпишем условия совместности этой системы и покажем, что они совпадают с равенством единице инвариантов $[\chi, X]$.

Если система, состоящая из уравнений (38) и (40), не совместна, то существует такая линейная комбинация этих сравнений, в которой коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля.

Пусть

$$\sum_\chi c_\chi \sum_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S}) + \sum_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} d_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} \sum_S f^*_{\mathfrak{P}}(S)\, x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \equiv \sum_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} d_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} b_{f_{\mathfrak{P}}}\ (l) \tag{41}$$

является такой линейной комбинацией. Положим

$$\prod_\chi \chi^{c_\chi}=\chi_0, \qquad \sum_{f_{\mathfrak{P}}} d_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} f(T)=F_{\mathfrak{P}}(T).$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_\chi c_\chi\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\equiv\varphi_{\mathfrak{P},\chi_0}(\mathfrak{S})\ (l),$$

$$\sum_{f_{\mathfrak{P}}} d_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} b_{f_{\mathfrak{P}}}\equiv b_{f_{\mathfrak{P}}}\ (l).$$

Принимая во внимание, что в (41) коэффициенты при всех $x_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}$ равны нулю, получаем:

$$\varphi_{\mathfrak{P},\chi_0}(\mathfrak{S}) \equiv -\sum_{S\in\mathfrak{S}} F^*_{\mathfrak{P}}(S)\ (l)$$

или

$$\varphi^*_{\mathfrak{P},\chi_0}(\mathfrak{T}) \equiv -\sum_{T\in\mathfrak{T}} F_{\mathfrak{P}}(T)\ (l) \tag{42}$$

для всех $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{T}$.

Так как все $f_{\mathfrak{P}}$, а значит, и $F_{\mathfrak{P}}$, удовлетворяют условию (35), то из (42) мы заключаем, что

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma\varphi^*_{\mathfrak{P},\chi_0}(T)\tau}, \mathfrak{P}) \approx 1. \tag{43}$$

Кроме того, из (42) следует, что

$$\prod_{\mathfrak{P}}\left(\frac{\mu'^{\Sigma\varphi^*_{\mathfrak{P},\chi_0}(T)\tau}}{\mathfrak{P}}\right)' = \zeta^{\sum_{\mathfrak{P}} b_{F_{\mathfrak{P}}}}. \tag{44}$$

Для совместности нашей системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum d_{\mathfrak{P},f_{\mathfrak{P}}} b_{f_{\mathfrak{P}}} \equiv \sum b_{F_{\mathfrak{P}}} \equiv 0\,(l),$$

т. е. чтобы правая часть равнялась 1. Левая же часть равенства есть как раз $[\chi_0, X]$, так как, ввиду того что поле $k\left(\sqrt[l]{\mu'}\right)$ по предположению уже шольцево,

$$\left(\frac{\alpha_{\chi_0}}{\mathfrak{m}}\right) = 1.$$

При этом символ $[\chi_0, X]$ действительно определен, ввиду (43). Таким образом, система, состоящая из уравнений (38) и (40), совместна, а следовательно, число $\overline{\mu} = \mu' m'$, удовлетворяющее требованию A, существует.

Взяв за исходное число $\overline{\mu}$, мы должны теперь найти такое $\overline{m} \in L$, чтобы число $\mu = \overline{\mu}\,\overline{m}$ попрежнему удовлетворяло требованию A, но, сверх того, и требованию B.

Мы выберем $\overline{m}$ l-гиперпримарным и (при $l = 2$) тотально-положительным и удовлетворяющим условиям

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\Sigma f^*(S)\sigma}}\right) = 1, \tag{45}$$

если $\mathfrak{P}$ — критическое в k/Ω,

$$(\mathfrak{D}(X)^{\Sigma f(T)\tau}, \mathfrak{P}) \approx 1$$

и

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{r}}\right) = 1, \quad \mathfrak{r} \mid M/M_l,$$

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{q}) \equiv 1\,(M), \quad \mathfrak{q} \mid \overline{m}.$$

Мы положим

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right) = \zeta^{y_{\mathfrak{P},\,\mathfrak{S}}}, \tag{46}$$

где $\mathfrak{S}$ есть класс смежности по двойному модулю $(\mathfrak{Z}_{\mathfrak{P}},\ H)$. Тогда условие (45) эквивалентно (46) и тому, что

$$\sum f^{*}(S)\, y_{\mathfrak{P},\,\mathfrak{S}} \equiv 0\,(l), \text{ если } (\mathfrak{D}(X)^{\Sigma f(T)\tau},\ \mathfrak{P}) \approx 1. \tag{47}$$

Все эти условия мы будем в дальнейшем называть условиями (**). Очевидно, что если они выполняются для $\overline{m}$, то $\overline{\mu}\overline{m}$ будет попрежнему удовлетворять требованию А.

Посмотрим, когда $\overline{\mu}\overline{m}$ удовлетворяет требованию В. Простыми критическими дивизорами K^{*}, не являющимися критическими в k, будут при $K = k\left(\sqrt[l]{\overline{\mu}\overline{m}}\right)$ простые делители $(\overline{\mathfrak{m}}m)^{\sigma}$, если

$$\overline{\mu} = \overline{\mathfrak{C}}^{l}\mathfrak{D}(X)\,\overline{\mathfrak{m}}.$$

Мы предположим, что

$$(\overline{\mathfrak{m}},\ \overline{\mathfrak{m}}^{\sigma}) = 1 \text{ при } \sigma \notin H,$$

так как этого можно добиться, умножая $\overline{\mu}$ на число, удовлетворяющее условиям (**). Для того чтобы $\overline{\mu}\overline{m}$ удовлетворяло требованию В, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left(\frac{\overline{\mu}\overline{m}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right) = 1, \tag{48}$$

где символ Лежандра вычисляется в k, $\mathfrak{Q}$ — любой простой делитель $\overline{\mathfrak{m}}\overline{m}$ и $\sigma \notin H$.

Условия естественно разбиваются на две группы:

$$\left(\frac{\overline{\mu}\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right) = 1, \text{ т. е. } \left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right) = \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)^{-1} \text{ для } \mathfrak{P} \mid \overline{\mathfrak{m}}$$

и

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right) = \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right)^{-1} \text{ для } \mathfrak{Q} \mid \overline{m}.$$

Мы будем подбирать $\overline{m}$ таким, чтобы все делящие его простые дивизоры удовлетворяли условию:

$$\left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right) = \zeta(\sigma),$$

где $\zeta(\sigma)$ — некоторая система корней степени l из 1. Само же $\overline{m}$ должно удовлетворять условиям:

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right) = \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{P}}\right)^{-1}, \quad \mathfrak{P} \mid \overline{\mathfrak{m}}, \tag{49}$$

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right) = \zeta(\sigma)^{-1}, \quad \sigma \notin H, \quad \mathfrak{Q} \mid \overline{m}. \tag{50}$$

Систему корней из 1 $\zeta(\sigma)$ мы будем считать постоянной на левых классах смежности S группы G по H и обозначать $\zeta(\sigma)$ через $\zeta(S)$, если $\sigma \in S$. Если же $\mathfrak{S}$ является классом смежности G по двойному модулю (H, H), то под $\zeta(\mathfrak{S})$ мы будем понимать

$$\zeta(S_1)\ldots\zeta(S_r),$$

где $S_1, \ldots, S_r$ — различные левые классы смежности G по H, содержащиеся в $\mathfrak{S}$. Мы будем предполагать, что определенные таким образом корни из 1 $\zeta(\mathfrak{S})$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\zeta(\mathfrak{S})^{g(\mathfrak{S})} = \zeta(\mathfrak{S}^{-1}), \tag{51}$$

а в случае $l = 2$ потребуем, чтобы для любых инволютивных классов $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u$ выполнялось условие

$$\zeta(\mathfrak{S}_1)\ldots\zeta(\mathfrak{S}_u) = 1 \tag{52}$$

всякий раз, как

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_1}\ldots\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_u} \approx (\alpha_\chi) \text{ в } L.$$

В приложении к этой работе доказано существование бесконечного количества чисел $\overline{m}$, удовлетворяющих условиям (50) для любых корней из 1 $\zeta(S)$, удовлетворяющих условиям (51) и (52). Нам остается выяснить, можно ли добиться, чтобы m удовлетворяло также условиям (**). Для этого надо рассмотреть отдельно случаи $l \neq 2$ и $l = 2$.

Предположим, что $l \neq 2$. В этом случае число $\overline{m}$, согласно доказательству теоремы в приложении, может быть найдено в виде произведения двух простых чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{B}^\sigma}\right)_k = \left(\frac{\varkappa_i}{N_{k/L}\mathfrak{B}^\sigma}\right)_L = \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{B}^\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathfrak{B} \mid \overline{m}, \quad i = 1, 2, \tag{53}$$

причем мы можем добиться выполнения условий (**) для $\overline{m}$, если докажем существование бесконечного количества простых чисел первого порядка $\varkappa$, удовлетворяющих условиям (**), (53) и соотношению

$$\left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{L}^\sigma}\right)_k = \zeta(S). \tag{54}$$

Выясним, когда существуют простые числа, удовлетворяющие всем этим условиям.

Сначала мы предположим, что $y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}$ в условиях (46) и (47) заданы и посмотрим, когда существует $\varkappa$, удовлетворяющее (46) и (47), остальным условиям (**), а также (53) и (54). Для этого обозначим через $\mathfrak{F}$ произведение $N_{k/L}\mathfrak{P}$ для всех критических в k/Ω дивизоров $\mathfrak{P}$, всех $N_{k/L}\mathfrak{B}^\sigma$ для $\mathfrak{B} \mid \overline{m}$, простых делителей $\mathfrak{B}$ числа M / M_l, модуля гиперпримарности и вещественных бесконечно удаленных простых дивизоров L, через $S_{\mathfrak{F}}$ — группу соединений классов дивизоров по модулю $\mathfrak{F}$, а через $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ — поле классов к $S_{\mathfrak{F}}$. Дословно повторяя рассуждения на стр. 404 работы ([8]), мы получим, что (46) и другие условия (**), а также равенство

$$\left(\frac{\overline{m}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)=\left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{55}$$

эквиваленты тому, что дивизор $(\overline{m})$ принадлежит ко вполне определенному автоморфизму s в $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ и к единичному автоморфизму в поле $L(\zeta_M)$, а условия

$$\left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{Q}^{\sigma}}\right)=\zeta(S), \quad \mathfrak{Q}\,|\,\varkappa, \quad \sigma \notin H,$$

т. е.

$$\left(\frac{\overline{\mu}^{\tau}}{\mathfrak{Q}}\right)=\zeta\,(T^{-1})^{g\,(\tau)},$$

где S — левый, а T — правый классы смежности G по H, эквивалентны тому, что $(\varkappa)$ принадлежит ко вполне определенному автоморфизму t в поле K^*, получающемуся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\overline{\mu}^{\sigma}}$, $\sigma \in H$.

Как и в первой части доказательства мы видим, что все эти условия совместны тогда и только тогда, когда в $K^* \cap \Sigma_{\mathfrak{F}}$ автоморфизмы s и t совпадают.

Поле $K^* \cap \Sigma_{\mathfrak{F}}$ получается присоединением к L всех $\sqrt[l]{\alpha_{\chi}}$ и $\sqrt[l]{m_{\Phi}}$, где $\Phi(T)$ — такая функция на правых классах смежности T группы G по H, что

$$\mu^{\Sigma\Phi\,(T)\,\tau} \approx m_{\Phi} \in L, \quad \Phi(1)=0. \tag{56}$$

Заметим, что из того, что $m_{\Phi} \in L$, т. е. $m_{\Phi}^{h}=m_{\Phi}$, ввиду того что m делится на простые дивизоры 1-го порядка, следует, что тождественно

$$\left(\sum \Phi\,(T)\,\tau\right) h \equiv \sum \Phi\,(T)\,\tau \pmod{l}.$$

Это показывает, что $\varphi(T)$ постоянно на классах смежности по модулю (H, H).

Нам надо теперь выяснить, когда s и t совпадают, во-первых, в $L\left(\sqrt[l]{m_{\Phi}}\right)$ и, во-вторых, в $L\left(\sqrt[l]{\alpha_{\chi}}\right)$. Повторяя рассуждения на стр. 404 работы ([8]), мы видим, что в $L\left(\sqrt[l]{\alpha_{\chi}}\right)$ t индуцирует единичный автоморфизм, а s индуцирует автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt[l]{\alpha_{\chi}}$ на

$$\zeta^{\sum\limits_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}},$$

если

$$(\alpha_{\chi})=\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\Sigma\varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\,\sigma\Sigma h}$$

В поле $L\left(\sqrt[l]{m_{\Phi}}\right)$ s индуцирует автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt[l]{m_{\Phi}}$ на

$$\left[\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{m}_\Phi}\right]^{-\frac{1}{2}} \prod_{\mathfrak{P}} \zeta^{\sum_{\mathfrak{S}} F_{\mathfrak{P},\Phi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}},$$

если

$$\mathfrak{d}_\Phi = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\sum_{\mathfrak{S}} F_{\mathfrak{P},\Phi}(\mathfrak{S})\, \sigma\Sigma h}, \quad m_\Phi = \mathfrak{d}_\Phi \mathfrak{m}_\Phi.$$

Автоморфизм t индуцирует в поле $\left(\sqrt[l]{m_\Phi}\right)$ автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt[l]{m_\Phi}$ на

$$\prod_T \zeta\,(T^{-1})^{g\,(T^{-1})\,\Phi\,(T)},$$

где произведение распространено на все правые классы смежности группы G по H.

Обозначим $\left[\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{m}_\Phi}\right]^{-\frac{1}{2}}$ через ζ^{a_Φ}, $\prod_T \zeta\,(T^{-1})^{g\,(T^{-1})\,\Phi\,(T)}$ — через ζ^{b_Φ}. Тогда речь будет идти о совместности системы сравнений:

$$\sum f_{\mathfrak{P}}(S)\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \equiv 0\,(l), \tag{57}$$

если $f_{\mathfrak{P}}(S)$ удовлетворяет (35),

$$\sum \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} \equiv 0\,(l), \tag{58}$$

$$\sum F_{\mathfrak{P},\Phi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} + a_\Phi \equiv b_\Phi\,(l). \tag{59}$$

Если бы эта система была не совместна, то существовала бы линейная комбинация этих сравнений, у которой все коэффициенты при $y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}$ равны 0, а свободный член $\neq 0$. Заметим, что линейная комбинация различных сравнений (57) есть снова одно из сравнений, только с другим $f_{\mathfrak{P}}(S)$, и то же самое относится к каждой из групп сравнений (58) и (59). Таким образом, если бы наша система была не совместна, то существовали бы такие $f_{\mathfrak{P}}$, χ и Φ, что в сравнении

$$\sum f_{\mathfrak{P}}(S)\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} + \sum \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} + \sum F_{\mathfrak{P},\Phi}(\mathfrak{S})\, y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}} + a_\Phi \equiv b_\Phi\ (l)$$

все коэффициенты при $y_{\mathfrak{P},\mathfrak{S}}$ равны 0, а свободный член $b_\Phi - a_\Phi$ отличен от 0. Из сделанного предположения следует, что

$$F_{\mathfrak{P},\Phi}(\mathfrak{S}) \equiv -\sum_{S\in\mathfrak{S}} f_{\mathfrak{P}}(S) - \varphi_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{S})\ (l),$$

т. е.

$$\mathfrak{d}_\Phi = (\alpha_\chi)^{-1} \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{-\Sigma f_{\mathfrak{P}}(S)\,\sigma\Sigma h}, \tag{60}$$

где $\sum_{S\in\mathfrak{S}} f_{\mathfrak{P}}(S)$ удовлетворяет условию (35). Условие же совместности нашей системы записывается теперь в виде $a_\Phi \equiv b_\Phi\,(l)$, т. е.

$$\prod \zeta(T^{-1})^{g(T^{-1})\,\Phi(T)} = \left[\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{m}_\Phi}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{61}$$

для всякого Φ, которое постоянно на классах смежности по модулю (H, H), удовлетворяет условию (56) и для которого дивизор $\mathfrak{d}_\Phi$ в разложении $\mathfrak{m}_\Phi$ имеет вид (22).

Нам остается выяснить, когда существуют корни из 1 $\zeta(S)$, удовлетворяющие условиям (51), (52) и (61).

Положим

$$\zeta(S) = \zeta^{x_S}, \quad \left[\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{m}_\Phi}\right]^{-\frac{1}{2}} = \zeta^{b_\Phi};$$

тогда условия на x_S запишутся в виде сравнений

$$\begin{gathered} g(\mathfrak{S}) \sum_{S \in \mathfrak{S}} x_S \equiv \sum_{S' \in \mathfrak{S}^{-1}} x_{S'}\ (l), \\ \sum_T x_{T^{-1}} \Phi(T)\, g(T^{-1}) \equiv b_\Phi\ (l). \end{gathered} \tag{62}$$

Найдем условия совместности этой системы. Если система не совместна, то существует линейная комбинация входящих в нее сравнений, в которой все коэффициенты при неизвестных x_S равны 0, а свободный член $\neq 0$. Пусть

$$\sum_{\mathfrak{S}} C_{\mathfrak{S}}\, g(\mathfrak{S}) \Big(\sum_{S \in \mathfrak{S}} x_S - \sum_{S' \in \mathfrak{S}^{-1}} x_{S'}\Big) + \sum_\Phi d_\Phi \sum_T x_{T^{-1}} \Phi(T)\, g(T^{-1}) \equiv \sum_\Phi d_\Phi b_\Phi\ (l) \tag{63}$$

является такой комбинацией. Положим

$$\sum_\Phi d_\Phi \Phi(T) = \psi(T).$$

Тогда, очевидно,

$$\sum_\Phi d_\Phi b_\Phi \equiv b_\psi\ (l).$$

Учитывая, что в (63) коэффициенты при всех x_S равны 0, получаем:

$$g(T)\, \psi(T^{-1}) \equiv C_{\mathfrak{T}^{-1}} - C_{\mathfrak{T}}\, g(T)\ (l),$$

т. е.

$$\psi(T) \equiv g(\mathfrak{T})\, C_{\mathfrak{T}} - C_{\mathfrak{T}^{-1}}\ (l). \tag{64}$$

Мы уже видели, что $\psi(T)$ постоянно на классах смежности по модулю (H, H). Из (64) это следует еще раз, причем, если положить

$$\psi(\mathfrak{S}) = \psi(S), \quad S \in \mathfrak{S},$$

то из (64) следует, что

$$g(\mathfrak{S})\, \psi(\mathfrak{S}^{-1}) \equiv -\psi(\mathfrak{S})\ (l).$$

Вместе с (60) это показывает, что $\psi(\mathfrak{S})$ удовлетворяет всем условиям, встречающимся в определении символа $[X]_\psi$. Отсюда мы заключаем, что

$$\zeta^{b_\psi} = \left[\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{m}_\varphi}\right]^{-\frac{1}{2}} = 1,$$

т. е. $b_\psi \equiv 0\,(l)$, откуда и следует совместность системы (62).

Аналогичным образом мы поступаем и в случае $l = 2$. Согласно доказательству теоремы, данному в приложении, число $\overline{m}$ может быть в этом случае найдено в виде произведения $\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3$ трех простых чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{P}^\sigma}\right) = \left(\frac{\overline{\mu}}{\mathfrak{P}^\sigma}\right), \quad \sigma \notin H, \quad i = 1, 2, 3, \tag{65}$$

причем мы можем добиться выполнения условий (**) и (48) для $\overline{m}$, если докажем существование бесконечного числа простых чисел $\varkappa$, удовлетворяющих условиям (**), (54) и (65).

Как и в случае $l \neq 2$, для того чтобы существовали такие числа, необходимо и достаточно, чтобы была совместна следующая система:

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}} x_S \equiv \sum_{S' \in \mathfrak{S}^{-1}} x_{S'} \, (l), \tag{66}$$

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_1 + \cdots + \mathfrak{S}_u} x_S \equiv 0 \, (l), \text{ если } \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_1} \cdots \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_u} \approx (\alpha_\chi) \text{ и } [\chi, X] \text{ определено,}$$

$$\sum_T x_{T^{-1}} \Phi(T) \equiv b_\Phi \; (l)$$

для каждой функции Φ, удовлетворяющей условию (56).

Предположение о несовместности этой системы приводит опять к наличию линейной комбинации входящих в нее уравнений, в которой коэффициенты при всех x_S равны 0, а свободный член $\neq 0$. Пусть эта линейная комбинация есть

$$\sum_{\mathfrak{S}} C_{\mathfrak{S}} \Big(\sum_{S \in \mathfrak{S}} x_S - \sum_{S' \in \mathfrak{S}^{-1}} x_{S'} \Big) + \sum_\Phi d_\Phi \sum_T x_S \Phi(S^{-1}) +$$
$$+ \sum_{(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u)} e_{\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u} \sum_{S \in \mathfrak{S}_1 + \ldots + \mathfrak{S}_u} x_{\mathfrak{S}} \equiv \sum_\Phi d_\Phi b_\Phi \; (l),$$

где внешняя сумма в третьем слагаемом распространена на все совокупности $(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u)$ инволютивных классов по модулю (H, H), для которых

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_1} \cdots \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_u} \approx (\alpha_\chi) \text{ и } [\chi, X] \text{ определено.} \tag{67}$$

Мы полагаем опять

$$\sum_\Phi d_\Phi \Phi(T) = \psi(T)$$

и получаем, как и при $l \neq 2$,

$$\psi(\mathfrak{S}^{-1}) \equiv C_{\mathfrak{S}^{-1}} + C_{\mathfrak{S}} + \sum_{(\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u)} e_{\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_n} \varepsilon_{\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u} (\mathfrak{S}) \; (2), \tag{68}$$

где $\varepsilon_{\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u}(\mathfrak{S})$ есть характеристическая функция множества $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_u$ инволютивных автоморфизмов, если для этого множества выполнено условие (67), и 0 — в противном случае. Отсюда мы заключаем, что

$$\psi(\mathfrak{S}^{-1}) \equiv \psi(\mathfrak{S}) \; (2).$$

Так как, по определению,

$$\prod_{\mathfrak{S}} \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{e_{\mathfrak{S}_1,\ldots,\mathfrak{S}_u}(\mathfrak{S})} \approx (\alpha_\chi), \quad [\chi, X] \text{ определено},$$

где произведение распространено на все инволютивные автоморфизмы, то из (68) следует, что

$$\prod_{\mathfrak{S}} \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{\psi(\mathfrak{S})} \approx (\alpha_\chi), \quad [\chi, X] \text{ определено.}$$

Таким образом, функция $\psi(\mathfrak{S})$ удовлетворяет всем условиям, входящим в определение $[X]_\psi$, а следовательно,

$$(-1)^{b_\psi} = \left[\frac{\bar{\mu}}{m_\psi}\right] = [X]_\psi = 1,$$

что и означает совместность системы (66). Теорема доказана.

§ 3. Общее условие погружаемости для шольцевых полей

В дальнейшем нам понадобится обобщение теоремы 1 на более общий случай, когда поле K/L в цепочке (3) является центральным, но не простым центральным расширением поля k/L. Для этого нам необходимо ввести в рассмотрение еще одну серию инвариантов поля k.

Обозначим группу Галуа поля K/L через $\mathfrak{G}$, а поля K/k — через $\mathfrak{Z}$. Очевидно, $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z} \cong G$ и $\mathfrak{Z}$ лежит в центре $\mathfrak{G}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что $\mathfrak{Z}$ имеет показатель l. Любой характер X группы $\mathfrak{Z}$ определяет некоторый класс l-инвариантных чисел X в k. Очевидно, что эти классы образуют группу, являющуюся гомоморфным образом группы характеров $\mathscr{X}$ группы $\mathfrak{Z}$. Выберем в $\mathscr{X}$ некоторый фиксированный базис $X_1, \ldots, X_r$, с которым будем в дальнейшем всегда иметь дело. Мы будем всегда предполагать, что инварианты $[\chi, X_i]$, $(X_i)_M$ и $[X_i]_M$ для $i = 1, \ldots, r$ равны 1.

Пусть $\varphi_1(S), \ldots, \varphi_s(S)$ — функции на правых классах смежности G по H, постоянные на классах смежности G по модулю (H, H). Под A^φ мы будем подразумевать $A^{\Sigma\varphi(S)\sigma}$, где S в показателе пробегает все правые классы смежности группы G по H, а $\sigma \in S$. Ввиду того, что φ постоянно на классах смежности по модулю (H, H), из $\alpha \in L$ следует $\alpha^\varphi \in L$ и из l-инвариантности μ в k/L следует l-инвариантность μ^φ. Поэтому X^φ есть определенный класс l-инвариантных чисел, если X — тоже класс l-инвариантных чисел.

Предположим, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ таковы, что

$$X_1^{\varphi_1} \ldots X_{s-1}^{\varphi_{s-1}} = 1, \tag{69}$$

$$X_s^{\overset{*}{\varphi}_1} = \ldots = X_s^{\overset{*}{\varphi}_{s-1}} = 1. \tag{70}$$

Выберем в классах $X_1, \ldots, X_{s-1}$ l-гиперпримарных представителей $\mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$. Ввиду (69), мы имеем:

$$\mu_1^{\varphi_1} \ldots \mu_{s-1}^{\varphi_{s-1}} \approx m_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} \in L. \tag{71}$$

Положим

$$[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} = [m_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}, X_s],$$

где символ $[\alpha, X]$ определяется формулами (4') и (10) с заменой α_χ на α.

Докажем, что символ $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ не зависит от выбора l-гиперпримарных представителей $\mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$ в классах $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Переход к другой системе представителей $\mu_1 m_1, \ldots, \mu_{s-1} m_{s-1}$, $m_i \in L$, приводит к умножению $m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ на $m_1^{\varphi_1} \cdots m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}$. Ввиду очевидной мультипликативности символа $[\alpha, X]$ по α, символ $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ умножится тогда на

$$[m_1^{\varphi_1} \ldots m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}, X_s].$$

На основании очевидного тождества

$$[\alpha^{\varphi}, X] = [\alpha, X^{\varphi^*}],$$

мы имеем:

$$[m_1^{\varphi_1} \ldots m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}, X_s] = [m_1^{\varphi_1}, X_s] \ldots [m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}, X_s] =$$

$$= \left[m_1, X_s^{\varphi_1^*}\right] \ldots \left[m_{s-1}, X_s^{\varphi_{s-1}^*}\right]. \qquad (72)$$

Ввиду (70),

$$X_s^{\varphi_i^*} = 1, \quad i = 1, \ldots, s-1,$$

а ввиду l-гиперпримарности m_i, отсюда следует

$$\left[m_i, X^{\varphi_i^*}\right] = 1.$$

В комбинации с (72) это и дает независимость символа

$$[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$$

от выбора $\mu_i \in X_i$.

Заметим, что формулой (71) $m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ определяется в L не однозначно с точностью до l-равенства, но однозначно с точностью до множителя α_χ. Ввиду того что, по предположению, $[\chi, X_s] = 1$, символ $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ не меняется при умножении $m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ на α_χ.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы шольцево поле K с инвариантами $[\chi, X]$, $(X)_M$ и $[X]_\psi$, равными 1, можно было погрузить в такое поле K с группой Галуа $\mathfrak{G}$ над L, что K^*/Ω — шольцево, необходимо и достаточно, чтобы все инварианты $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$, $s = 2, \ldots, r$, обращались в* 1.

Доказательство. Для доказательства необходимости предположим, что поле k погружаемо в поле K с нужным нам свойством. Это значит, что в классах $X_1, \ldots, X_r$ можно выбрать таких представителей $\mu_1, \ldots, \mu_r$, что поле, получающееся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\mu_i^\sigma}$, $i = 1, \ldots, r$, $\sigma \in G$, — шольцево. Тем более шольцево — поле K_s, получающееся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\mu_i^\sigma}$, $i = 1, \ldots, s$. Очевидно, что K_s получается присоединением к K_{s-1} всех $\sqrt[l]{\mu_s^\sigma}$, $\sigma \in G$.

Ввиду теоремы 1, для шольцевости K_s необходимо, чтобы $[\chi, X_s]=1$ в K_{s-1}. Число $m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ является таким числом из L, что $\sqrt[l]{m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}} \in K_{s-1}$, т. е. одним из чисел α_χ. Таким образом, $[m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]$ должно равняться 1, чем теорема 2 и доказана в части необходимости.

Достаточность условий теоремы 2 мы докажем, показав, что при выполнении этих условий поле k при любом $s \leqslant r$ может быть погружено в поле K_s, для которого K_s^* — шольцево. Теорема 2 вытекает из этого утверждения ввиду того, что $K_r=K$. Само утверждение мы будем доказывать индукцией по s. Мы можем таким образом считать, что в классах $X_1, \ldots, X_{s-1}$ выбраны такие числа $\mu_1, \ldots, \mu_{s-1}$, что поле K_{s-1}^*, получающееся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\mu_i^\sigma}$, $i=1, \ldots, s-1$, $\sigma \in G$, — шольцево. При этом мы будем считать, что соответствующие им дивизоры $\mathfrak{m}_i \neq 1$ и удовлетворяют условиям:

$$(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j^\sigma)=1 \text{ при } i \neq j, \quad \sigma \notin H. \tag{73}$$

Ввиду теоремы 1, для того чтобы существовало поле K_s с нужными нам свойствами, необходимо и достаточно, чтобы в K_{s-1}^* все инварианты $[\chi, X_s]$, $(X_s)_M$ и $[X_s]_\psi$ равнялись 1. Так как X_s содержит l-инвариантные числа из k, то инварианты $(X_s)_M$ и $[X_s]_\psi$ можно вычислить в поле k, где они, по предположению, равны 1. По той же причине инварианты $[\chi, X_s]$ равны 1 для характеров χ группы Галуа поля k/L.

Все числа α_χ для любых характеров χ группы Галуа поля K_{s-1}^*/L получаются из чисел α_χ, соответствующих характерам группы Галуа k/L, умножением на числа $m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ — функции, удовлетворяющие условиям (69).

Действительно, нам надо найти такие числа $m \in L$, что $\sqrt[l]{m} \in K_{s-1}$. Так как тем более $m \in k$, то $m \approx \mu_1^{\varphi_1} \ldots \mu_{s-1}^{\varphi_{s-1}}$ в k.

Рассматривая дивизоры $\mathfrak{m}_i$, мы видим, что ввиду (73) можно считать, что

$$\mathfrak{m}_1^{\varphi_1} \in L, \ldots, \mathfrak{m}_{s-1}^{\varphi_{s-1}} \in L.$$

Из этого следует, как и на стр. 549, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ постоянны на классах смежности G по модулю (H, H) и $m \approx m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ в k, а тем самым $m \approx m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} \alpha_\chi$ в L.

Таким образом, нам надо добиться того, чтобы выполнялись равенства

$$[m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]=1 \tag{74}$$

для всех $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$, удовлетворяющих условиям (69).

Мы можем добиваться выполнения равенств (74), умножая каждое μ_i на $m_i \in L$, $i=1, \ldots, s-1$, если при этом не нарушается шольцевость поля K_{s-1}^*. При таком умножении $[m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]$ умножится на $[m_1^{\varphi_1} \ldots m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}, X_s]$. Следовательно, нам надо подобрать m_i так, чтобы выполнялись равенства:

$$\left[m_1^{\varphi_1} \ldots m_{s-1}^{\varphi_{s-1}}, X_s\right] = [m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]^{-1}$$

или

$$\left[m_1, X_s^{\varphi_1^*}\right] \ldots \left[m_{s-1}, X_s^{\varphi_{s-1}^*}\right] = [m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]^{-1}. \qquad (75)$$

Обозначим $\left[m_i, X_s^{\varphi_i^*}\right]$ через $\zeta_i(\varphi_i)$, а $[m_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, X_s]$ — через $\eta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$. Соотношение (75) на m_i переписывается тогда так:

$$\left[m_i, X_s^{\varphi_i^*}\right] = \zeta_i(\varphi_i)^{-1}, \qquad (76)$$

где

$$\zeta_1(\varphi_1) \ldots \zeta_{s-1}(\varphi_{s-1}) = \eta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}). \qquad (77)$$

При этом, очевидно,

$$\zeta_i(\varphi_i + \varphi_i') = \zeta_i(\varphi_i)\,\zeta_i(\varphi_i'), \qquad (77')$$

$$\eta(\varphi_1 + \varphi_1', \ldots, \varphi_{s-1} + \varphi_{s-1}') = \eta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})\,\eta(\varphi_1', \ldots, \varphi_{s-1}'). \qquad (77'')$$

Посмотрим, какие условия надо наложить на m_i, чтобы замена μ_i на $\mu_i m_i$ не нарушила шольцевости поля K_{s-1}^*. Обозначим через $\mathfrak{P}$ произвольный простой делитель дискримината $k/\Omega(\zeta)$, через $\mathfrak{Q}_i$ — произвольный простой делитель m_i, через $\mathfrak{B}_i$ — произвольный простой делитель $\mathfrak{m}_i$. Следующие условия заведомо гарантируют нам, что умножение μ_i на m_i не нарушит шольцевости K_{s-1}^*:

$$\left(\frac{m_i}{\mathfrak{P}}\right) = 1, \quad \left(\frac{m_i}{\mathfrak{Q}_j^\sigma}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mu_i}{\mathfrak{Q}_j^\sigma}\right) = 1, \quad \left(\frac{m_i}{\mathfrak{B}_j^\sigma}\right) = 1. \qquad (78)$$

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{Q}_i) \equiv 1 \ (M), \quad \left(\frac{m_i}{\mathfrak{R}}\right) = 1, \quad \mathfrak{R} \mid M. \qquad (79)$$

Для того чтобы удовлетворялось условие (71), положим

$$\left(\frac{\mu_s^{\varphi_i^*}}{\mathfrak{Q}_i}\right) = 1, \quad \left(\frac{m_i}{m_s^{\varphi_i^*}}\right) = \zeta_i(\varphi_i). \qquad (80)$$

Среди условий (77) содержатся условия:

$$\left(\frac{m_i}{\mathfrak{Q}_i^\sigma}\right) = 1, \quad \mathfrak{Q}_i \mid m_i.$$

Для того чтобы удовлетворить им, нам нужно применить теорему, доказанную в приложении. Согласно доказательству этой теоремы, мы должны искать m в виде $\varkappa_i \varkappa_i'$ при $l \neq 2$ и $\varkappa_i \varkappa_i' \varkappa_i''$ при $l = 2$, где $\varkappa_i, \varkappa_i', \varkappa_i''$ — простые главные дивизоры. Выпишем условия, которым должны удовлетворять $\varkappa_i, \varkappa_i'$ и $\varkappa_i''$ для того, чтобы для m_i удовлетворялись условия (76) и (78). При этом мы запишем условия лишь для $\varkappa_i$, подразумевая, что они же должны выполняться и для $\varkappa_i'$, а при $l = 2$ — и для $\varkappa_i''$:

$$\left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{P}}\right) = 1, \qquad (81)$$

$$\left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{Q}_j^\sigma}\right) = 1, \quad i \neq j, \qquad (82)$$

$$\left(\frac{\mu_j}{\mathfrak{Q}_i^{\sigma}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{P}_j^{\sigma}}\right) = 1, \tag{83}$$

$$\left(\frac{\mu_s^{\varphi_i^*}}{\mathfrak{Q}_i}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varkappa_i}{\mathfrak{m}_s^{\varphi_i^*}}\right) = \zeta_i(\varphi_i)^{\varepsilon}, \tag{84}$$

$$\varkappa_i \equiv 1 \ (M), \tag{85}$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2}$ при $l \neq 2$ и $\varepsilon = 1$ при $l = 2$. Числа $\varkappa_i$ мы будем подбирать последовательно при $i = 1, \ldots, s-1$, добиваясь для любого $\varkappa_t$ выполнения условий (83) для $i = t$ и сразу для всех $j = 1, \ldots, s-1$, условий (82) — для $i = t$, $j < t$ и $i < t$, $j = t$, а условий (81) — для $i = t$.

Заметим, что условия (81), (82), (83) и (84) совместны, так как они равносильны тому, что $\varkappa_t$ принадлежит к единичному автоморфизму в некотором поле Σ. Для того чтобы выяснить совместность этих условий с условием (84), надо найти пересечение Σ с тем полем Σ', принадлежность в котором к определенному автоморфизму эквивалентна выполнению (84). Очевидно, что дискриминант Σ' состоит только из делителей $\mathfrak{m}_s$. Отсюда легко следует, что пересечение Σ с Σ' есть композит полей $L\left(\sqrt[l]{m_{\varphi^*}}\right)$, где $\mu_s^{\varphi^*} \approx m_{\varphi^*} \in L$ для тех функций φ, для которых это равенство имеет место. Таким образом, все условия (78), (79) и (80) совместны, если

$$\zeta_i(\varphi) = 1 \tag{85'}$$

для любого φ, для которого

$$\mu_s^{\varphi^*} \approx m_{\varphi^*} \in L.$$

Теперь нам остается только доказать, что существуют функции $\zeta_i(\varphi)$, удовлетворяющие условиям (69) и (70). Для этого рассмотрим прямое произведение $\Phi^{(s-1)}$ $s-1$ экземпляра группы Φ функций $\varphi(S)$, постоянных на классах смежности G по (H, H) и определенных $\mathrm{mod}\, l$. Формула (77″) показывает, что $\eta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$ является характером подгруппы Φ_0 группы $\Phi^{(s-1)}$, состоящей из тех наборов $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$ функций, для которых

$$X_1^{\varphi_1} \ldots X_{s-1}^{\varphi_{s-1}} = 1.$$

С другой стороны, $\zeta(\varphi_1) \ldots \zeta_{s-1}(\varphi_{s-1})$, где $\zeta_i(\varphi_i)$ удовлетворяют (77′) — это самый общий характер на $\Phi^{(s-1)}$. Условия (85′) означают, что этот характер должен обращаться в 1 на подгруппе Φ_1 группы $\Phi^{(s-1)}$, состоящей из тех наборов функций $(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$, для которых

$$X_s^{\varphi_1^*} = \ldots = X_s^{\varphi_{s-1}^*} = 1.$$

Наша задача заключается, таким образом, в том, чтобы доказать существование такого характера группы $\Phi^{(s-1)}$, который совпадает на Φ_0 с $\eta(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$, а на Φ_1 — с единичным характером. Очевидно, что для существования такого характера необходимо, чтобы характер η сов-

пал с единичным характером на $\Phi_0 \cap \Phi_1$. Но как раз это и утверждается равенством единице инварианта $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$. Теорема доказана.

Заметим, что для инвариантов $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ имеют место соотношения

$$[X_1X_1', \ldots, X_{s-1}X_{s-1}'; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} = \\ = [X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} [X_1', \ldots, X_{s-1}'; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}, \quad (86)$$

$$[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_sX_s']_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} = \\ = [X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} [X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s']_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} \quad (87)$$

и соотношение, аналогичное (18) для инвариантов $[\chi, X]$.

§ 4. Построение полей с разрешимой группой Галуа

1. Канонические гомоморфизмы. Рассмотрим произвольную конечную группу F порядка m и свободную группу S_d с md образующими, которые мы будем обозначать через $s_{u,i}$, $u \in F$, $i = 1, \ldots, d$. В S_d рассмотрим ряд нормальных делителей N_c, определяемых следующим образом: $N_0 = S_d$, N_{c+1} есть подгруппа N_c, порожденная l^k-ми степенями элементов S_d и коммутаторами элементов S_d с элементами N_c. Здесь простое число l и показатель k раз навсегда фиксированы. S_d / N_c мы будем обозначать через $\mathfrak{S}_d^{(c)}$. Очевидно, что эта факторгруппа зависит от c, d, l, k и m, но так как l, k и группа F будут во всех наших рассуждениях одни и те же, то обозначение отражает только c и d. Каждому $v \in F$ соответствует перестановка образующих $s_{u,i}$ по правилу:

$$s_{u,i}^v = s_{uv,i}, \quad i = 1, \ldots, d, \quad u \in F. \quad (88)$$

Такая перестановка определяет автоморфизм S_d, причем эти автоморфизмы образуют группу, изоморфную F. Так как N_c, как легко видеть,— характеристическая подгруппа S_d, то и в $\mathfrak{S}_d^{(c)}$ мы получаем группу автоморфизмов, изоморфную F. Элементы $x \in \mathfrak{S}_d^{(c)}$, которые принадлежат к центру $\mathfrak{S}_d^{(c)}$ и удовлетворяют уравнению $x^{l^{k-r}} = 1$, образуют нормальный делитель $\mathfrak{S}_d^{(c)}$. Факторгруппу $\mathfrak{S}_d^{(c)}$ по этому нормальному делителю обозначим через $\mathfrak{S}_d^{(c,r)}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{S}_d^{(c,0)} = \mathfrak{S}_d^{(c-1)}, \quad \mathfrak{S}_d^{(c,k)} = \mathfrak{S}_d^{(c)}$$

и что $\mathfrak{S}_d^{(c,r)}$ гомоморфно $\mathfrak{S}_d^{(c,r-1)}$. Ядро этого гомоморфизма обозначим через Z_r.

Ясно, что определенные нами группы $\mathfrak{S}_d^{(c,r)}$ являются факторгруппами групп $\mathfrak{S}_d^{(c)}$ по нормальным делителям, допустимым относительно операторов из F, определенных формулой (88). Таким образом, все эти группы являются операторными группами с областью операторов F.

Рассмотрим в F некоторую фиксированную силовскую l-подгруппу $\mathfrak{h}$. Определим в $\mathfrak{S}_d^{(c,r)}$ ряд подгрупп $Z_{r,s}$ по следующему правилу: $Z_{r,0} = Z_{r-1}$, $Z_{r,s} = [\mathfrak{h}, Z_{r,s-1}]$ — подгруппа, порожденная элементами z^{1-h},

где $z \in Z_{r,s-1}$, $h \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{G}_d^{(c,r)} / Z_{r,s}$ обозначим через $\mathfrak{G}_d^{(c,r,s)}$. Очевидно, что при некотором m, зависящем только от группы F,

$$\mathfrak{G}_d^{(c,r,m)} = \mathfrak{G}_d^{(c,r)}.$$

Пусть в цепочке полей $\Omega \subset L \subset k \subset K$ группа Галуа поля K / Ω есть $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r)}$, где F — группа Галуа k / Ω, $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ — группа Галуа K / k. Рассмотрим поле $\bar{K} \supset K$ такое, что группа Галуа $\bar{K} / k$ есть $\mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)}$, а $\bar{K} / L$ — $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)}$. Если поля, сопряженные с $\bar{K} / \Omega$, независимы над k, то их композит мы будем обозначать через $\bar{K}^*$.

Группа Галуа поля $\bar{K}^* / \Omega$ имеет следующее строение (что легко получить, повторяя рассуждения на стр. 395 работы ([8])).

Обозначим $Z_r / Z_{r+1,s}$ через $\mathfrak{A}$, $Z_r / Z^u_{r+1,s}$, $u \in F$, — через $\mathfrak{A}^u$. Существует естественный изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}^u$. Действие его на $\alpha \in \mathfrak{A}$ будем обозначать через α^u. При этом различные u, принадлежащие к одному правому классу смежности U группы F по $\mathfrak{h}$, оказывают на α одно и то же действие. Ввиду этого, мы будем обозначать α^u через α^U и $\mathfrak{A}^u$ — через $\mathfrak{A}^U$. Пусть $a(\sigma, \tau)$ — система множителей на $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$, соответствующая расширению $\mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)}$. Рассмотрим расширение $\mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)*}$ группы $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ с нормальным делителем, являющимся прямым произведением всех $\mathfrak{A}^U$, и системой множителей

$$A(\sigma, \tau) = (\ldots, \alpha(\sigma^{u^{-1}}, \tau^{u^{-1}})^U, \ldots).$$

Элементы из F определяют естественным образом автоморфизмы в группе $\mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)*}$, которую мы будем теперь рассматривать как F-операторную группу. Группа Галуа поля $\bar{K}^* / \Omega$ есть полупрямое произведение $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r+1,s)*}$.

Мы будем в дальнейшем рассматривать операторные канонические гомоморфизмы групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$ на $\mathfrak{G}_\delta^{(c)}$, определенные в работе ([8]). Легко видеть, что эти гомоморфизмы определяют гомоморфизмы $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ на $\mathfrak{G}_\delta^{(c,r)}$ и $\mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$ на $\mathfrak{G}_\delta^{(c,r,s)*}$. При этом, очевидно, эти гомоморфизмы являются F-операторными. К таким гомоморфизмам применимы понятия композиции гомоморфизмов, функций гомоморфизма и их степеней, введенные в работах ([6]) и ([8]).

Мы будем применять эти понятия к теории полей при помощи следующих соображений. Пусть дана цепочка полей $\Omega \subset L \subset k \subset K$, где k / Ω нормально с группой Галуа F, L принадлежит к силовской подгруппе $\mathfrak{h}$, а K / k имеет в качестве группы Галуа одну из групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$, $\mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$. При этом K / Ω нормально и имеет группу Галуа $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c)}$, соответственно $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ и $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$. Предположим, что K / Ω — шольцево относительно M и l. Каждому гомоморфизму S группы Галуа K / k соответствует подполе $K(S)$, также шольцево относительно M и l. В этом поле определены инварианты $[\chi, X]$ и $(X)_M$, инварианты $[X]_\psi$, если $[\chi, X] = (X)_M = 1$, и инварианты $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_\rho]_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$, если $[\chi, X] = (X)_M = [X]_\psi = 1$, так что каждый из этих инвариантов является функцией гомоморфизма S.

2. Степени инвариантов как функций гомоморфизмов. В работах ([6]) и ([8]) значительные трудности вызвало то обстоятельство, что инварианты $[\chi, X]$ и $[X]_\psi$ поля k определены не для всех χ и X и поля k и тем самым один такой вариант, рассмотренный как функция

гомоморфизма, определен не для всех гомоморфизмов. В нашем, более общем случае эти трудности еще возрастают. Они, однако, могут быть обойдены при помощи следующего предложения.

ЛЕММА 3. *Для любого шольцева относительно M и l поля k, для всех его подполей и для всех χ и X можно определить символ $\{\chi, X\}$, совпадающий с $[\chi, X]$ всякий раз, как этот символ определен, и удовлетворяющий условиям:*

$$\{\chi_1\chi_2, X\} = \{\chi_1, X\}\{\chi_2, X\}, \tag{89}$$

$$\{\chi, X_1X_2\} = \{\chi, X_1\}\{\chi, X_2\}, \tag{90}$$

$$\{\chi_1, X_1\} = \{\chi, X\}, \tag{91}$$

аналогичным (16), (17) *и* (18).

Доказательство. Нам достаточно определить символ $\{\chi, X\}$, удовлетворяющий условиям (89) и (90) для любых χ и X в самом поле k. Тогда в любом подполе мы определим этот символ при помощи соотношения (91), причем все условия леммы 3 будут, как легко проверить, выполнены.

Задача о доопределении символа $[\chi, X]$ до символа $\{\chi, X\}$ есть, по существу, задача о продолжении функции $\varphi(a, b)$, заданной на некоторых парах векторов двух векторных пространств A и B до билинейной функции, заданной на любых парах векторов. В общем случае легко выяснить, когда такое продолжение возможно. Для этого рассмотрим кронекеровское произведение $A \circ B$ пространств A и B и поставим паре векторов a, b в соответствие вектор $a \circ b \in A \circ B$. Билинейность функции $\varphi(a, b)$ эквивалентна тому, что функция

$$f(a \circ b) = \varphi(a, b),$$

заданная в $A \circ B$, может быть линейно продолжена на все $A \circ B$. Таким образом, для того чтобы функцию $\varphi(a, b)$ можно было билинейно распространить на все $a \in A$, $b \in A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: если $\varphi(a_1, b_1)$, $\varphi(a_2, b_2)$ и $\varphi(a_3, b_3)$ определены и

$$a_1 \circ b_1 + a_2 \circ b_2 \equiv a_3 \circ b_3,$$

то

$$\varphi(a_1, b_1) + \varphi(a_2, b_2) = \varphi(a_3, b_3), \tag{92}$$

причем знак $\equiv$ означает равенство векторов в $A \circ B$.

Перейдем к заданной нами функции $[\chi, X]$, помня, что мы должны заменить аддитивную запись мультипликативной. Выберем в группе классов X базис $X_1, \ldots, X_t$, а в каждом классе X_i — произвольного представителя μ_i. Положим

$$\mu_X \approx \mu_{X_1}^{r_1} \cdots \mu_{X_t}^{r_t},$$

если

$$X = X_1^{r_1} \cdots X_t^{r_t}.$$

Очевидно, что $X \to \mu_X$ является изоморфизмом группы X в группу $k^\times / k^{\times l}$. Возьмем произвольный простой дивизор $\mathfrak{P}$ и определим функцию

$$\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X) \approx \mu_X^{\Sigma \varphi^*_{\mathfrak{P},\chi}(\mathfrak{T})\tau}$$

в обозначениях, принятых в § 1. Очевидно, что

$$\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_1\chi_2, X) \approx \alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_1, X)\,\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_2, X),$$

$$\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X_1X_2) \approx \alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X_1)\,\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X_2),$$

откуда следует, что отображение $\chi \circ X \to \alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X)$ определяет гомоморфизм кронекеровского произведения группы характеров χ и группы классов X в группу $k^{\times}/k^{\times l}$. В частности, если

$$(\chi_1 \circ X_1)(\chi_2 \circ X_2) \equiv (\chi_3 \circ X_3),$$

то

$$\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_1, X_1)\,\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_2, X_2) \approx \alpha_{\mathfrak{P}}(\chi_3, X_3). \tag{93}$$

Так как

$$[\chi, X] = \prod_{\mathfrak{P}} \left(\frac{\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X)}{\mathfrak{P}}\right) \tag{94}$$

и определено только тогда, когда все символы $\left(\frac{\alpha_{\mathfrak{P}}(\chi, X)}{\mathfrak{P}}\right)$ определены, то из (94) следует выполнение условия (92) для функции $[\chi, X]$. Тем самым лемма доказана.

В точности те же рассуждения применимы к инвариантам $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$ и показывают, что можно определить в поле k и всех его подполях для любых $X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s$ инвариант $\{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$, совпадающий с $[X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s]_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$, когда этот последний инвариант определен, и обладающий свойствами:

$$\{X_1X_1', \ldots, X_{s-1}X_{s-1}'; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} =$$

$$= \{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} \{X_1', \ldots, X_{s-1}'; X_s'\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}, \tag{95}$$

$$\{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s X_s'\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} =$$

$$= \{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} \{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s'\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}, \tag{96}$$

$$\{X_1', \ldots, X_{s-1}'; X_s'\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} = \{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}, \tag{97}$$

аналогичными (89), (90) и (91).

Ввиду соотношения (95), мы можем разложить любой инвариант

$$\{X_1, \ldots, X_{s-1}; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$$

в произведение инвариантов

$$\{1, \ldots, X_i, \ldots, 1; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями:

$$\{1, \ldots, X_i, \ldots, 1; X_s\}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}} = \{X_i, X_s\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$$

и ограничимся, на основании сказанного выше, рассмотрением инвариантов $\{X, X'\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$.

ЛЕММА 4. *Пусть задано шольцево относительно M и l поле k, в котором $[\chi, X] = (X)_M = 1$ для всех χ и X. В поле k и во всех его подполях можно определить для любого X символ $\{X\}_{\psi}$, совпадающий*

с $[X]_\psi$ *всякий раз, как этот символ определен, и удовлетворяющий условиям:*

$$\{XX'X''\}_\psi \{X'X''\}_\psi^{-1} \{XX''\}_\psi^{-1} \{XX'\}_\psi^{-1} \{X\}_\psi \{X'\}_\psi \{X''\}_\psi = 1, \tag{98}$$

$$\{X_1\}_\psi = \{X\}_\psi, \tag{99}$$

из которых (99) *аналогично* (91). *При этом предполагается, что функция* ψ *удовлетворяет условию* 1° *в определении символа* $[X]_\psi$.

Доказательство. Выберем в группе классов X базис $X_1, \ldots, X_t$, а в каждом классе X_i — произвольного представителя μ_{X_i}. Этот выбор произведем так, что если

$$\mu_{X_i} = \mathfrak{C}_i^l \mathfrak{D}_i \mathfrak{m}_i,$$

то

$$(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j^\sigma) = 1, \quad \sigma \notin H. \tag{100}$$

Положим

$$\mu_X \approx \mu_{X_1}^{r_1} \cdots \mu_{X_t}^{r_t},$$

если

$$X = X_1^{r_1} \cdots X_t^{r_t}.$$

Дивизор $\mathfrak{m}$ из разложения (11) для μ_X обозначим через $\mathfrak{m}_X$. Очевидно, что

$$\mu_{XX'} \approx \mu_X \mu_{X'}, \quad \mathfrak{m}_{XX'} \approx \mathfrak{m}_X \mathfrak{m}_{X'}. \tag{101}$$

Положим

$$\{X\}_\psi = \left[\frac{\mu_X}{\mathfrak{m}_X^\psi}\right].$$

Таким образом определенный инвариант $\{X\}_\psi$ совпадает с $[X]_\psi$, когда $[X]_\psi$ опеределено, т. е. когда выполнены условия 2° и 3°, а при $l = 2$ и условие 4° в определении $[X]_\psi$, так как в этом случае $\{X\}_\psi$ отличается от $[X]_\psi$ только другим выбором представителя μ_X в классе X, а как мы доказали в § 1, $[X]_\psi$ не зависит от этого выбора.

Для символа $\{X\}_\psi$ выполнено также условие (98). В самом деле, левая часть (98) равна

$$\left[\frac{\mu_{XX'X''}}{\mathfrak{m}_{XX'X''}^\psi}\right]\left[\frac{\mu_{X'X''}}{\mathfrak{m}_{X'X''}^\psi}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_{XX''}}{\mathfrak{m}_{XX''}^\psi}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_{XX'}}{\mathfrak{m}_{XX'}^\psi}\right]^{-1}\left[\frac{\mu_X}{\mathfrak{m}_X^\psi}\right]\left[\frac{\mu_{X'}}{\mathfrak{m}_{X'}^{\psi'}}\right]\left[\frac{\mu_{X''}}{\mathfrak{m}_{X''}^\psi}\right].$$

Используя соотношения (100) и (101), а также мультипликативность символа $\left[\frac{\mu}{\mathfrak{a}}\right]$, мы получаем, путем разложения на множители, что это выражение равно 1.

Соотношение (99) мы, как и при доказательстве леммы 3, принимаем за определение символа $\{X\}_\psi$ в подполях поля k и получаем таким образом символ $\{X\}_\psi$, удовлетворяющий всем требованиям, сформулированным в условиях леммы.

Рассмотрим произвольную l-группу G класса c с заданной системой образующих $s_1, \ldots, s_d$. Пусть $G = S_d/N$ есть представление G в виде

факторгруппы свободной группы S_d, соответствующее этому выбору образующих. Обозначим через N' подгруппу N, порожденную коммутаторами элементов N с элементами S_d и l-ми степенями элементов N. Классы X систем множителей на G со значениями в группе корней степени l из 1 находятся во взаимно однозначном соответствии с характерами группы N/N' [см. ([6]), лемма 1]. С другой стороны, группа S_d/N' имеет класс $\leqslant c+1$ и поэтому все ее элементы и, в частности, элементы N/N' представляются коммутаторными формами [см. ([10])] степени $\leqslant c+1$ от образующих $s_1, \ldots, s_d$. Ввиду этого, N/N' является гомоморфным образом модуля форм Ли степени $\leqslant c+1$ от d переменных $x_1, \ldots, x_d$. Переменные $x_1, \ldots, x_d$ находятся во взаимно однозначном соответствии с образующими $s_1, \ldots, s_d$. Если в G задана группа автоморфизмов, состоящих в перестановках образующих, то те же перестановки $x_1, \ldots, x_d$ определяют в модуле Ли группу автоморфизмов, относительно которой указанный гомоморфизм является операторным. Ввиду указанных свойств мы будем рассматривать классы X как характеры модуля Ли.

Вернемся к цепочке полей $\Omega \subset L \subset k \subset K$, рассматривавшейся в предшествующем пункте, где группа Галуа K/k есть одна из групп $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$, $\mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$ и K/Ω — шольцево. Определим в K символы $\{\chi, X\}$, $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$ и $\{X\}_\psi$ согласно леммам 3 и 4. Как было указано, будучи рассмотрены для подполей $K(S)$, они являются функциями гомоморфизмов.

ТЕОРЕМА 3. *Если характеры X, X' и X'' имеют относительно совокупности переменных $x_{u,\delta}$ степени $< n$, n' и n'', X и хотя бы один из X' и X'' не аннулирует хотя бы одного многочлена Ли, зависящего хотя бы от одного $x_{u,\delta}$, и X, X' и X'' аннулируют все многочлены, зависящие только от $x_{u,i}$, $i<\delta-1$, а $\chi(s_{u,i})=1$, $i \leqslant \delta-1$, то инварианты $\{\chi, X\}$, $(X)_M$, $\{X\}_\psi$ и $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$ имеют, как функции гомоморфизмов типа $(s_{u,1}, \ldots, s_{u,\delta-1}; t_{u,1}, \ldots, t_{u,\delta-1} \mid t_{u,\delta})$ шольцева относительно M и l поля K, следующие степени:*

$(X)_M$ — степень $\leqslant n$,

$\{\chi, X\}$ — степень $\begin{cases} \leqslant n, & \text{если } \chi(s_{u,\delta})=1 \text{ для всех } u, \\ \leqslant n+1, & \text{если } \chi(s_{u,\delta}) \neq 1 \text{ для некоторого } u, \end{cases}$

$\{X\}_\psi$ — степень $\leqslant 2n$,

$\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$ — степень $\leqslant n'+n''$.

Доказательство этой теоремы в части, касающейся инвариантов $(X)_M$ и $\{\chi, X\}$, дословно совпадает с доказательством теоремы 4 работы ([6]), а в части, касающейся инвариантов $\{X\}_\psi$, также дословно совпадает с доказательством теоремы 7 работы ([8]). Нам остается, таким образом, доказать утверждение теоремы 3, относящееся к степени инварианта $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1}}$.

Наши рассуждения будут весьма близки к тем, которые использованы при доказательстве теоремы 7 работы ([8]).

Выберем в группе характеров X базис $X_1, \ldots, X_t$ и запишем X' и X'' через этот базис:

$$X' = X_1^{c_1'} \cdots X_t^{c_t'}, \quad X'' = X_1^{c_1''} \cdots X_t^{c_t''} \cdot$$

При фиксированном поле K инвариант $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ может быть записан в виде:

$$\zeta^{f(c_1', \ldots, c_t'; c_1'', \ldots, c_t'')} = \zeta^{f(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')},$$

где $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ — векторы с координатами $(c_1', \ldots, c_t')$, $(c_1'', \ldots, c_t'')$ в t-мерном пространстве над полем классов вычетов $\bmod l$.

Соотношения

$$\{X_1'X_2', X'''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} = \{X_1', X'''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} \{X_2', X_2'''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}},$$

$$\{X', X_1'''X_2''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} = \{X', X_1''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}} \{X', X_2'''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$$

дают нам:

$$f(\mathbf{c}_1' + \mathbf{c}_2', \mathbf{c}'') \equiv f(\mathbf{c}_1', \mathbf{c}'') + f(\mathbf{c}_2', \mathbf{c}'') \ (l),$$

$$f(\mathbf{c}', \mathbf{c}_1'' + \mathbf{c}_2'') \equiv f(\mathbf{c}', \mathbf{c}_1'') + f(\mathbf{c}', \mathbf{c}_2'') \ (l),$$

т. е. показывают, что функция $f(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')$ билинейна. Из этого следует, что имеет место представление

$$f(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \equiv \sum_{i,k=1} a_{i,k} c_i' c_k'' \ (l).$$

Если рассматривать инвариант $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$ как функцию канонического гомоморфизма S поля K, то и $c_i'(S)$ и $c_k''(S)$ будут функциями гомоморфизма, причем

$$f(S) \equiv \sum a_{i,k} c_i'(S) c_k''(S) \ (l).$$

Соотношения (37) работы ([6]) показывают, что $c_i'(S)$ имеет степень $\leqslant n'$, а $c_i''(S)$ — степень $\leqslant n''$ относительно S. С другой стороны, в работе ([8]) доказано (стр. 416), что степень произведения двух функций не превосходит суммы их степеней. Ввиду этого, степень $f(S) \leqslant n' + n''$, что и доказывает теорему.

3. **Построение поля с заданной разрешимой группой Галуа.** В этом пункте мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если в цепочке полей $\Omega \subset L \subset k \subset K$ поле K/k имеет группу Галуа $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, $\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ или $\mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$, то мы будем обозначать его соответственно через $K_d^{(c)}$, $K_d^{(c,r)}$, $K_d^{(c,r,s)*}$

ТЕОРЕМА 4. *Для любых натуральных чисел δ, r и s существует натуральное число $c_1(\delta, r, s)$ со следующим свойством: в любом шольцевом относительно M и l поле $K_d^{(c,r,s)*}/\Omega$ с группой Галуа $F \cdot \mathfrak{G}_d^{(c,r,s)*}$ и $d > c_1(\delta, r, s)$ существует подполе $K_\delta^{(c,r,s)*} = K_d^{(c,r,s)*}(S)$ с группой Галуа $F \cdot \mathfrak{G}_\delta^{(c,r,s)*}$ и всеми инвариантами $\{\chi, X\}$, $(X)_M$, $\{X\}_\psi$ и $\{X', X''\}^{(i)}_{\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}}$, равными* 1.

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 5 работы ([6]), если только заменить в нем ссылку на теорему 4 работы ([6]) ссылкой на теорему 3 настоящей работы.

ЛЕММА 5. *Для любых чисел δ, r и s существует число $c(\delta, r, s)$ со следующим свойством: в любом шольцевом относительно M и l поле*

$K_d^{(c,r)}/\Omega$ *с группой Галуа* $F\cdot\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ *над* Ω *и* $d > c(\delta, r, s)$ *существует подполе* $K_\delta^{(c,r)} = K_d^{(c,r)}(S)$ *с группой Галуа* $F\cdot\mathfrak{G}_\delta^{(c,r)}$ *над* Ω, *погружаемое в шольцево поле* $K_\delta^{(c,r+1,s)^*}$ *с группой Галуа* $F\cdot\mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1,s)^*}$ *над* Ω.

Мы докажем лемму индукцией по s. Пусть для любого δ найдено число $c(\delta, r, s-1)$. Докажем, что можно положить

$$c(\delta, r, s) = c(c_1(\delta, r, s), r, s-1),$$

где число $c_1(\delta, r, s)$ определено в теореме 4. Действительно, пусть $d > c(\delta, r, s)$ и $K_d^{(c,r)} \supset k$ — заданное нам шольцево поле с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_d^{(c,r)}$ над Ω. По предположению индукции, в поле $K_d^{(c,r)}$ существует подполе

$$K_{d_1}^{(c,r)} = K_d^{(c,r)}(S_1),$$

погружаемое в шольцево поле $K_{d_1}^{(c,r+1,s-1)^*}$ с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_{d_1}^{(c,r+1,s-1)^*}$ над Ω и $d_1 > c_1(\delta, r, s)$. Ввиду теоремы 4, в $K_{d_1}^{(c,r+1,s-1)^*}$ существует подполе

$$K_\delta^{(c,r+1,s-1)^*} = K_{d_1}^{(c,r+1,s-1)^*}(S)$$

со всеми инвариантами, равными 1. Применяя теорему 2, мы видим, что $K_\delta^{(c,r+1,s-1)^*}$ погружаемо в шольцево поле K^*, причем, очевидно, $K_\delta^{(c,r+1,s)} \subset K^*$, по определению поля K. Таким образом, $K_\delta^{(c,r+1,s)^*}$ — шольцево, и лемма доказана.

Для некоторого натурального m

$$\mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1,m)} = \mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1)}.$$

Мы будем обозначать $\mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1,m)^*}$ через $\mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1)^*}$. Из леммы 5 очевидным образом вытекает

Следствие. *Для любых* δ, c *и* r *существует число* $c(\delta, c, r)$ *со следующим свойством: в любом шольцевом поле* $K_d^{(c,r)}$ *с* $d > c(\delta, c, r)$ *существует подполе* $K_\delta^{(c,r)} = K_d^{(c,r)}(S)$, *погружаемое в шольцево поле* $K_\delta^{(c,r+1)^*} \supset k$ *с группой Галуа* $F\cdot\mathfrak{G}_\delta^{(c,r+1)^*}$ *над* Ω.

Для доказательства достаточно положить в лемме 5 $s = m$.

ТЕОРЕМА 5. *Любое шольцево относительно* M *и* l *поле* k/Ω *с группой Галуа* F *погружаемо в шольцево относительно* M *и* l *поле* $K \supset k$ *с группой Галуа* G *над* k *и* $F\cdot G$ *над* Ω *при любой* F*-операторной группе* G *порядка* l^α. *При этом* M *должно делиться на* l *в степени хотя бы на* 1 *большей, чем произведение показателей* G *и силовской* l *подгруппы группы* F.

Доказательство. Так как любая F-операторная группа является операторно-гомоморфным образом группы $\mathfrak{G}_d^{(c)}$, имеющей тот же показатель, то нам достаточно доказать теорему для случая $G = \mathfrak{G}_d^{(c)}$. Мы докажем ее для более общего случая $G = \mathfrak{G}_\delta^{(c,r)}$. Так как

$$\mathfrak{G}_\delta^{(c,k)} = \mathfrak{G}_\delta^{(c)}, \quad \mathfrak{G}_\delta^{(c,0)} = \mathfrak{G}_\delta^{(c-1)},$$

то мы можем доказывать теорему индукцией по r при фиксированном и произвольном δ.

Пусть для групп $\mathfrak{G}_\delta^{(c,r-1)}$ теорема доказана. Тогда поле k погружаемо в шольцево поле $K_d^{(c,r-1)}$ с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_d^{(c,r-1)}$ над Ω и любым d. Возьмем, в частности, $d > c(\delta, r-1)$, где $c(\delta, r-1)$ — то число, существование которого доказано в следствии из леммы 5. Согласно этому следствию,

$$K_d^{(c,r-1)} \supset K_\delta^{(c,r-1)} = K_d^{(c,r-1)}(S),$$

причем $K_\delta^{(c,r-1)} \supset k$ и погружаемо в шольцево поле $K_\delta^{(c,r)*}$. Поля

$$\Omega \subset L \subset K_\delta^{(c,r-1)} \subset K_\delta^{(c,r,m)} \subset K_\delta^{(c,r)*}$$

образуют цепочку полей, к которым применима теорема Фаддеева-Гашютца. Согласно этой теореме, между $K_\delta^{(c,r-1)}$ и $K_\delta^{(c,r)*}$ содержится поле $K_\delta^{(c,r)}$ с группой Галуа $F\cdot\mathfrak{G}_\delta^{(c,r)}$ над Ω. Ввиду того что $K_\delta^{(c,r)}$ является подполем шольцева поля $K_\delta^{(c,r)*}$, оно само шольцево. Теорема доказана.

Заметим, что ограничение на M в формулировке теоремы 5 мы должны были наложить, так как пользовались им при выводе свойств символа $[\chi, X]$ на стр. 532 и при применении теоремы Шольца, на основании которой для шольцевых полей степени l^α и центральных расширений задача погружения всегда разрешима.

ТЕОРЕМА 6. *Утверждение теоремы 5 сохраняет силу при замене требования шольцевости относительно M и l требованием шольцевости относительно l.*

Доказательство. Если Ω содержит корень ζ степени l из 1, то понятия шольцевости относительно M и l и шольцевости относительно M совпадают. Если Ω не содержит корня степени l из 1, то обозначим $k(\zeta)$ через $\bar{k}$, его группу — через $\bar{F}$, естественный гомоморфизм $\bar{F}$ на F — через $\varphi(\bar{u}) = u$, а ядро этого гомоморфизма — через C. Рассмотрим полупрямое произведение $\bar{F}\cdot G$, определив действие операторов из $\bar{F}$ на G формулой

$$\sigma^{\bar{u}} = \sigma^{\varphi(\bar{u})}, \quad \sigma \in G, \quad \bar{u} \in \bar{F}, \quad \varphi(\bar{u}) \in F.$$

Согласно лемме 1, поле $\bar{k}$ — шольцево относительно M и l, а ввиду теоремы 5, оно погружаемо в шольцево относительно M и l поле $\bar{K}$ с группой Галуа $\bar{F}\cdot G$ над Ω. В поле $\bar{K}$ подгруппе C его группы Галуа соответствует подполе K с группой Галуа $F\cdot G$ над Ω. Очевидно, что $K \supset k$ и дает решение интересующей нас задачи погружения. Так как $K(\zeta) = \bar{K}$ — шольцево относительно M и l, то, на основании леммы 2, мы заключаем, что K — шольцево относительно M. Теорема доказана.

Следствие. *Теорема 6 имеет место для любого нильпотентного нормального делителя G. При этом ограничение на M должно накладываться для каждой силовской подгруппы G.*

Доказательство очевидно.

ТЕОРЕМА 7. *Над любым полем алгебраических чисел существует расширение с любой наперед заданной разрешимой группой Галуа.*

Доказательство. Пусть G — заданная нам разрешимая группа. Как доказал Оре (3), максимальный нильпотентный нормальный делитель N

группы G полудополнен, т. е. существует такая истинная подгруппа $G_1 \subset G$, что $G = G_1 \cdot N$. Из этого следует, что G есть гомоморфный образ полупрямого произведения $G_1 \cdot N$. Применением подобное же рассуждение к G_1 и будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до единичной подгруппы. В результате мы получим группу $\widetilde{G}$, гомоморфным образом которой является G и которая обладает рядом нормальных делителей:

$$\widetilde{G} \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_r = (l)$$

со следующим свойством: $\widetilde{G} / N_i$ является полупрямым произведением подгруппы F_i, изоморфной $\widetilde{G} / N_{i-1}$, и нильпотентного нормального делителя N_{i-1} / N_i. Возьмем за M число, содержащее любой простой делитель l порядка $\widetilde{G}$ в степени бо̀льшей, чем он входит в произведение показателей силовских l-подгрупп групп N_{i-1} / N_i. Применяя r раз следствие из теоремы 6, мы получим поле $\widetilde{K} / \Omega$ с группой Галуа $\widetilde{G}$. Так как G является гомоморфным образом $\widetilde{G}$, то в $\widetilde{K}$ содержится подполе K / Ω с группой Галуа G.

Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве теоремы 7 можно добиться, чтобы дискриминанты всех рассматриваемых полей были взаимно просты с любым наперед заданным дивизором $\mathfrak{M}$. Из этого следует, что число расширений поля Ω, имеющих заданную разрешимую группу Галуа, бесконечно.

Приложение

Мы докажем здесь теорему существования, обобщающую на случай ненормальных полей основной результат работы (7).

Пусть k / Ω — нормальное поле алгебраических чисел с группой Галуа G. Мы будем предполагать, что k содержит корень ζ простой степени l из 1 и положим

$$\zeta^{\sigma} = \zeta^{g(\sigma)}, \quad \sigma \in G.$$

Пусть H — подгруппа G, порядок которой есть степень l, и L — принадлежащее к ней подполе k. Очевидно, что

$$g(\sigma_1 \sigma_2) \equiv g(\sigma_1)\, g(\sigma_2), \quad g(h) \equiv 1\ (l), \quad h \in H,$$

и поэтому $g(\sigma)$ постоянно на правых и левых классах смежности G по H, а также на классах G по двойному модулю (H, H). Мы будем писать $g(S)$, где S — один из этих классов, вместо $g(\sigma)$, $\sigma \in S$.

Пусть задана функция $\zeta(S)$ на множестве левых классов смежности S группы G по H со значениями в группе корней степени l из 1. Если $\mathfrak{S}$ — класс смежности G по модулю (H, H), состоящий из классов $S_1, \ldots, S_r$, то положим

$$\zeta(\mathfrak{S}) = \zeta(S_1) \cdots \zeta(S_r).$$

Мы предположим, что функция $\zeta(S)$ такова, что для любого класса $\mathfrak{S}$ по модулю (H, H)

1. $\zeta(\mathfrak{S}) = \zeta(\mathfrak{S}^{-1})^{g(\mathfrak{S})}$.

В случае, если $l=2$, мы наложим некоторые дополнительные ограничения.

Пусть $\mathfrak{S}$ — инволютивный класс, т. е. $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}^{-1}$. Докажем, что в $\mathfrak{S}$ существует такои представитель σ, что $\sigma^2 \in H$. В самом деле, если σ — любой представитель $\mathfrak{S}$, то из инволютивности следует, что

$$\sigma_1^{-1}=h_1\sigma_1 h_2, \quad h_1, h_2 \in H.$$

Отсюда мы получаем:

$$(\sigma_1 h_1)(\sigma_1 h_1) h_1^{-1} h_2 = 1,$$

т. е.

$$(\sigma_1 h_1)^2 = h_2^{-1} h_1 \in H.$$

Таким образом, нам достаточно принять $\sigma_1 h_1$ за σ.

Очевидно, что σ лежит в нормализаторе подгруппы $H \cap H^\sigma$. С другой стороны, из

$$\sigma^2 \in H, \quad \sigma^2 = \sigma^{-1}\sigma^2\sigma \in \sigma^{-1} H \sigma = H^\sigma$$

следует, что $\sigma^2 \in H \cap H^\sigma$. Ввиду этого, подгруппа $\{\sigma, H \cap H^\sigma\}$, порожденная σ и $H \cap H^\sigma$, содержит $H \cap H^\sigma$ как нормальный делитель индекса 2. Обозначим через LL^σ композит полей L и L^σ, принадлежащий подгруппе $H \cap H^\sigma$, а через Λ_σ — подполе, принадлежащее $\{\sigma, H \cap H^\sigma\}$. Очевидно, что

$$LL^\sigma \supset \Lambda_\sigma, \quad (LL^\sigma : \Lambda_\sigma) = 2.$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_\sigma$ дифференту поля $LL^\sigma / \Lambda_\sigma$ и положим

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}} = N_{LL^\sigma/L}(\mathfrak{D}_\sigma).$$

Нетрудно доказать, что $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}$ не зависит от выбора σ в $\mathfrak{S}$.

Теперь мы можем сформулировать дополнительные условия, накладываемые при $l=2$:

1′. Все простые делители двойки полностью распадаются в k/Ω.

2′. Вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры Ω распадаются на вещественные в k.

3′. Для любых инволютивных классов $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_r$, для которых $\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_1} \cdots \mathfrak{E}_{\mathfrak{S}_r} \approx \alpha_\chi$ в L

$$\zeta(\mathfrak{S}_1) \cdots \zeta(\mathfrak{S}_r) = 1.$$

Здесь α_χ — такое число из L, что $\sqrt[l]{\alpha_\chi} \in k$.

ТЕОРЕМА. *Пусть заданы поле k/Ω и функция $\zeta(S)$, удовлетворяющие условию 1, а при $l=2$ — условиям 1′, 2′ и 3′, не критические и не сопряженные друг с другом в k/L простые дивизоры 1-го порядка $\mathfrak{Q}_1, \ldots, \mathfrak{Q}_m$ поля L/Ω и корни степени l из 1 $\xi_1, \ldots, \xi_m$. Существует бесконечно много чисел $\alpha \in L$, удовлетворяющих условиям:*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{Q}_i}\right) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{102}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right) = \zeta(S) \text{ для всех } \mathfrak{P} \mid \alpha, \quad \sigma \in G, \quad \sigma \notin H. \tag{103}$$

Условие (103) предполагает, что если $\mathfrak{P} \mid \alpha$ и $\sigma \notin H$, то $(\mathfrak{P}^{\sigma}, \alpha) = 1$.

При доказательстве мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть $\mathfrak{T}$ — класс смежности G по модулю (H, H) и $\mathfrak{T} = T_1 + \cdots + T_r$, где T_i — правые классы смежности G по (H, H). Если α есть число из L, то под $\alpha^{\mathfrak{T}}$ мы будем понимать $\alpha^{\tau_1} \cdots \alpha^{\tau_r}$, где $\tau_i \in T_i$. Аналогичный смысл имеет $\mathfrak{a}^{\mathfrak{T}}$, где $\mathfrak{a}$ — дивизор из L.

Нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. *Если α и $\mathfrak{b}$ — число и дивизор из L, то $\alpha^{\mathfrak{T}}$ и $\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}$ также лежат в L. При этом*

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}}\right) = \left(\frac{\alpha^{\mathfrak{T}^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)^{g(\mathfrak{T})}. \tag{104}$$

Доказательство. Из того, что $\mathfrak{T}$ есть класс смежности по двойному модулю (H, H), следует, что $T_i = T_1 h_i$, $h_i \in H$, где h_i — представители классов смежности H по $H \cap H^{\tau_1}$. Ввиду этого,

$$\alpha^{\mathfrak{T}} = \alpha^{\tau_1(h_1 + \cdots + h_r)}$$

и, соответственно,

$$\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{b}^{\tau_1(h_1 + \cdots + h_r)}.$$

Число α^{τ_1} и дивизор $\mathfrak{b}^{\tau_1}$ принадлежат полю LL^{τ_1}. Изоморфизмы расширения LL^{τ_1} / L индуцируются, как легко видеть, автоморфизмами $h_1, \ldots, h_r$ поля k / L. Таким образом, мы имеем:

$$\alpha^{\mathfrak{T}} = N_{LL^{\tau_1}/L}(\alpha^{\tau_1}), \quad \mathfrak{b}^{\mathfrak{T}} = N_{LL^{\tau_1}/L}(\mathfrak{b}^{\tau_1}),$$

откуда и следует, что $\alpha^{\mathfrak{T}}$ и $\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}$ принадлежат L.

Применим эти соображения к символу Лежандра $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}}\right)$. Мы имеем:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}}\right)_L = \left(\frac{\alpha}{N_{LL^{\tau_1}/L}(\mathfrak{b}^{\tau_1})}\right)_L = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\tau_1}}\right)_{LL_{\tau_1}}. \tag{105}$$

Применим теперь к $\alpha, \mathfrak{b}^{\tau_1}$ и LL^{τ_1} автоморфизм τ_1^{-1}. Мы получим:

$$\left(\frac{\alpha^{\tau_1^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_{LL^{\tau_1^{-1}}} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\tau_1}}\right)_{LL^{\tau_1}}^{g(\mathfrak{T}^{-1})} \text{ или } \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\tau_1}}\right)_{LL^{\tau_1}} = \left(\frac{\alpha^{\tau_1^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_{LL^{\tau_1^{-1}}}^{g(\mathfrak{T})}. \tag{106}$$

Наконец, аналогично (105), имеем:

$$\left(\frac{\alpha^{\tau_1^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_{LL^{\tau_1^{-1}}} = \left(\frac{N_{LL^{\tau_1^{-1}}/L}(\alpha^{\tau_1^{-1}})}{\mathfrak{b}}\right)_L = \left(\frac{\alpha^{\mathfrak{T}^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_L. \tag{107}$$

Соединяя (105), (106) и (107), получаем:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}}\right)_L = \left(\frac{\alpha^{\mathfrak{T}^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_L^{\sigma(\mathfrak{T})}.$$

Лемма доказана.*

Доказательство теоремы. Рассмотрим сначала случай $l \neq 2$. Построим, как и в работе (7), последовательность простых l-гиперпримарных главных дивизоров $\pi_t \in L$, имеющих порядок 1 в L/Ω, полностью распадающихся в k/L, взаимно простых с l и удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{Q}_i}\right) = \xi_i^t, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{108}$$

Эти условия должны быть выполнены для всех членов последовательности, в остальном же она строится рекуррентно, причем при построенных $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ число π_t строится так, чтобы выполнялись условия:

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)^{-1} \zeta(S), \quad s = 1, \ldots, t-1, \quad \sigma \notin H, \tag{109}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)^{-1} \zeta(S), \quad s = 1, \ldots, t-1, \quad \sigma \notin H, \tag{110}$$

где $\mathfrak{P}_s$ — фиксированный простой делитель π_s в k.

Докажем, что такой выбор π_t возможен. Обозначим через $\mathfrak{f}$ произведение модуля гиперпримарности, всех $N_{k/L}(\mathfrak{P}_s^\sigma)$ и $N_{k/L}(\mathfrak{Q}_i)$, через $S_\mathfrak{f}$ — группу классов по модулю $\mathfrak{f}$ в L, состоящую из l-х степеней главных дивизоров, а через $\sum_\mathfrak{f}$ — поле классов к $S_\mathfrak{f}$. То, что простой дивизор $\mathfrak{p} \in L$ является главным ($\mathfrak{p} = (\pi)$, где π l-гиперпримарно) и удовлетворяет условиям (108) и (109), эквивалентно тому, что $\mathfrak{p}$ принадлежит в $\sum_\mathfrak{f}$ ко вполне определенному автоморфизму σ. То, что $\mathfrak{p}$ полностью распадается в k/L и удовлетворяет условию (110), эквивалентно тому, что $\mathfrak{p}$ принадлежит ко вполне определенному автоморфизму τ в поле k', получающемся присоединением к k всех $\sqrt[l]{\pi_i^\sigma}$, $i = 1, \ldots, t-1$, $\sigma \notin H$. Для того чтобы существовал простой дивизор $\mathfrak{p}$, удовлетворяющий всем этим условиям, необходимо и достаточно, в силу закона плотностей Чеботарева, чтобы в композите $\sum_\mathfrak{f} \cdot k'/L$ существовал автоморфизм, индуцирующий в $\sum_\mathfrak{f}$ σ, а в k' — τ. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы в поле $\sum_\mathfrak{f} \cap k'$ σ и τ индуцировали один и тот же автоморфизм.

Выясним, каково поле $\sum_\mathfrak{f} \cap k'$. Так как дискриминант k/L и все $\pi_i^\sigma (i = 1, \ldots, t-1)$ взаимно просты с $\mathfrak{Q}_i$, то и дискриминант k' взаимно прост с $\mathfrak{Q}_i$, а поэтому в дискриминант $\sum_\mathfrak{f} \cap k'$ дивизоры $\mathfrak{Q}_i$ не входят.

---

* Аналогично доказывается более общее соотношение:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}^{\mathfrak{T}}}\right)_{L_1} = \left(\frac{\alpha^{\mathfrak{T}^{-1}}}{\mathfrak{b}}\right)_{L_2}^{\sigma(\mathfrak{T})},$$

где α есть число из поля L_1, принадлежащего подгруппе H_1, $\mathfrak{b}$ — дивизор из поля L_2, принадлежащего подгруппе H_2, $\zeta \in L_1 \cap L_2$, и $\mathfrak{T}$ — класс смежности G по двойному модулю (H_1, H_2).

Точно так же критические простые дивизоры k/L не входят в дискриминант $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$, который состоит, таким образом, только из простых делителей π_i^{σ} и l. Обозначим через k_0 максимальное абелево подполе поля k, дискриминант которого содержит только простые делители l, а группа Галуа k_0 над максимальным неразветвленным подполем имеет показатель l. Очевидно, что $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$ содержит k_0.

С другой стороны, $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$ абелево над L и имеет над k_0 группу Галуа показателя l, т. е. получается присоединением к k_0 радикалов $\sqrt[l]{\eta_i}$, $\eta_i \in k_0$.

Пусть η — любое такое число поля k_0, что $\sqrt[l]{\eta} \in \sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$. Тогда тем более

$$\sqrt[l]{\eta} \in k', \quad \eta \in k.$$

Ввиду этого мы имеем для η представление

$$\eta = \prod_i \pi_i^{\sum f_i(T)\tau} \cdot \beta^l, \tag{111}$$

где $f_i(T)$ — функции на правых классах смежности G по H, а $\beta \in k$. Обозначим через H_0 подгруппу группы G, к которой принадлежит k_0. Очевидно, что $H_0 \subset H$. Ввиду того, что $\eta \in k_0$, $\eta^{h_0} = \eta$ при $h_0 \in H_0$. Подставим в это соотношение выражение (111) для η. Так как π_i являются дивизорами 1-го порядка, то в получающемся равенстве показатели при π_i^{τ} в левой и правой частях должны быть сравнимы mod l. Мы получаем, что

$$\left(\sum f_i(T)\tau\right) h_0 \equiv \sum f_i(T)\tau \ (l),$$

$$f_i(Th_0) \equiv f_i(T) \ (l) \text{ при } h_0 \in H_0.$$

Таким образом, $f_i(T)$ можно считать постоянными на классах смежности по двойному модулю (H, H_0). Из этого, однако, следует, что

$$\pi_i^{\sum f_i(T)\tau} \in k_0,$$

а так как и $\eta \in k_0$, то и $\beta^l \in k_0$. Очевидно, что

$$\sqrt[l]{\pi_i^{\sum f_i(T)\tau}} \in \sum_{\mathfrak{f}} \cap k',$$

а так как и $\sqrt[l]{\eta} \in \sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$, то и $\beta \in \sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$. Мы видим, что

$$k_0(\beta) \subset \sum_{\mathfrak{f}} \cap k', \quad \beta^l \in k_0.$$

Предшествующие рассуждения показывают, что дискриминант $k_0(\beta)/L$ может делиться только на делителей l. Легко видеть, что группа Галуа $k_0(\beta)$ над его максимальным неразветвленным подполем имеет показатель l, а над L она абелева. Таким образом, $k_0(\beta)$ обладает всеми теми

свойствами, при помощи которых мы определили k_0, и ввиду максимальности k_0 должно с ним совпадать, так что $\beta \in k_0$. Следовательно, $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$ содержится в поле, получающемся присоединением к k_0 всех

$$\sqrt[l]{\pi_i^{\Sigma f_i(T)\tau}},$$

где $f_i(T)$ постоянны на классах смежности G по модулю (H, H_0). Предположим, что

$$k_0(\sqrt[l]{\eta}) \subset \sum_{\mathfrak{f}} \cap k'.$$

Как мы показали,

$$\eta = \prod_i \pi_i^{\Sigma f_i(T)\tau}.$$

Из абелевости $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k' / L$ следует, что $\eta^h = \eta$, $h \in H$. Рассуждая как и раньше, мы видим, что $f_i(T)$ должны быть постоянны на классах смежности G по модулю (H, H). Но, и наоборот, очевидно, что все числа

$$\pi_i^{\Sigma f_i(T)\tau} \in L,$$

так что

$$\sqrt[l]{\pi_i^{\Sigma f_i(T)\tau}} \in \sum_{\mathfrak{f}} \cap k',$$

если $f_i(T)$ постоянно на классах смежности по модулю (H, H). Таким образом мы доказали, что $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$ является композитом полей k_0 и $L\left(\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)$, где $\mathfrak{S}$ — классы смежности G по модулю (H, H).

Найдем теперь автоморфизмы, которые индуцируют σ и τ в каждом из этих полей. В k_0 и σ и τ индуцируют, как легко проверить, единичный автоморфизм. Возьмем какое-либо поле $L\left(\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)$ и простой дивизор $\mathfrak{p}$, принадлежащий к автоморфизму σ в $\sum_{\mathfrak{f}}$. По построению, это значит, что $\mathfrak{p}$ — главный ($\mathfrak{p} = (\pi)$) и

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{P}_s^{\sigma}}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^{\sigma}}\right)^{-1} \zeta(S) \text{ для любого } s = 1, \ldots, t-1.$$

Из этого следует, что

$$\left(\frac{\pi_i^{\mathfrak{S}}}{\pi}\right) = \left(\frac{\pi}{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right) = \left(\frac{\pi_i}{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)^{-1} \zeta(\mathfrak{S}).$$

Таким образом, π принадлежит в $L\left(\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)$ к автоморфизму, сводящемуся к умножению $\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}$ на

$$\left(\frac{\pi_i}{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)^{-1} \zeta(\mathfrak{S}),$$

а следовательно, именно этот автоморфизм и индуцирует σ в этом поле.

Рассмотрим теперь простой дивизор $\mathfrak{p}$, принадлежащий к τ в k'. Очевидно, что тогда $\mathfrak{p} = N_{k/L}(\mathfrak{P})$, причем

$$\left(\frac{\pi_i^\sigma}{\mathfrak{P}}\right) = \left(\frac{\pi_i^\sigma}{\mathfrak{P}_i}\right)^{-1} \zeta\,(S^{-1})^{g\,(\sigma)}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы видим, что τ сводится в $L\left(\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right)$ к умножению $\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}$ на

$$\left(\frac{\pi_i^{\mathfrak{S}}}{\pi_i}\right) \zeta\,(\mathfrak{S}^{-1})^{g\,(\mathfrak{S})}.$$

Ввиду l-гиперпримарности π_i, мы имеем:

$$\left(\frac{\pi_i^{\mathfrak{S}}}{\pi_i}\right) = \left(\frac{\pi_i}{\pi_i^{\mathfrak{S}}}\right),$$

а ввиду условия 1°, наложенного на $\zeta(S)$,

$$\zeta\,(\mathfrak{S}^{-1})^{g\,(\mathfrak{S})} = \zeta\,(\mathfrak{S}).$$

Таким образом, σ и τ сводятся к умножению $\sqrt[l]{\pi_i^{\mathfrak{S}}}$ на одно и то же число, и, значит, совпадают в $\sum_{\mathfrak{f}} \cap k'$. Этим доказана возможность выбора π_t на каждом шаге так, чтобы удовлетворялись условия (108), (109) и (110).

Теперь мы рассуждаем в точности так, как в работе ([7]). В последовательности $\pi_1, \pi_2, \ldots$ должны существовать два таких числа π_i и π_j, что

$$\left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{P}_i^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_j}{\mathfrak{P}_j^\sigma}\right)$$

для любого $\sigma \in G$, $\sigma \notin H$. Непосредственная проверка показывает, что число $\alpha = \pi_i \pi_j$ удовлетворяет условиям теоремы.

Рассмотрим случай $l = 2$. Очевидно, что теперь $g(\sigma) = 1$. Разобьем все отличные от единицы классы по двойному модулю (H, H) на три группы. К первой мы отнесем все инволютивные классы. Неинволютивные классы разобьем на две части, отнеся по произволу из каждой пары взаимно обратных классов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^{-1}$ один к одной части, а другой — к другой части. Эти три части мы обозначим через U, V и V^{-1} и будем в дальнейшем рассматривать их не только как множества классов $\mathfrak{S}$, но и как множества содержащихся в них автоморфизмов.

Как и при нечетном l, построим последовательность простых главных дивизоров $\pi_1, \ldots, \pi_t, \ldots$ поля L, l-гиперпримарных, тотально-положительных, полностью распадающихся в k/L и удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{Q}_i}\right) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}}\right) = \zeta\,(\mathfrak{S}), \quad \mathfrak{S} \in U. \qquad (112)$$

В остальном мы строим последовательность рекуррентно по следующему правилу. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ построены. Разобьем их совокупность на две части — первую и вторую — способом, который будет указан позже. Первую и вторую части будем обозначать через Π_1 и Π_2. Выберем π_t так, чтобы оно удовлетворяло условиям:

если $\pi_s \in \Pi_1$, $\sigma \in U$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = 1, \tag{113}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S); \tag{114}$$

если $\pi_s \in \Pi_2$, $\sigma \in U$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S), \tag{115}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = 1; \tag{116}$$

если $\pi_s \in \Pi_1$, $\sigma \in V$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = 1, \tag{117}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S); \tag{118}$$

если $\pi_s \in \Pi_2$, $\sigma \in V$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S), \tag{119}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = 1; \tag{120}$$

если $\pi_s \in \Pi_1$, $\sigma \in V^{-1}$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S), \tag{121}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = 1; \tag{122}$$

если $\pi_s \in \Pi_2$, $\sigma \in V^{-1}$, то

$$\left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = 1, \tag{123}$$

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right)\zeta(S). \tag{124}$$

Здесь $\mathfrak{P}_s$ означает простой делитель π_s в k, выбранный для каждого s произвольно, но раз навсегда.

Как и в первой части доказательства (при $l \neq 2$), нам надо проверить, что такой выбор действительно возможен. Эта проверка проводится точно так же, как и в первой части.

Обозначим через $\mathfrak{f}$ произведение простых дивизоров L, критических в k/L или в L/Ω, модуля l-гипепримарности, всех $N_{k/L}(\mathfrak{P}_s^\sigma)$ и $N_{k/L}(\mathfrak{Q}_i)$ и построим, как и в первой части доказательства, поля $\sum_{\mathfrak{f}}$ и k'. Пусть каждому простому дивизору $\mathfrak{r}$ в L, критическому в k/L или в L/Ω,

отнесен корень степени 2 из 1 $(-1)^{x_\mathfrak{r}}$. То, что простой дивизор $\mathfrak{p} \in L$ является главным ($\mathfrak{p} = (\pi)$, где π 2-гиперпримарно), удовлетворяет условиям (113), (115), (117), (119), (121), (123) и

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = (-1)^{x_\mathfrak{r}}, \tag{125}$$

эквивалентно тому, что $\mathfrak{p}$ принадлежит в $\sum_\mathfrak{f}$ ко вполне определенному автоморфизму ω_1. Точно так же то, что $\mathfrak{p}$ полностью распадается в k и удовлетворяет условиям (116), (118), (120), (122), (124) и (126), эквивалентно тому, что $\mathfrak{p}$ принадлежит в k' ко вполне определенному автоморфизму ω_2. Наша задача сводится теперь к тому, чтобы показать, что при некотором выборе $x_\mathfrak{r}$ автоморфизмы ω_1 и ω_2 будут индуцировать в $\sum_\mathfrak{f} \cap k'$ один и тот же автоморфизм и будут выполнены условия:

$$\sum f(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r} \equiv b(\mathfrak{S})\ (2), \text{ если } \mathfrak{E}_\mathfrak{S} \approx \prod_\mathfrak{r} \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{r})}, \quad \zeta(\mathfrak{S}) = (-1)^{b(\mathfrak{S})}.$$

Рассуждая, как и в первой части доказательства, мы видим, что $\sum_\mathfrak{f} \cap k'$ есть композит полей k_0, $L\left(\sqrt{\alpha_\chi}\right)$ и $L\left(\sqrt{\pi_s^\mathfrak{S}}\right)$, где α_χ — такие числа из L, что $\sqrt{\alpha_\chi} \in k$, а $\mathfrak{S}$ — любые классы смежности по модулю (H, H). Легко видеть, что в k_0 ω_1 и ω_2 индуцируют один и тот же автоморфизм, а именно — единичный. Рассмотрим поле $L(\sqrt[l]{\pi_s^\mathfrak{S}})$, где $\pi_s \in \Pi_1$, а $\mathfrak{S} \in U$. Рассуждая, как и в случае $l \neq 2$, мы видим, что ω_1 индуцирует в этом поле единичный автоморфизм, а ω_2 — автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt{\pi_s^\mathfrak{S}}$ на

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^\mathfrak{S}}\right) \zeta(\mathfrak{S}).$$

Нам надо, таким образом, доказать, что

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^\mathfrak{S}}\right) = \zeta(\mathfrak{S}).$$

Так как, по условию,

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{E}_\mathfrak{S}}\right) = \zeta(\mathfrak{S}),$$

то достаточно доказать, что

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^\mathfrak{S}}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{E}_\mathfrak{S}}\right).$$

Мы докажем, что

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^\mathfrak{S}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{E}_\mathfrak{S}}\right), \quad \mathfrak{S} \in U, \tag{126}$$

для любого 2-гиперпримарного числа α.

Ввиду формулы (105), мы имеем:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^\mathfrak{S}}\right)_L = \left(\frac{\alpha}{\alpha^{\tau_1}}\right)_{LL^{\tau_1}}.$$

Выберем в качестве τ_1 того представителя $\mathfrak{S}$, квадрат которого содержится в H. В поле $LL^{\tau_1}/\Lambda_{\tau_1}$ τ_1 индуцирует автоморфизм второго порядка. Мы можем применить к этому полю формулу (6) работы ([7]) и тогда получим:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^{\tau_1}}\right)_{LL^{\tau_1}} = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{D}_{\tau_1}}\right)_{LL^{\tau_1}} = \left(\frac{\alpha}{N_{LL^{\tau_1}/L}(\mathfrak{D}_{\tau_1})}\right)_L = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{E}_{\mathfrak{S}}}\right)_L .$$

Случай поля $k\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$, где $\pi_s \in \Pi_2$, а $\mathfrak{S} \in U$, рассматривается совершенно аналогично.

Рассмотрим поле $k\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$, где $\pi_s \in \Pi_1$, $\mathfrak{S} \in V$. Равенства (117) показывают, что ω_1 индуцирует в этом поле единичный автоморфизм. Возьмем любой простой дивизор $\mathfrak{p}$, принадлежащий к ω_2 в k'. Равенства (122) показывают, что

$$\left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}^{\sigma}}\right)_k = 1, \text{ если } \sigma \in V^{-1}, \quad \pi_s \in \Pi_1, \quad N_{k/L}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p},$$

т. е.

$$\left(\frac{\pi_s^{\sigma}}{\mathfrak{P}}\right)_k = 1, \text{ если } \sigma \in V, \quad \pi_s \in \Pi_1,$$

Из этих равенств мы видим, что

$$\left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{P}}\right)_k = \left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{p}}\right)_L = 1,$$

так как, ввиду леммы, $\pi_s^{\mathfrak{S}} \in L$. Таким образом, ω_2 также индуцирует в $k\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$ единичный автоморфизм.

Рассмотрим поле $k\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$, где $\pi_s \in \Pi_2$, а $\mathfrak{S} \in V$. Равенства (119) показывают, что ω_1 индуцирует в этом поле автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}$ на

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)\zeta(\mathfrak{S}).$$

Равенства (124) показывают, что при $\sigma^{-1} \in V^{-1}$, т. е. $\sigma \in V$

$$\left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\pi_s}\right)\zeta(\mathfrak{S}^{-1}),$$

если $\mathfrak{p}$ принадлежит к ω_2 в k'. Таким образом, ω_2 индуцирует в $L\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$ автоморфизм, сводящийся к умножению $\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}$ на

$$\left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\pi_s}\right)\zeta(\mathfrak{S}^{-1}).$$

Так как

$$\left(\frac{\pi_s}{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right) = \left(\frac{\pi_s^{\mathfrak{S}}}{\pi_s}\right),$$

ввиду 2-гиперпримарности π_s, а $\zeta(\mathfrak{S}) = \zeta(\mathfrak{S}^{-1})$ по условию, то ω_1 и ω_2 совпадают в $L\left(\sqrt{\pi_s^{\mathfrak{S}}}\right)$. Исследование случая, когда $\mathfrak{S} \in V^{-1}$, проводится совершенно аналогично.

Рассмотрим, наконец, поле $L(\sqrt{\alpha_\chi})$. Автоморфизм, который ω_1 индуцирует в этом поле, сводится к умножению $\sqrt{\alpha_\chi}$ на

$$(-1)^{\Sigma \varphi_\chi(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r}}, \text{ если } \alpha_\chi \approx \prod \mathfrak{r}^{\varphi_\chi(\mathfrak{r})},$$

а ω_2 индуцирует в нем единичный автоморфизм. Таким образом, нам надо подобрать $x_\mathfrak{r}$ так, чтобы удовлетворялись сравнения:

$$\sum f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r} \equiv b(\mathfrak{S}) \ (2), \text{ если } \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}} = \prod \mathfrak{r}^{f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{r})},$$
$$\mathfrak{S} \in U, \quad \zeta(\mathfrak{S}) = (-1)^{b(\mathfrak{S})},$$
$$\sum \varphi_\chi(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r} \equiv 0 \ (2), \text{ если } (\alpha_\chi) = \prod_{\mathfrak{r}} \mathfrak{r}^{\varphi_\chi(\mathfrak{r})}.$$

Если бы эта система была не совместна, то существовала бы линейная комбинация левых частей с коэффициентами при всех $x_\mathfrak{r}$, равными нулю и со свободным членом, отличным от 0.

Пусть

$$\sum_{\mathfrak{S} \in U} c(\mathfrak{S}) \sum_{\mathfrak{r}} f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r} + \sum_{\chi} d_\chi \sum \varphi_\chi(\mathfrak{r}) x_\mathfrak{r} \equiv \sum_{\mathfrak{S}} c(\mathfrak{S}) b(\mathfrak{S}) \ (2) \qquad (127)$$

есть такая линейная комбинация. Обозначим $\prod \chi^{d_\chi}$ через χ_0. Принимая во внимание, что в (127) все коэффициенты при $x_\mathfrak{r}$ равны 0, получаем:

$$\varphi_{\chi_0}(\mathfrak{r}) \equiv \sum_{\mathfrak{S} \in U} c(\mathfrak{S}) f_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{r}) \ (2)$$

или

$$(\alpha_{\chi_0}) \approx \prod_{\mathfrak{S} \in U} \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{c(\mathfrak{S})}.$$

Но в этом случае, по условию теоремы,

$$\prod_{\mathfrak{S}} \zeta(\mathfrak{S})^{c(\mathfrak{S})} = 1, \text{ т. е. } \sum_{\mathfrak{S}} b(\mathfrak{S}) c(\mathfrak{S}) \equiv 0 \ (2),$$

что показывает, что и свободный член в (127) обращается в 0.

Таким образом, выбор нужного нам числа π_t на каждом шаге возможен, как бы мы при этом ни разбивали множество $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ на подмножества Π_1 и Π_2. Мы будем производить это разбиение так, чтобы для любого числа n существовало $C(n)$ со следующим свойством: как бы мы ни разбили множество $\pi_1, \ldots, \pi_{C(n)}$ на n подмножеств, хотя бы в одном из них найдутся три числа π_r, π_s и π_t $(r < s < t)$ таких, что при разбиении $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$ на Π_1 и Π_2 π_r и π_s попадут в различные части, а при разбиении $\pi_1, \ldots, \pi_{s-1}$ на Π_1 и Π_2 π_r попадет не в ту часть, в которую оно попало при разбиении $\pi_1, \ldots, \pi_{t-1}$. Возможность

производить разбиение на каждом шаге указанным образом доказана в лемме, содержащейся в работе ([7]).

Мы будем разбивать $\pi_1, \ldots, \pi_{C(n)}$ на подмножества, относя к одному подмножеству все π_i с одинаковыми значениями $\left(\frac{\pi_i}{\mathfrak{P}_i^\sigma}\right)$, $\sigma \notin H$. Таким образом, $n = 2^{(G:H)-1}$. Ввиду указанного свойства разбиения на Π_1 и Π_2, мы найдем три числа π_r, π_s и π_t, удовлетворяющих условиям:

$$\left(\frac{\pi_r}{\mathfrak{P}_r^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_s}{\mathfrak{P}_s^\sigma}\right) = \left(\frac{\pi_t}{\mathfrak{P}_t^\sigma}\right).$$

Непосредственная проверка, полностью аналогичная проведенной в работе ([7]), показывает, что тогда число $\alpha = \pi_1\pi_2\pi_3$ удовлетворяет условиям теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что, как видно из доказательства теоремы, мы можем π_i выбрать принадлежащими к заданному автоморфизму в любом расширении K/L поля k, если этот автоморфизм индуцирует в k единичный автоморфизм и существуют простые главные дивизоры, принадлежащие в K к этому автоморфизму и удовлетворяющие условиям (108) и (112).

Поступило
4.IX.1954

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gaschütz W., Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, J. reine und angew. Math., 190 (1952), 93—107.

[2] Kochendörffer R., Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem für Abelsche Algebren, Math. Nachr., 10, Nr. 1—2 (1953), 75—84.

[3] Ore O., Contributions to the theory of groups of finite order, Duke Math. J., 5, N 2 (1939), 431—460.

[4] Фаддеев Д. К., К теории гомологий в группах, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 16 (1952), 17—22.

[5] Фаддеев Д. К., Об одной теореме теории гомологий в группах, Доклады Ак. наук СССР, 92, № 4 (1953), 703—705.

[6] Шафаревич И. Р., О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 261—296.

[7] Шафаревич И. Р., Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел, Изв. Ак. наук СССР, сер. матем., 18 (1954), 327—334.

[8] Шафаревич И. Р., О задаче погружения полей, Изв. Ак. наук. СССР, сер. матем., 18 (1954), 389—418.

[9] Шафаревич И. Р., О разрешимых в радикалах расширениях полей алгебраических чисел, Доклады Ак. наук СССР, 95, № 2 (1954), 225—227.

[10] Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, Leipzig, 1937.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 18

DATE DUE
